HPM通訊
發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十卷 第四期 目錄（2007年4月）

駒場教養學部的傳奇

國立交通大學通識教育中心李弘祺教授

在東京目黑區「東大前」火車站旁邊，有一個東京大學的校區，名叫駒場，這個校區比坐落在文京區、以赤門而名聞於世的東大校本部略小，但是比較接近東京的鬧區。它是東京大學一年級新生讀書的地方。叫作教養學部（從 1949 創立到 1983 年，東大官方所用的正式的英文名稱是 College of General Education，那一年教養學部改名爲文理學院，英文名也改稱爲 College of Arts and Sciences。現在則逕稱爲 College of Arts and Sciences, Junior Division，仍在此校區上課，也仍稱爲教養學部）。凡是進東大的新生都在這裡修讀基礎或核心課程（教養課程），大概一年半之後，才陸續到他們要選讀的主修科系，先後轉到「赤門」去攻讀專業課程。

教養學部就像是美國的自由學藝學院 (liberal arts colleges)一樣，提供的是博雅課程，讓學生在知識的廣度和人格的陶養方面都得到嚴謹的基礎訓練，使他們能成爲社會上有用的領導者，扮演一個受過教育的知識人的角色。

這樣的一個學部在戰前的日本是沒有的。戰前的日本教育師法英國和德國，並不重視通識教育。戰後，在聯軍的佔領之下，帶有濃厚自由主義色彩的麥克阿瑟主導教育政策和措施，推動種種改革，其中最爲重要的，莫過於是 1949 年東京大學教養學部的成立。

去年我因爲擔任東京大學一個研究中日海上文化交流計劃的國際顧問，到駒場參加咨詢會議，在那裏盤恆了幾天。從外表看來，這個校區和東大本身沒有太大的分別。但是，當我聽説規劃設立這個教養學部的東大教授是矢內原忠雄時，我的心情不免就興奮起來。因爲矢內原忠雄是近代日本史上有名的「人格者」，我所知道有關他的事跡本來就很多，只是萬萬沒有想到他竟然也是東大教養學部的創設人。

矢內原忠雄就是有名的《日本帝國主義下的臺灣》的著者。說到它，那當然是臺灣近代知識人所人人熟知的一本書。敬仰他反對殖民地主義的人很多，不用我在這裡細述。這裡只需提到一件事，就可以讓人們了解他的研究，不僅很受當時日本政府殖民統治下的臺灣人的歡迎，而且是開啓殖民地政治經濟學研究的先鋒。1984 年由史旦福大學出版的《日

本的殖民帝國，1895-1945》（由 Ramon H. Myers 與 Mark R. Peattie 合編）就把這本書獻給他。這就代表了他的客觀研究的成果，以及對正義的堅持。他的道德信念適當地表現在精深的學術研究上面，而開拓了一整個新的學術方法和研究領域。事實上，他對朝鮮人的同情，更有勝於他對臺灣人的同情，因此在朝鮮，也有非常多的知識人對他敬仰有加。

到東京大學校本部的社會科學研究所去參訪，你會發現它的第一任所長就是矢內原忠雄；到經濟學系，你會發現它藏有當年亞當斯密寫那本有名的《國富論》時所參考的全部的圖書，因爲它們現在收藏在這一系的圖書館裏。矢內原忠雄在 1920 年到英國訪問時，發現了這一批書還存著，並且將要公開出售，因此他就把它們買了，帶回東京大學。那時他剛到東大教書，卻有這樣的勇氣和識見。現在我們仍然可以看到這些書上亞當斯密的眉批，這些都得感謝矢內原忠雄。他還親自編撰了這 608 本書的目錄。這本目錄經常再版，現在還可以在 Amazon.com 買到。

然而，他還有更爲令人感動的事跡：就像他寫了《日本帝國主義下的臺灣》一書一樣，在民國 26 年，當日本發動盧溝橋事變，全力從滿洲向華北「進出」時，他竟然本著一個基督徒的良心（關於他的基督教信仰，容我以後再寫）出來反對日本侵華。他寫了一篇文章，題爲《國家の理想》，發表在那一年九月號的《中央公論》上，批判日本軍國主義的行爲。爲了這麼一篇文章，日本軍部強加壓力，要東京大學把他解職。這樣的遭遇不免使我想起六十年代的殷海光先生。知識人的遭遇何其令人感嘆，而殷先生最後鬱鬱以終，不像矢內原先生能看到戰爭結束，這就令人對殷先生更爲同情了。

