HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十卷 第二、三期合刊 目錄（2007年3月）

懷念一代數學史家李迪教授

台師大數學系 洪萬生教授

2006 年數學史學界最令人意外且震驚的消息，莫過於李迪教授 (1927-2006) 謝世。雖然徐光台教授於 2006 年 8 月訪問內蒙古時，已發現他中風身體移動不便，然而，以他的堅忍不拔，我們都相信他只要減輕工作量，應該可以過關才是。孰知病故消息還是傳來，令吾輩唏噓不已。

我有機會認識李迪教授，緣自我參加 1988 年 8 月由程貞一教授主辦，在美國加州大學聖地亞哥分校 (UCSD) 的『國際中國科技史研討會』。在那一次的研討會中，我首度與中國大陸的同行見面，其中李迪、杜石然、沈康身與梅榮照教授等四人，算是我們的前輩學者。我記得 1988 年 8 月 9 日那一晚，數學史家相約到李國偉教授下榻的房間聊天，多虧王渝生的照相機，我們總共有十三人一起合影，除了包括前述四位學者之外，再加上李國偉、馬若安 (Jean-Claude Martzloff)、羅見今、戴念祖、李兆華、劉鈍、王渝生、傅大為，以及我本人。當晚，我們天南地北，無所不談，留下了非常美好的回憶。

由於我當時剛剛成為博士候選人，正準備返台撰寫有關李善蘭的博士論文，所以，難免行色匆匆，也無法向李迪教授多方請教。不過，當他知道我以李善蘭為主題時，即慨然答應提供他的圖書珍藏。此一提攜後進的風範，甚至惠及我的研究生陳鳳珠，她在撰寫有關駱騰鳳的碩士論文時，曾經獲贈駱騰鳳的罕見文本。對於後生晚輩，李迪教授總是呵護備至，甚至他還會積極地利用人脈，關照學生到國外留學。譬如說吧，當業師道本周 (Joseph Dauben) 與我聯袂參加 1992 年在香山舉行的『李儼、錢寶琮一百週年誕辰國際學術研討會』時，有一天早餐時間，李迪教授要我為他翻譯，請求道本老師幫忙徐義保申請獎學金，以便有機會到紐約城市大學攻讀科學史博士。

我後來在幾次國際學術研討會場合，再度與李迪教授相會時，他總是一再邀請我到內蒙古訪問，然後，好好地到他的書房看書，我終究沒在他生前到他的書房朝聖，實在是千古憾事！我最近與他會面，應該是在 2001 年 3 月下旬，李迪教授應邀來台參加由淡江大學主辦的『世界華人科學史學術研討會』時，我順便邀請他到本系訪問。3 月 28 日當天，陪

他前來的學者還有江曉原教授、韓琦教授、李國偉教授，以及孫文先夫婦。我分別邀請李迪教授以〈中國傳統筆算之研究〉爲題，江曉原教授以〈天文學與歷史年代學〉爲題發表演講。此外，他們還參加我的『數學文本討論班』，與我的研究生座談，讓年輕學者受益良多。記得當晚，我特別邀請李迪教授與我的研究生聚餐，我們饗以台灣庶民招牌美食薑母鴨，想必留給他深刻的印象才是。

我與李迪教授經常通信，第一封應該是 1988 年 9 月。最後一次接到李迪教授來信，應該是 2006 年 8 月上旬。我原來邀請他與郭世榮教授翁婿兩人一起前來，參加我主辦的『《筭數書》及相關簡牘國際研討會』(2006 年 8 月 23-25 日)。結果，他來函通知他不克前來，並附寄一篇他的舊稿〈關於竹簡“算術書”的若干問題〉。同時，他也附錄了一個備註，題爲〈《算數書》是一部值得研究的數學著作〉。爲了緬懷他這一代學人風範，我特別引述這一篇文字如下：

> 《算數書》的釋文發表于《文物》2000 年 9 月。那時我正在河北淶水籌備『紀念祖沖之逝世 1500 週年會議』，身邊什資料也未帶，但是心中一直琢磨著為祝賀我的日本朋友橫地清教授喜壽寫點東西。恰在此時，郭書春教授帶來了《算數書》。我便研究起《算數書》釋文，冥思苦想，湊成了〈關於竹簡“算術書”的若干問題〉一文，雖然不是精心之作，但我認為絕對是新的，把它奉獻給朋友，作為祝壽朋友的生日賀禮是合適的。于是寄給了橫地清先生，全文刊登在橫地清先生喜壽《紀念志》中(2000 年 12 月 3 日)，也可能是《算數書》全文和與之相伴的彭浩先生的論文發表之後的第一篇論文。
>
> 這篇文章自然平淡，沒有什麼高明見解，只是把問題面面俱到的介紹了一遍。僅僅在文末申明了我自己的幾個觀點，主要有：
>
> 第一、《算數書》不是突然出現的著作，而是長期累積起來的零散竹簡，逐漸積存起來整理而成的。這一點十分重要，我想大概是各國、各地區早期的普遍現象。
>
> 第二、對歷史遺留下的零散數學竹簡是何人收攏在一起的？我在文章中可出可能是張蒼。按：張蒼在秦代就是管理竹簡的，他又把所整理的竹簡保存到漢初。另一方面，張蒼是當時水平最高的數學家，有能力完成這一工作，特別是有這個條件，因為數學竹簡就在他手中。
>
> 過去我曾冒昧地說張家山漢墓的墓主是張蒼，有人真誠的提出批評，本人熱心接受，已經解決。現在要研究的問題是墓主人的那些陪葬物是怎麼來的？《算數書》怎麼就落到這裡。不能不考慮。
>
> 現在，洪萬生教授主持《算數書》研究國際會議，我年齡大了，無法親往參加，十分遺憾。我願意把幾年前的陳舊文章獻給大家，請大家批評指正。我也高興和大家共同進行討論，誰對誰錯沒有關係，主要是要把問題弄清楚。

李迪教授爲人謙沖篤實，爲學兼容並蓄，一生兢兢業業，在中國西北疆建立了一個科學史的研究重鎮。王渝生教授曾戲稱他是一位『西霸天』，我的看法則完全不同！李迪教授所成就者絕非學術霸業，而是處在困阨的時代，在匱乏的環境中，他以驚人的毅力，簡約樸實地走出永不磨滅的腳印，供後人景仰與追隨。

李先生，我們永遠懷念您！

從課程看回融入數學史[1]

香港中文大學課程與教學學系 黃毅英教授

在香港以至世界各地，提出在數學教學過程當中引入數學史已經有相當長的時間。引入數學史的利益亦已有清楚的闡明。例如，Fauvel便綜合了下面幾個引入數學史的理由：[2]引發學習動機、爲數學平添「人情味」、瞭解數學思想發展過程、對數學整體有較全面的看法和認識、滲透多元文化觀點、和提供進一步探索的機會和素材。[3]

在香港，亦有老師在這方面作出努力[4]和相關研究。[5]其實筆者執起教鞭之初，並沒有特別注意引入數學史，但教學一路下來，就發覺數學史在不少處境下均能協助教學。當然筆者不是說數學史是唯一的萬應靈丹，但在處理不同的教學問題時，其解決可像都指向數學史這方面來。

例如當面對一些「差生」時，我們若細心分析，其實不少「差生」並非學習遲緩，而是缺乏學習動力，數學歷史故事往往能吸引其學習興趣。此外，不少所謂「差生」反映，他們希望老師講解「公式」的來龍去脈：就是「公式」是從哪兒來的，又會怎樣應用到其他問題上，他們指出這會讓他們更爲明白[6]。數學史當然在這一點能大派用場。

反過來，筆者遇過一些數學學得好的學生，甚至對數學有一份熱情的學生，他們往往只會做大量的複雜數題（又或提早做高等數學的練習）。當然數學問題解決不失爲提高數學能力的一種有效手段，但他們亦應擴濶他們的視野。數學史在此亦大有可爲。在這個環節中，「數學史」不局限於歷史故事，亦包括數學的實質。例如筆者大學一年級數學研習班時，教授給我一份關於 Bernoulli 數的材料要我報告。Bernoulli 數（甚至 Bernoulli 家族本身）及 $\sum_{r=1}^{n} r^p$ 就有一段豐富的歷史。這便是「常規學習」以外的額外學習材料。

又或者我們有時感到教學有點枯棣乏味，數學史及相關的故事自然能提供極豐富的教學素材。例如從「玄武門之變」談到幻方，[7]這些例子不可勝數，甚至掂拾即是，這是小故事都能豐富教學的話題。

我們又常會被學生問到一些不易解答的問題，例如何以要有負數、何以要有複數（和這般的定義複數）、[8]零是否自然數、[9]一周角何以有 360°、何以要如此定義三角比……從歷

---

[1] 本文得李栢良先生提供不少有用意見。謹此致謝。
[2] Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.
[3] 又見蕭文強（1992）。數學史和數學教育：個人的經驗和看法。《數學傳播》第 16 卷第 3 期，23-29。
[4] 梁子傑（2005）。數學史：頭盤？主菜？甜品？載黃毅英（編）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》頁 411-417。香港：香港數學教育學會；列志佳（2005）。融入數學史於數學教學中：個人經驗上的整理。載黃毅英（編）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育—蕭文強教授榮休文集》頁 441-446。香港：香港數學教育學會。
[5] Lit, C.K., M.K. Siu, & Wong, N.Y. (2001). The Use of History in the Teaching of Mathematics: Theory, Practice, and Evaluation of Effectiveness. *Education Journal, 29*(1), 17-31.
[6] Wong, N.Y., Lam C.C., Wong, K.M.P., Leung, F.K.S., Mok, I.A.C. (2001). Students; views of mathematics learning: A cross-sectional survey in Hong Kong. Education Journal, 29(2), 37-59.
[7] 甚至先問學生玄武門是東門、南門、西門還是北門來打開話匣：中國人稱左青龍，右白虎；前朱雀，後玄武。宮殿坐北向南，玄武門乃爲此門，這就是河圖洛書（內含幻方）所說的。
[8] Fung, C.I., Siu, M.K., Wong, K.M., & Wong, N.Y. (1998). A dialogue on the teaching of complex numbers and beyond. *Mathematics Teaching, 164*, 26-31.

史的脈絡切入，這些問題就清楚不過了。

此外，有些老師在擬題時常出現一些爭議，當中涉及數學概念式名詞的釐清，如 (2 − x) 是不是 (2 − x)(x + 3) 和 $x^2 - 4$ 的最大公因式、0.999= 1 嗎、何以三角形叫三角形四邊形又不叫四角形等等，數學歷史亦提供了清楚的理據。[10]

數學過往及當前與其他學科之關係（包括了物理學、天文學能如何引發一些數學研究和數學如何能反過來應用到這些領域來），在在體現這個新的課程的「連繫」（連結 connection）要求。[11]

數學史對課程的編排肯定起着指導性的作用，這些課程編排包括整體的課程設計，也包括（微觀的）教程（例如教學單元）安排。首先，我們從數學發展的歷史過程中就可對教學上之先後次序有所參考。其次，從數學史中，我們可預測一些學習難點，就如蕭文強說，在人類歷史上花上數千年才能發展起來的東西，學起來肯定不會一蹴而就。[12]此外，我們對於一些概念出現的原委（例如何以極限會有如此這麼「怪」的一個定義），看看數學的發展，就會一清二楚。故此，把數學史引進數學教學本來就是自然而然的事。[13]

新的香港中學數學課程正式提出了要在數學過程中引入數學史，[14]我們不必問哪些數學史可放在教學中，我們實在可以倒過來勘察課程本身，就不難看到每個課題均可連繫到一些數學史內容，而這些數學史實實在在並非畫蛇添足，而是對教學及教師本身的自我裝備都有所幫助。例如梁子傑一文已舉出了不少實例。[15]以下筆者嘗試以初中（第三學習階段中一至中三）為例，稍為列舉一些與數學史之連繫點。當然課程與數學史之關連絕不只這些，這只是略舉一隅罷了！

4.3 第三學習階段的學習重點[16]

4.3.1 數與代數範疇

學習單位	歷史探索
有向數及數線	• 負數發明的歷史及數系的擴展 • 負負得正的數學原因

---

[9] 黃毅英（2005）。自然數的歷史。《朗文教育專訊》8 期，6-9。；黃毅英（2005）。從教學上的考慮「0」。《朗文教育專訊》8 期，10-11。

[10] 黃毅英（2006）。「老師，用『A簿』還是用『B簿』？」。《數學教育》23 期，27-36。

[11] House, P.A. (1995). (Ed.). *Connecting mathematics across the curriculum: The 1995 NCTM Yearbook*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

[12] 蕭文強（1976）。數學發展史給我們的啓發。《抖擻雙月刊》17 期, 46-53.