然而，矢內原的經歷其實也不遑多讓，不能不令人一般的感概。

離開了東京大學之後，他經濟拮据，生活遭遇困難。我最近翻讀去年剛剛出版的 1938 年林獻堂的日記，發現他在窮困之餘，甚至於透過蔡培火先生來向林先生商求經濟援助（林先生當時正好在日本）。宗主國的知識人居然需要向被殖民地政府欺壓的臺灣人求援，這是多麼吊詭呀。林先生當然慨然答應。不過後來，矢內原先生再來造訪，除了再申謝忱之外，卻表示說已經不需要林先生的支援了。我敢說林獻堂並不知道爲什麼矢內原改變了初衷。但是我相信這是因爲有另一件非常感人的事發生了。這就是當時日本最大的書店，岩波書店，的老闆拿了等於矢內原先生兩年的薪水給他，請他寫一本他所最欽佩的歷史人物，這就暫時解決了他的困境。所以他就不用麻煩林獻堂先生了。矢內原的這本書寫進了孔子，佛陀，蘇格拉底，耶穌、親鸞等人。但是更重要的是，在事態如此危急之際，岩波的老闆居然有這樣的勇氣出來支助矢內原先生，這是一則多麼感人的故事！

怪不得在今天，對猶太人所遭遇的浩劫（holocoust），中國與朝鮮（以及臺灣）的慰安婦醜聞，日本在中國東北所犯下的罪行，以及南京的大屠殺等罪孽反省最爲深刻的山田正行（大阪大學教育學教授），會把日本的反戰理念、和平主義以及反對發動對華戰爭的思想源頭，追回到矢內原和新渡戶稻造。是的，新渡戶稻造的全集就是矢內原所編撰。這些日本的先知們就這樣，在非常艱難的時刻發揮他們作爲知識人的良心，勇敢地面對軍閥的無知和暴虐，忠實地扮演了近代世界進步思想的表帥的角色。

1994 年，矢內原忠雄的《日本帝國主義下的臺灣》，連同孫文的《三民主義》，以及余英時的《中國近世宗教倫理與商人精神》等書被東京大學選爲二十世紀影響東亞研究的最重要的十本書。

在駒場的校園裏，今天立的有矢內原的銅像。偉大的學校曾經培養了偉大的人物，而這位偉大的人物又將長遠地留在曾經在駒場受過通識教育的學子心中。再過幾天，我又要到東京大學參與他們計劃的咨詢。我將有機會再一次到矢內原的銅像前，去瞻仰這一位先知型的偉大教育家。他所象徵的，正就是通識教育的永恒價值。(2007 年 4 月 2 日午夜於新竹)

後記：

或許有人讀了這樣的文章，會覺得這是一種造神運動的寫法，不過我還是認爲世界上就是有些人會爲一些應該堅持的理想來生活的。至少，像矢內原先生這樣的人在教育上所造成的重大影響和敢於站出來反對日本侵華，指摘日本殖民政策的錯誤措施，這些都還是令人佩服的。弘祺又及。)

知識連結 vs.數學的教學與評量

台師大數學系 洪萬生教授

根據某職場情報雜誌報導，有關畢業生的就業行情，台大首次領先成大，成爲企業主的最愛。該雜誌還進一步報導，影響此一偏愛的因子，與大學生能否融會貫通所學有關。顯然，這是因爲現在企業管理所需要的能力，已經不只是技術層面的專業訓練可以滿足。於是，只擁有某專業或技術（譬如理工）此單一強項，當然不足以應付瞬息萬變的職場需求了。

其實，這一行情可能也反映台大畢業生出國比例降低，留在國內就業人數增加之後，自然留給企業界比較深刻的印象。不過，台大是國內首屈一指的綜合型大學，資質優異的學生所接受的教育訓練之多元與彈性，的確是其他大學所難以望其向背，因此，該校畢業生比較具有融會貫通的能力，看來也見證了台大豐沛的學術與教育資源。

這麼說來，其他大學在教育品質的提升上，是否就難以培養學生此一能力呢？這恐怕是從事高等教育工作者必須共同面對的問題，論者或謂通識教育的成效，可以起一點彌補作用。然而，更根本的問題，似乎是中學階段的教育品質（筆者身爲大學教授，如此猜測絕對沒有卸責之意，請參考下文論述）。由於上個月底在國科會的贊助下，本社與張昭鼎紀念基金會所舉辦的研討會與數學教育有關，因此，或許我們可以從數學教學與評量的觀點，來討論相關的品質，如何可以連結到學生的融會貫通之能力。

大致說來，我們的高中數學教學，主要著重在解題活動。問題其解決，一向被視爲數學進步的動力。當教師將解題活動應用在教學或評量時，則學生可藉以釐清數學觀念、熟練數學方法，以及通盤瞭解相關的知識內容，甚至被啓發而探索更深刻的數學理論。這種期待當然是高標準，下焉者幾乎都將數學視爲各自互不相涉的題目及其解法，而這顯然也足以反映一般數學教師所採取的教學策略，譬如他們在教學時，總是針對個別問題一個接一個講解（目的無非是爲了升學考試），無暇顧及教科書的知識結構之意義。如此一來，培養融會貫通能力所需要之訓練，譬如知識如何連結，以及連結之重要性等等，當然就付諸闕如了。