[13] 黃毅英（2004）。把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？《數學教育期刊》(Datum)41 期，7-15。後載HPM通訊第八卷第十期 (10/2005)，1-9。

[14] 課程發展議會（1999）。《中學課程綱要──數學科（中一至中五）》。香港：教育署。

[15] 梁子傑（2002）。運用數學史教授數學的一些經驗分享。載鄧佩玉、王倩婷、黃家鳴（編）。《「香港數學教育會議 - 02」論文集》（頁 34-36）。香港：香港數學教育學會。[http://staff.ccss.edu.hk/jckleung/jiao_xue/hkmed2002.html]

[16] 此處序號悉按香港教育署所出版的《中學課程綱要──數學科（中一至中五）》。

數值估算	• 古代各種關於估算的故事 • 中外 π 的計算 • 計算工具（Napier bone 等）之歷史
近似與誤差	• 科學記數法的出現 • 各種常用數學符號的歷史
有理數及無理數	• 數學擴展的過程 • 第一次數學危機 • 「無理數」一詞的來源
百分法	• 百分法符號，埃及分數
續百分法	
率及比	• 古希臘中率及比之討論
以代數語言建立問題	• 「代數」及「algebra」名詞來源 • 代數在中外的發展 • 古算題欣賞（丟番圖之墓誌銘, 雞兔同籠……）
簡易多項式的運算	
整數指數律	• 指數定義的擴展 • a^b 當 a 是負數時又如何 • 古代不同進數
簡易多項式的因式分解	
一元一次方程	• 「方程」一詞的由來
二元一次方程	
恒等式	• 著名恒等式
公式	• 著名公式（Ramanujan 的一些奇特的公式）
一元一次不等式	

4.3.2 度量、圖形與空間範疇

量度方面的估計	• 古代的量度工具 • 量度單位的演變 • 度量衡三個字的意義
面積和體積的簡單概念	• 圓形面積的計算的故事
續面積和體積	• 錐體體積何以爲柱體體積之 1/3？ • 祖沖之與球體體積及祖相互原理 • 亞基米得球體與圓柱的關係 • 能不用微積分計算體積嗎？
幾何簡介	• 中國古代幾何 • 中國古代測量，《海島算經》，出入相補 • 墨子，魯班，規矩（伏羲與女媧），準繩 • 關於柏拉圖立體的故事，柏拉圖立體與地心說，金木水火土星 • 歐拉公式。利用歐拉公式證明只有 5 個柏拉圖立體 • 日常生活中（建築等）所見的阿基米德立體

變換及對稱	• 阿拉伯幾何圖案 • 剪紙，窗花等對稱圖案 • 文藝復興油畫及建築 • Escher 名畫欣賞
全等及相似	• 尺規以外的作圖（例如只用界尺或書本） • 幾何三大問題的故事 • 黃金分割
與線及直線圖形有關的角	• 何以周角 $=360^{o}$？ • 高斯與 17 邊形
續立體圖形	
演繹幾何簡介	
畢氏定理	• 中外勾股定理 • 埃及人利用畢氏定理逆定理的故事 • 利用畢氏定理與外星人溝通?
四邊形	
坐標簡介	• 坐標幾何的歷史
直線的坐標幾何	
三角比和三角的應用	• 三角學的歷史 • 中國古代測量，《海島算經》，出入相補

4.3.3 數據處理範疇

統計工作的各個步驟簡介	• 英國和古羅馬的統計工作 • 舊約聖經中有關人口統計的事件及發展，《聖經‧民數記》
簡單圖表及圖像的製作及闡釋	
集中趨勢的量度	
概率的簡單概念	• 概率的歷史故事

然這個「清單」並非窮盡（如果你接受數學就是數學史本身，這個清單根本無法窮盡），我們只是希望做一個例子。老師們也許配合自己的實際教學，逐漸擴充這個清單而形成「個人化」的數學課題與數學史的聯繫。無論如何，把數學史融入教學不會很難了！

現時透過互聯網（或稱網際網路）中之搜尋器或網上數學詞典，不少資料不難獲得，至於各參考書也可謂不勝枚舉。近年有關歷史的「數普」書籍亦琳瑯滿目，現舉出一些，也許對還未接觸數學史的老師有所參考。

※ HPM 通訊、網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm

※ 列志佳、簡珮華、黃家鳴（編）（2000）。《數學的故事》。台北：九章出版社。

※ Bell, E.T. (1937). Men of mathematics. New York: Simon & Schuster.【中譯】《大數學家》，井竹君等譯（1998）。台北：九章出版社。【九章出版社各有關圖書見其網址：http://www.chiuchang.org.tw】

※ 李學數（1978-99）。《數學和數學家的故事》（1-8）。 香港：廣角鏡出版社。

※ 洪萬生（2006）《此零非彼 0：數學、文化、歷史與教育文集》。臺北：臺灣商務印書館。
※ 蕭文強（1978）。《爲甚麼要學習數學？—數學發展史給我們的啓發》。香港：香港新一代文化協會。
※ 蕭文強主講（1999)。數學史與數學教學住宿工作坊。香港：香港科技大學教育發展組及香港教育署數學組。
※ 呂紅（編）（2002）。《數學小叢書》。北京：科學出版社。【繁體字版】香港：智能教育出版社（2000）。
※ 梁宗巨（1992）。《數學歷史典故》。瀋陽：遼寧教育出版社。
※ 劉鈍（1993）。《大哉言數》。瀋陽：遼寧教育出版社。
※ 李儼、杜石然（1963）。《中國古代數學簡史》。北京：中華書局。
※ 天下文化數學天地系列
※ 益智工房數學學習領域系列
※ 超時空數學（李毓珮）新雅出版社
※ 好玩的數學（科學出版社）

1. **爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：**陳昭蓉** (東京 Boston Consulting Group)、**李佳嬅**（東京大學）
台北市：**楊淑芬**（松山高中）**杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍**（成功高中）**蘇俊鴻**（北一女中）**陳啓文**（中山女高）**蘇惠玉**（西松高中）**蕭文俊**（中崙高中）**郭慶章**（建國中學）**李秀卿**（景美女中）**王錫熙**（三民國中）**謝佩珍、葉和文**（百齡高中）**彭良禎**（麗山高中）**邱靜如**（實踐國中）**郭守德**（大安高工）**林裕意**（開平中學）**林壽福** (興雅國中)、**傅聖國**（健康國小）
台北縣：**顏志成**（新莊高中）**陳鳳珠**（中正國中）**黃清揚**（福和國中）**董芳成**（海山高中）**林旻志**（錦和中學）**孫梅茵**（海山高工）**周宗奎**（清水中學）**莊嘉玲**（林口高中）**王鼎勳、吳建任**（樹林中學）**陳玉芬**（明德高中）**楊瓊茹** (及人中學)、**羅春暉** (二重國小)
宜蘭縣：**陳敏皓**（蘭陽女中）**吳秉鴻**（國華國中）**林肯輝**（羅東國中）
桃園縣：**許雪珍**（陽明高中）**王文珮**（青溪國中）**陳威南**（平鎮中學）**洪宜亭**（內壢高中）**鐘啓哲**（武漢國中）**徐梅芳**（新坡國中）、**郭志輝**（內壢高中）、**程和欽** (永豐高中)、**鍾秀瓏**（東安國中）
新竹縣：**洪誌陽、李俊坤、葉吉海**（新竹高中）**陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷**（竹北高中）、**洪正川**（新竹高商）
苗栗縣：**廖淑芳** (照南國中)
台中縣：**洪秀敏**（豐原高中）**楊淑玲**（神岡國中）
台中市：**阮錫琦**（西苑高中）**歐士福**（五權國中）
嘉義市：**謝三寶**（嘉義高工）
台南縣：**李建宗**（北門高工）
高雄市：**廖惠儀**（大仁國中）
屏東縣：**陳冠良**（枋寮高中）
金門：**楊玉星**（金城中學）**張復凱**（金門高中）
馬祖：**王連發**（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。

理性與神秘交織的『笛卡兒』

台師大數學系 洪萬生教授

按：本文是我為阿米爾・艾克塞爾 (Amir D. Aczel) 的《笛卡兒的秘密手記》(台北：商周出版社，2007）中譯本所撰寫的推薦序。

無論數學史或科學史如何敘事，笛卡兒 (1596-1650) 無疑是十七世紀人類理性展現的典範！如此說來，爲什麼本書作者 Amir A. Aczel 企圖探索他與神秘主義 (mysticism) 的關係呢？

我最初認識笛卡兒，本來就是再『理性』不過的事。首先，他與費馬 (Pierre de Fermat, 1601-1665) 彼此獨立地發明了『座標系統』以連結幾何與代數，而開啓了今日高中學生所熟悉的解析幾何學。然後，在論述近代科學 (modern science) 的興起一類的科學史著作中，我還進一步發現他的重要性經常與英國的培根 (Francis Bacon, 1561-1626) 並列，他們兩人都爲科學革命 (scientific Revolution) 提供了新的思想架構與研究進路。

這個全新的思想架構，就是所謂的『機械（論自然）哲學』(mechanical philosophy)。其中，笛卡兒主張心物二元論 (dualism)，將實在 (reality) 嚴格區分爲精神與物質兩種實體。此一結論應該源自他有關肉體功能之研究，譬如他發現動物並不擁有推理力與思考力，因此，動物只不過是缺乏智力與靈魂的機械，從而肉體 (body) 與靈魂 (soul) 各自存在，而這當然與文藝復興時期的靈肉一體之主張，徹底決裂了。科學史家 Richard Westfall 說得好：笛卡兒「從物質本性剔除精神的每一絲痕跡，留下一片由惰性的物質碎片雜亂堆積而成、沒有生命的疆域。這是一個蒼白得出奇的自然概念－但是令人讚嘆的是，它卻是爲近代科學的目的而設計。」

事實上，笛卡兒所以發現靈肉之別，應該是基於『我思故我在』這個真理。他說：「我知道，我能設想『我』沒有肉體，也能設想沒有宇宙存在，連『我』處身的地方都不存在，可是，我不能同樣設想『我』自己不存在；相反地，正因爲我思想懷疑別的事物之真實性，很明顯地，很確實地結論了『我』的存在。」而「這個我，即靈魂，是我之所以爲我的理由。他和肉體完全不同，也比肉體更易認識，而且，假使肉體不存在了，仍然不停止他本來的存在。」

同樣地，基於『我思故我在』，笛卡兒也推得『明顯』與『清晰』是任一命題所以爲真的標準。他注意到：「在『我思故我在』中，無物可以保證我說了真理，只不過是我很『明顯』地看出，思維必須存在。我遂認爲我可以以此作爲總則，凡我們很明顯地、很『清晰』地對它有觀念之物，皆真實不誤。」顯然，笛卡兒通過系統的質疑，對每一種思想進行嚴格的檢驗，只要稍有不可靠之處，即加以排斥，直到獲得命題爲止，這樣得出的命題，當然就不能再懷疑了。於是，在這樣的確定性基礎上，笛卡兒重建了一個僅僅依賴理性所建立的知識典範，爲科學革命世紀提供了一個全新的哲學架構。說得明確一點，正如亞里斯多德的形上學，爲他自己的宇宙論與物理學提供一個思想框架，笛卡兒的機械哲學也爲他自己的科學研究乃至於牛頓物理學的偉大綜合，貢獻了一個不可或缺的思想憑藉。

上述這些，都出自笛卡兒的《方法導論》。其實，該書題名還包括「正確地引導理性

並在科學中尋求真理」。這也解釋了此書三篇附錄《折射光學》、《氣象學》與《幾何學》之目的，因爲笛卡兒利用它們展現了一般性思維之力量。以《幾何學》爲例，笛卡兒所以引進座標概念，是他希望我們在代數與幾何結合的基礎上，得以擺脫幾何圖形的束縛，並發揮代數符號的一般性 (generality) 力量。他認爲「古代幾何與近代的代數，除了限於談論一些很抽象的問題外，似乎沒有什麼用處，前者常逼你觀察圖形，你若不絞盡腦汁，就不能活用理解力；後者使你限於一些規則與符號的約束之中，甚至將它弄成混淆含糊不清的一種技藝，不但不是一種陶冶精神的科學，反而困擾科學。」基於此，他所提出來的數學方法，就是想要達成下列兩方面的目的：(1) 通過代數的運算過程（步驟），將幾何從圖形的限制解放出來；(2) 經由幾何的解釋，賦予代數的操作運算意義。於是，代數與幾何從此可以合成一體的解析幾何，緊接著微積分相繼問世，數學的發展也就一日千里了。

不過，誠如 Amir D. Aczel 所指出，笛卡兒不僅可能曾經參加一個秘密團體『薔薇十字會』，他的的《方法導論》也一再地出現與『神秘』有關的主題。在該書中，他還提及已經爲某一個問題找到重要的『解決方法』。至於這個問題，就記錄在他的秘密手記之中。然則這一份總共有十六頁、由神秘的符號所構成的洋皮紙手稿，究竟有什麼驚人的發現，以致於笛卡兒終其一生不敢公諸於世呢？

這一個謎底直到本書倒數第二章（第二十一章），作者 Aczel 才爲我們揭露。原來笛卡兒所發現的，就是用以刻畫多面體的頂點數 (v)、稜線數 (e) 與面數 (f)之關係的『尤拉公式』(Euler's formula)：$v+f-e=2$。由於利用此一公式，吾人極易證明只有五種柏拉圖多面體 (Platonic solid) 存在，而這五個正多面體，則與克卜勒 (Johannes Kepler, 1571-1630) 的宇宙模型直接相關。後者的宇宙論當然基於哥白尼學說，因此，笛卡兒若公布此一手稿，則可能被認定支持哥白尼學說，而遭遇如同伽利略一樣的宗教審判。我們不要忘了他臨時抽回《世界體系》之出版成命，此一恐懼陰影永遠如影隨形。儘管如此，Aczel 還是認爲笛卡兒的『謎樣死亡』與此有關。