話說回來，「照本宣科」的教學方式，在高中數學教育階段，大概是相當罕見的現象吧。筆者有一位大學同窗二十年前任教中部某公立明星高中時，一直堅持按照教科書內容授課，結果校長始終不讓他任教高三課程，因爲帶領學生充分理解課本內容，被認爲無助於大專聯考成績之提升。這個真實故事固然年代久遠，目前或許已經缺乏代表性，不過，如果教師願意測試一下學生閱讀數學教科書的能力，一定可以發現即使是所謂的數理資優學生，也相當貧弱。究其原因，教師教學時迫於所謂的補充問題過多（呼應學測與指定考科之需求故也），而無法深入進行教科書內容的結構性講解。如此一來，當我們期待學生擁有融會貫通的能力時，不是顯得非常不切實際嗎？

上述觀察也許比較適用於高中教學之觀察。然而，由於國中基測的評量方式，國中數學教學現場，也慢慢地「解題化」了。所謂「解題化」，是針對問題之求解時，我們被允許利用前所學過的任何知識，而不必在乎這些知識的邏輯順序或結構性意義。其實，過去國中幾何課程還講究定理證明時，數學知識的結構性面向，多少可以在教學現場獲得凸

顯。現在，由於在基測試卷中，證明題都改寫成爲選擇題，於是，在「解題」的強大需求下，數學知識的邏輯連結，遂隱沒不彰了。

顯然，由於升學主義的惡質競爭，目前國中基測的精神與目標，已經受到相當大程度的扭曲。因此，筆者在此舉例說明，目的不在於批判此一評量本身之得失。誠然，教學能否正常化，絕對脫離不了考試評量方式的影響。不過，不斷地精進評量技術，以維持考試的所謂「公平性」，絕對無助於教學成效之提升，因此，筆者不想就此一議題此糾纏下去。

筆者比較關心的問題，毋寧是國中課程（九年一貫的一部份）的知識連結面向，如何在教學現場獲得應有之重視。如果只是爲了幫助學生更好地回答基測問題，那麼，知識之連結，仍然可以列入教學的優先順序。爲此，教師顯然必須先有能力進行相關之連結！更何況，九年一貫課程所強調主要能力培養項目之一，就是「連結」！

筆者最近曾針對此一問題，請大四學生（其中大都準備投入教學行列）提出他們的反思與建議。茲轉述該問題如下：

漂亮的證明之特色，通常兼具核證 (justification) 與說明 (explanation) 的雙重功能。在國中幾何學課程中，我們在引進形式論證之前，通常會利用直觀論證來鋪陳。不過，這兩者之間的連結，似乎並未獲得應有的重視。

試以三角形之內角和為兩個直角和或 180 度證明為例。在實驗幾何或直觀論證 (intuitive reasoning) 方面，我們在紙上畫一個三角形，然後，將三個角剪下來，再設法拼成兩個直角和或「180 度角」(？)。(附註：為了避開「平角」的定義，可以運用量角器說明 180 度角的意義。)

另一方面，如果考慮形式論證 (formal reasoning)，那麼，我們可以利用平行設準，過此一三角形之某頂點畫一條直線與底邊平行，再根據內錯角全等之性質或定理，證明這三個角等於兩個直角的和。

請問這兩個論證如何連結？同時，在此一連結過程中，哪一部份屬於核證？又，哪一部份屬於說明？

就上述這一例子來說（亦即：教學目標是三角形之內角和為兩個直角和或 180 度之證明），如果你有更好的教學策略，請提供有關實驗幾何與論證幾何之連結的反思！

結果頗令人意外：筆者所回收的回答大都不太切題，這是因爲回答者多半忽略此一教學目標何在！不過，他們似乎也無從理解「連結」之必要，才是最值得注意的現象。

平心而論，一個人是否擁有融會貫通之能力，似乎不必然與其所接受教育品質相關。然而，針對一個中等資質的學生而言，如果教育環境願意而且有能力提供誘因，不斷地強調知識連結之必要意義，那麼，長期薰陶下來，或許大部分的大學生也多少擁有融會貫通之能力了。特別地，針對數學的教學與評量，我們若能以知識的（邏輯）連結作爲主要教育目標之一，那麼，所謂的「融會貫通」當然絕對不是台大畢業生的專利了。