總之，這是一本相當引人入勝的笛卡兒傳記！在高舉『理性』大旗的同時，作者 Aczel 運用了極成功的敘事手法，讓我們見識到笛卡兒知識活動的『神秘』面向。這種對比，不僅交織了笛卡兒一生的哀愁行旅，也見證了近代科學『理性』的複雜風貌。相對地，我在前文中絮絮叨叨地轉述了笛卡兒的機械哲學，彷彿複製了本書的手法，非要『賣關子』到底不可！不過，讀者大可跳過，好好欣賞本書的故事情節就行了。其實，本書的數學知識之實質內容，幾乎已經減到非常輕薄的程度，因此，作者的貼心『普及』考量，當然不在話下。儘管如此，有鑑於『柏拉圖』的重要性，我還是建議讀者培養一點好心情，細心研讀本書第十五章的所謂『提洛謎題』，如此，讀者或可體會柏拉圖數學哲學的源遠流長了。

中世紀歐洲$\sqrt{2}$計算比賽

宜蘭蘭陽女中 陳敏晧老師

十一、二世紀是歐洲學術的復甦時期，學者經過一段長達千年的沈寂時期之後，開始又對學術的討論產生濃厚的興趣。其中有一段數學史插曲值得提出，那是大約在 1150 年左右，有兩位天主教學者瑞吉波得 (Ragimbold of Cologne) 與萊德夫 (Radolf of Liège) 相互通信，討論$\sqrt{2}$的數學意義。

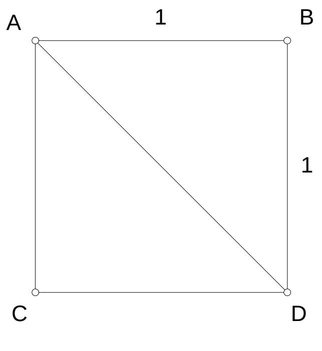
一開始由瑞吉波得提出一連串的數學問題，同時，此一問題答案除了兩位相互通訊者知曉外，也在數學學術圈中流傳開來，而且，這些數學問題被視爲一種科學競賽 (scientific tournament)。可惜，由於缺乏希臘數學或阿拉伯數學知識，他們的幾何知識都是片片斷斷的，更遑論幾何演示的概念了。因此，我們就很容易理解他們的計算何以出現下列謬誤了。

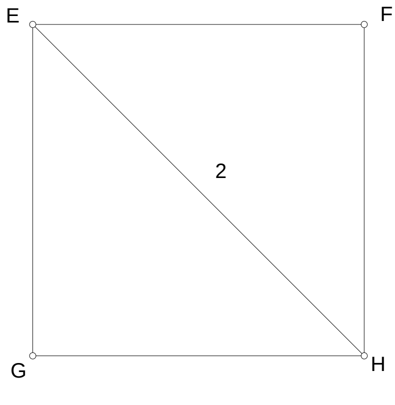
羅馬數學家波埃修（Boethius, 480-524）曾經評論亞里斯多德（Aristotle, 384 B.C.-322 B.C.）的《範疇論》(*Categories*)，從而延伸出一個的數學問題。針對這個問題，萊德夫問瑞吉波得：

請計算一個正方形的邊長？此正方形是另一正方形面積的兩倍時。

（參考如下圖）雖然他們兩位都知道大正方形邊長，等於原來小正方形對角線長，但是，他們兩位所計算出的邊長比卻不相等：瑞吉波得是$\frac{17}{12}$、萊德夫是$\frac{7}{5}$。顯然，他們兩位都沒有確切掌握住「不可公度量」的意義。

如果今日國中數學老師沒有仔細與學生討論$\sqrt{2}$的真正涵義，那麼，殷鑑似乎就不遠了。





參考文獻

Burkholder, Pete (1994). “*Speculum geometricae undecimo saeculo*: The Mathematical Correspondence of Ragimbold of Cologne and Radulf of Liège, ca. 1025,” *History of Science & Technology (HOST) Bulletin* (Spring)

Grant, Edward (1977). “The Beginning of the Beginning and the Age of Translation 1000A.D. to 1200A.D”, *Physical Science in the Middle Ages*, Cambridge University Press.

論證平行設準與三角形設準的等價性

台師大數學系碩士班研究生　李建勳

前言

2006 年秋季在台灣師範大學數學系，洪萬生教授開授大學部「數學史」課程中。筆者有幸參與，於每個星期二下午 3:00-5:00 前往旁聽。猶記某堂課洪老師帶領著大家研讀著 *The Historical Roots of Elementary Mathematics* 一書，對於《幾何原本》卷 I 的內容，作者有相當精闢的見解。當時，洪老師提起了自古以來在卷 I 中最引起爭議的「平行設準」（即書中的「第五設準」）：

如果一條直線與另外兩條直線相交，使得同一側的內角和小於兩直角和，則兩直線在這一側不間斷地延長下去就會相交。

上述繁雜的論述方式，相較於前四個精簡的「設準」(postulates)，實顯突兀，因此歷史上不知有多少數學家想嘗試利用前四個設準和「共有概念」(common notions，也可翻譯成「公理」)，並綜合命題 I.1（代表卷一第一命題，下同）到 I.28 來證明「平行設準」成立，此乃因卷 I 前 28 個命題無一使用到「平行設準」，因此，可拿來當成已知條件的一部份，試著將「平行設準」「去公設化」。但事實上，「非歐幾何」的崛起告訴我們已知其不可行。

在研讀完 *The Historical Roots of Elementary Mathematics* 第六章 “Euclid” 內容後，我們可以理解「平行設準」與底下的 “Proclus' axiom” （書中以「命題 A」稱之）等價：

若一直線與兩平行線之一相交，它一定也會與另外一條線相交。

在此論證此一等價性的過程，書中作者乃透過其自命的「命題 B」：

過一給定直線外的一點，無法作出超過一條以上的平行線。

而完成。其實，過給定直線外的一點，利用尺規求作一條直線與原直線平行是可行的（容後細稟），因此配合上述的「命題 B」，我們便可得到底下的 “Playfair's Postulate”：

由一個不在直線上的點只能作出一條平行於該線的直線。

因此，我們可知這些命題均與「平行設準」等價，其實世人對於《幾何原本》中的「平行設準」不若上述提及的 “Playfair's Postulate” 來得熟悉，而我們現在提及「平行設準」這名詞，也幾乎都指涉後者。

在該堂課程結束後，洪老師給了大學部的學弟妹們一個回家作業，要大家在《幾何原本》所安排的脈絡下，去核證 “Playfair's Postulate” 與「三角形三內角和恆等於兩直角」兩命題等價（為了稱呼上的方便，筆者在以下文脈中皆將後者以「三角形設準」稱之）。筆者身為洪老師的弟子，後來便代老師初步審閱這些學生回繳的作業，在一邊檢閱的過程中，透過腦中不斷辯正，倒也令自己的思緒更加清晰，積累出整個證明的輪廓。因此，這篇文章的重點，主要是想跟大家分享筆者的證明方法。

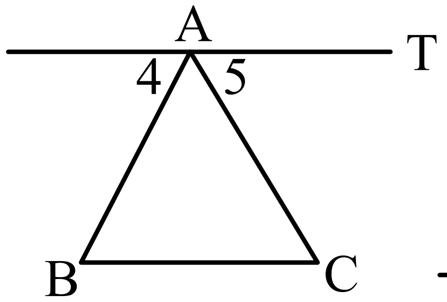
證明

筆者先試著論證較為簡單的部份，即以 “Playfair's Postulate” 為已知來核證「三角形設準」：

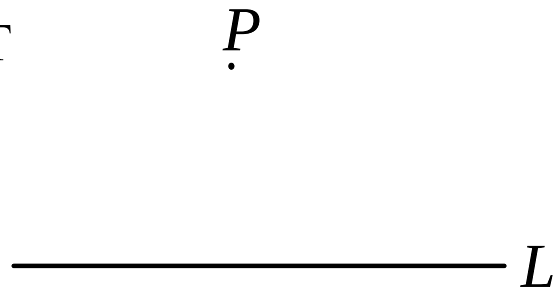
首先，任給一個三角形 ABC，如圖一所示，利用已知，我們可以過 A 求作一直線 T 與直線 BC 平行，因此利用命題 I.29 便可得 $\angle 4=\angle B$且$\angle 5=\angle C$ ，故

$$\angle A+\angle 4+\angle 5=\angle A+\angle B+\angle C$$（利用共有概念 II 的等量加法）

再利用命題 I.13 可得 $\angle A+\angle 4+\angle 5$ 等於兩直角，故 $\angle A+\angle B+\angle C$ 等同於兩直角，即得證「三角形設準」。



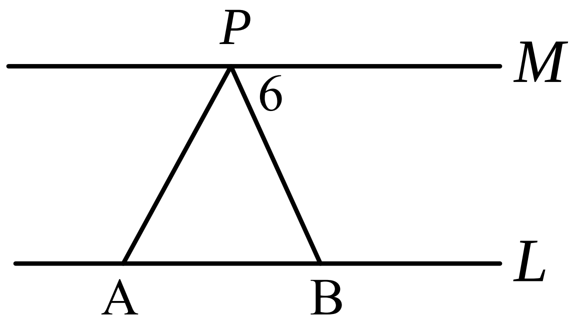
圖一



圖二

接著，筆者將論證上述的逆命題，即以「三角形設準」爲已知來核證 “Playfair's Postulate”，如圖二，給定一直線 L 及 L 外一點 P，試證明過 P 恰有一直線 M 與 L 平行。

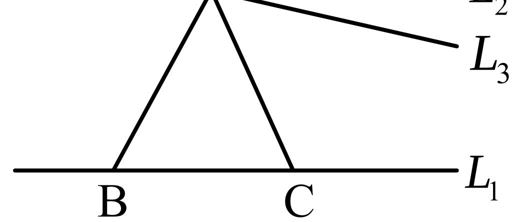
首先，我們先來利用尺規求作此直線 M。在直線 L 上任取兩相異點 A,B，並連接 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ ，如圖三，過 P 作一直線 M，使得 $\angle 6=\angle PBA$ ，此時利用命題 I.28 即可得直線 M 與 L 平行，由此便申明了其「存在性」。



圖三

接著我們將著手證明直線 M 的「唯一性」，在正式進行論證之前，筆者先引入其中一個大學部學生有瑕疵的證法，並說明瑕疵爲何，讓大家能更明白整個唯一性證明的困難之處，且藉此更加了解一般人常犯的錯誤，該位學生證明過程如下：

如右圖，令 $L_1 // L_2$ 且 $L_1 // L_3 \Rightarrow L_2 // L_3$
又 L_2 和 L_3 同過 P 點，
所以 L_2 和 L_3 是重合關係，
即 L_2 與 L_3 是同一條直線，
得過線 L_1 外一點 P，
只能作為一一條平行的線。



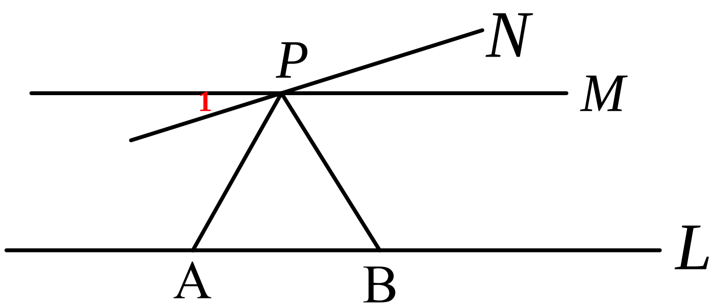
上述證明所犯的最大錯誤，乃是引用了命題 I.30：

平行於同一直線的兩平行線彼此亦互相平行。

而命題 I.30 在《幾何原本》所安排的脈絡下引用了命題 I.29，後者此乃筆者認爲卷一中最令人印象深刻的一個命題，因爲這是歐幾里得第一次在《幾何原本》的命題中援用了「平行設準」來進行論證，而「平行設準」又與待證的 “Playfair's Postulate” 等價，因此，該位學生犯了「倒果爲因」的「循環錯誤」。

然則我們究竟能夠引用的性質有哪些呢？事實上，除了已知的「三角形設準」命題外，我們尚能利用 I.1 到 I.28 這 28 個命題與前四個設準，這就是我們所能用的全部「配備」。

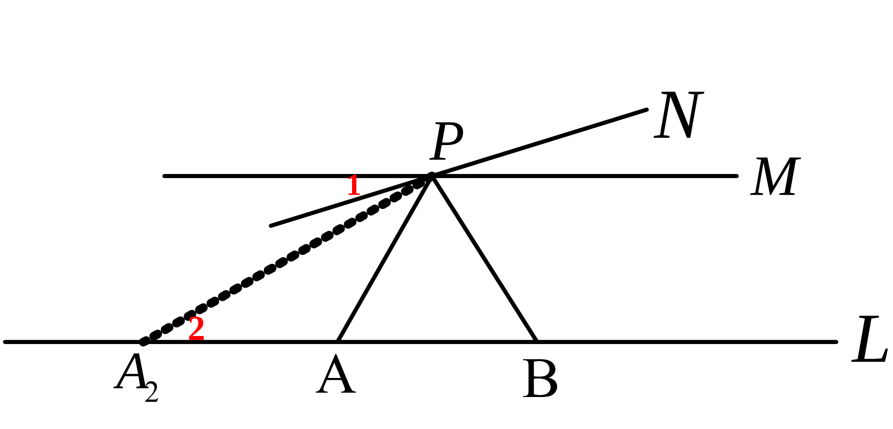
對於「唯一性」，筆者接下來將試著與讀者分享個人的證法。如圖四，利用反證法，設過 P 存在另一直線 N 亦平行 L 且 N 與 M 不重合，筆者的個人想法乃由於「平行設準」無用武之地，亦即當兩平行線平行時，唯一能夠引用的性質只有「不間斷延伸下去而不相交」（定義 23），幾乎是「有等於無」，若寄託於直觀，或許有人會覺得直線 N 與直線 L 明顯不平行，亦即兩直線相交可「一眼看穿」，隨即完成「反證」的「矛盾目標」。但若數學論證需仰賴「幾何直觀」來進行，那將難以達到欲「嚴密化」的目標，也因此，如果我們要說直線 N 與 L 相交，則勢必得證明其交點的「存在性」。



圖四

爲此，我們的目標在於希望可以在 L 上找一點 C，使得 $\angle PCA = \angle 1$。如此一來即可得直線 N 與直線 L 相交於此點 C，隨即得到直線 N 不平行 L 的「矛盾性質」。

如圖五，若 $\angle PAB > \angle 1$，則在 L 上取一點 A_2，使得 $\overline{AA_2} = \overline{AP}$。

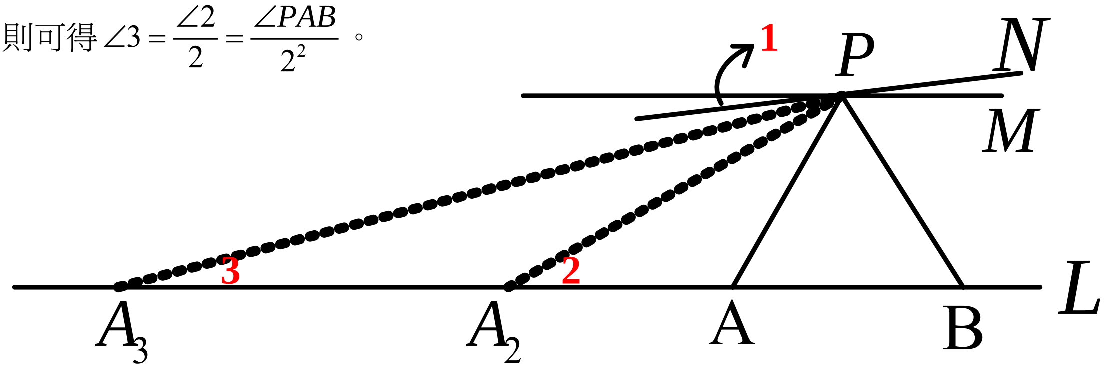


圖五

連接$\overline{A_2P}$，此時可得$\angle 2=\dfrac{\angle PAB}{2}$。

若$\angle 2>\angle 1$，則如圖六，在 L 上繼續選取A_3，使$\overline{A_2A_3}=\overline{PA_2}$，連接$\overline{A_3P}$，

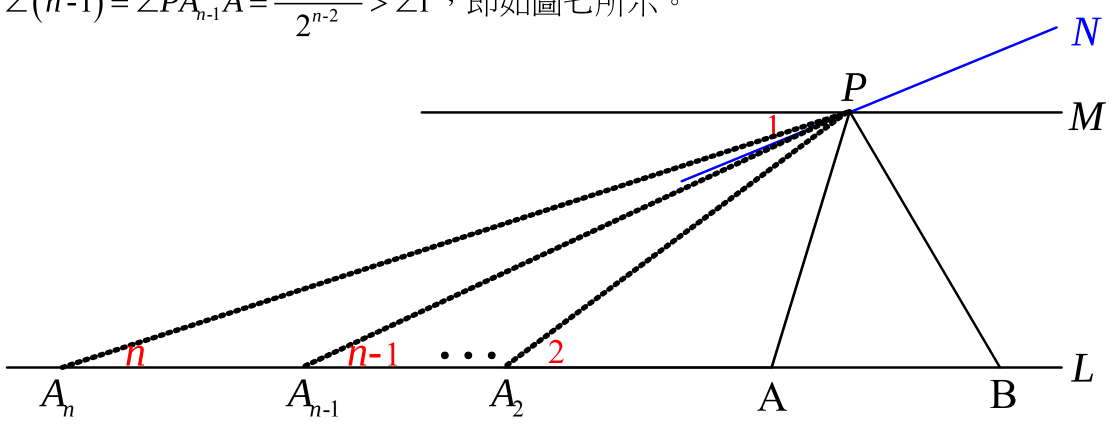
則可得$\angle 3=\dfrac{\angle 2}{2}=\dfrac{\angle PAB}{2^2}$。



圖六

如此繼續將角二分下去，若能得到一點A_k，使得$\angle PA_kA=\angle 1$，則A_k即爲我們在尋找的交點 C。若不然，則必存在一點A_n，使得$\angle n=\angle PA_nA=\dfrac{\angle PAB}{2^{n-1}}<\angle 1$且

$\angle(n-1)=\angle PA_{n-1}A=\dfrac{\angle PAB}{2^{n-2}}>\angle 1$，即如圖七所示。

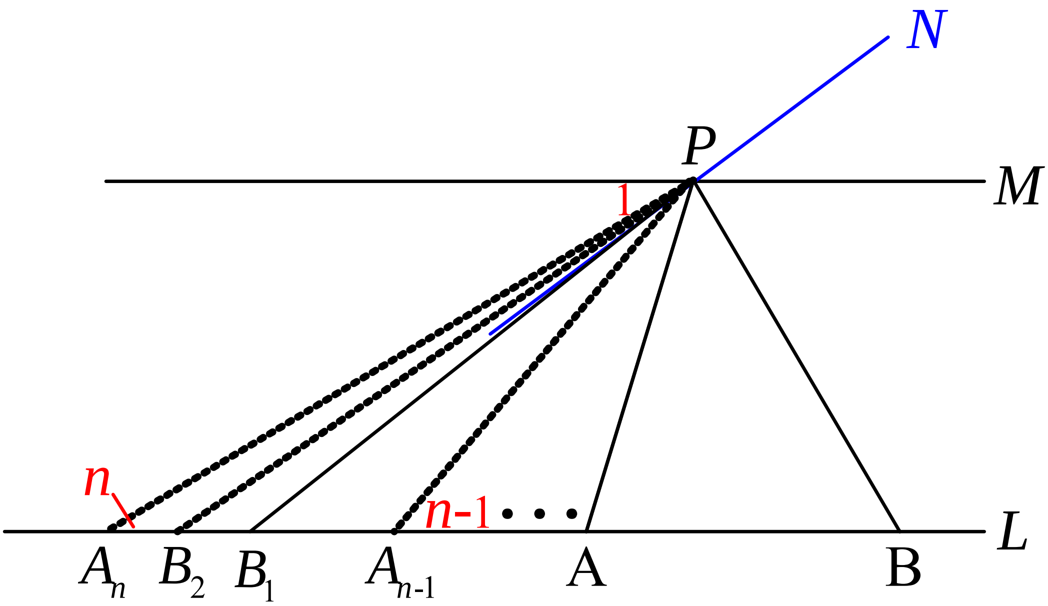


圖七

如圖八，此時取$\overline{A_{n-1}A_n}$的中點B_1，連接$\overline{B_1P}$，可得$\angle PB_1A=\angle 1$或$\angle PB_1A\neq\angle 1$，若$\angle PB_1A=\angle 1$，則大功告成；若$\angle PB_1A\neq\angle 1$，則可得$\angle PA_nA<\angle 1<\angle PB_1A$或$\angle PB_1A<\angle 1<\angle PA_{n-1}A$，不失一般性，假設$\angle PA_nA<\angle 1<\angle PB_1A$，爲了符號上書寫的方便，我們以符號$\angle 1\in[\angle PA_nA,\angle PB_1A]$表示$\angle PA_nA<\angle 1<\angle PB_1A$此概念，爲考慮到書寫的簡潔性，我們將$[\angle PA_nA,\angle PB_1A]$寫爲$[a_1,b_1]$。

接著，取$\overline{B_1A_n}$中點B_2，並連接$\overline{B_2P}$，則可得$\angle PB_2A=\angle 1$或$\angle PB_2A\neq\angle 1$，若是不等，則$\angle 1\in[\angle PA_nA,\angle PB_2A]$或$\angle 1\in[\angle PB_2A,\angle PB_1A]$，我們將兩者之中包含$\angle 1$的該區間改寫爲$[a_2,b_2]$。重複相同步驟往下做，使得$\overline{B_kB_{k+1}}=\dfrac{\overline{B_1B_2}}{2^{k-1}}$，並使得$\angle 1\in[a_{k+1},b_{k+1}]$，在此過程中，

若能得到一點 B_n ，使得 $\angle PB_nA=\angle 1$ ，則點 B_n 即爲我們所尋找的交點 C。

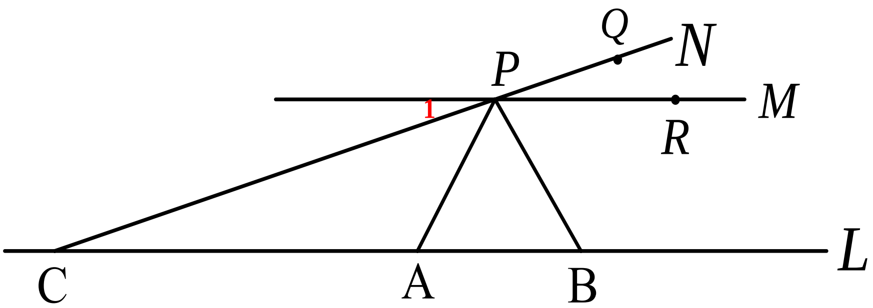


圖八

若是所有的 $\angle PB_kA$ 均不等於 $\angle 1$ ，則 $\langle B_n\rangle$ 形成一有界的的無限集，如此一來，根據以下的 Bolzano-Weierstrass 定理：

在 R^n 中，每個有界的無限集都有聚點（accumulation point）。

可得 L 上存在 $\langle B_n\rangle$ 的一聚點 C，可證 $\angle PCA=\angle 1$ ，爲顧及證明的緊湊性，在此我們留給各位讀者自行驗證；因此至目前爲止，不論如何，我們必可在直線 L 上找到一點 C，且連接 $\overline{CP}$ 將使得 $\angle PCA=\angle 1$，如同圖九所示，最後我們著手證明 $\angle CPB+\angle QPB$ 等同於兩直角(即證明直線 $\overleftrightarrow{CP}$ 與直線 N 重合，亦即直線 $\overleftrightarrow{CP}$ 等同於直線 N)。



圖九

先前我們在求作直線 M 的過程中，已取 $\angle RPB=\angle ABP$ ，又因 $\angle PCA=\angle 1=\angle QPR$ （ $\angle 1=\angle QPR$ ，兩對頂角相等利用了命題 I.15），

因此，

$$\angle CPB+\angle QPB=\angle CPB+\left(\angle RPB+\angle QPR\right)=\angle CPB+\angle ABP+\angle PCA$$

爲 $\triangle PCB$ 三內角和，故得證 $\angle CPB+\angle QPB$ 等同於兩直角，即直線 $\overleftrightarrow{CP}$ 等同於直線 N，亦即我們可得直線 N 和 L 相交於一點 C，此與兩直線平行相違背，得一矛盾也，因此，可以確保過線外一點作一平行線的唯一性。

同理可證 $\angle PAB < \angle 1$ 或 $\angle PAB = \angle 1$ 等情形。

在上述的證明過程中，Bolzano-Weierstrass 定理，扮演著關鍵性的「收尾」角色。筆者遙想起當年大學時期，在一開始接觸「高等微積分」時，這個令筆者印象非常深刻的「存在性」定理。藉助了這定理的幫忙，即使交點跟我們玩起「躲貓貓」的遊戲，我們仍可以確信它身在其中。

後記

「平行設準」與「三角形設準」，看似簡單的兩個命題，竟牽扯出筆者這麼繁雜的論證過程，此證明手法，實非一般人所能接受。但是，筆者確信經由「歐式幾何」的嚴密訓練，將使我們感受到數學知識的確定性 (certainty)。對筆者而言，這次經驗確實激活了自己一些「創造」和「發現」的能力，並感受到教學相長的喜悅，實爲醉心於本次「幾何之旅」的最大收穫。

參考文獻

Bunt, Lucas N. H., Phillip S. Jones, Jack D. Bedient (1988). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, INC.

Dunham, William 著，林傑斌譯 (1998).《天才之旅》，台北：牛頓出版社。

Apostol, Tom M. (1974). *Mathematical Analysis.* California: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Heath, Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications.

趙文敏 (2000).《高等微積分（上）》，台北：五南出版社。