後記：按本文也將發表於《科學月刊》2007 年 5 月號

從一題國中基本學力測驗的數學試題談起

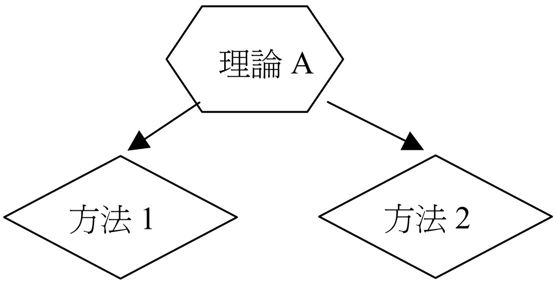
北市南門國中 曾明德老師

理論與方法

由於唸教學碩士班的機緣下，接觸了一些數學教育的理論。例如：*Skemp*的智性與情意互動論、*Vygotsky*的社會與個體互動論、*Lave*的情境與個體互動論、以及*Van Hiele*的幾何與思維階層論。[1]

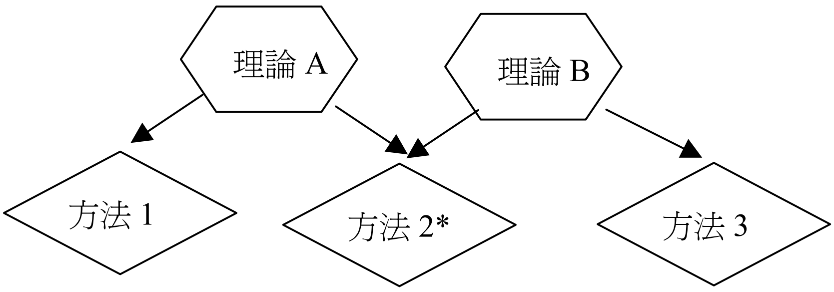
隨著知道的學習理論愈多，心裡頭反倒覺得不踏實。開始在思考一些問題：我是怎麼學會一些事情的，自己都還搞不太清楚，但是，我已經從事教學工作七個年頭了(85.08~92.08)……。[2]

我總認爲不管遇到什麼教學上的困境，只要我持續不斷地抽絲剝繭，並往未知的知識領域去找尋適當的理論，再透過一些設計與試驗，必能轉化成相對應且適當的方法。[3]但是，理想與現實總是有差距的，因爲一個理論往往沒有交代它的對應方法，似乎這樣比較有神秘感。因此，端看人們如何去詮釋一個理論，產生的方法也會有些差異。照這樣的說法，理論與方法的關係就如同下圖：



圖一

回到教學現場，由於牽涉的變因較多，所以，實際上一個方法就可能綜合了幾家的理論，形成了下面的關係圖：



圖二

學校的數學、日常生活的數學之外，還有考試用的數學

國中數學基本學力測驗從民國 90 年上路，至今(92 年)已經進行了三年共六次的測驗。下面用來討論的試題是 91 年第一次學力測驗的第 10 題，記作 91-1-10。

(91-1-10)

小格想要煮一鍋 30 人份的玉米湯，
他依據右表的食譜內容到市場選購材料。
請問下列哪一種材料的數量買得太少？

(A)玉米醬(100ｇ/罐)11 罐

(B)雞蛋 8 個

(C)絞肉 45 兩

(D)奶油 75 克

香濃玉米湯(4 人份)
材料：1.玉米醬(100g/罐)……..1.5 罐
2.雞蛋……………………1 個
3.絞肉……………………6 兩
4.奶油…………………..10 克
5.清水…………………半公升
6.鹽……………………..1 小匙

上面這一題要怎麼做呢？(**建議您先做做看，再繼續看下去。**)

有個學生(暱稱*W*)是這樣想的。[4]她說剛好她有這樣類似的經驗，她的處理方式如下：將 香濃玉米湯 (4 人份) ×8，就可以提供 32 人食用，所以將(4 人份)各項材料都乘上 8 就可以了。因此她得到的材料數量如下

材料：1.玉米醬(100g/罐)……..1.5 罐×8＝12 罐
2.雞蛋……………………1 個×8＝8 個
3.絞肉……………………6 兩×8＝48 兩
4.奶油…………………..10 克×8＝80 克

所以本題的答案有 (A)、(C)、(D)，但問題是這是四選一的單選題，因為奶油少了 5 公克(少了最多)，所以選 (D)。

聽完了她的想法之後，我陷入了苦思。我覺得她「乘上 8 倍」的想法很好 (甚至有點高竿)。**就生活面而言，她的策略已經解決問題了**。但是很不幸，這是一道模擬自生活情境的**考試用**問題，[5]而且答案只能選一個。對一個 15 歲的小女生來說，她從(A)、(C)、(D)中以「哪一個選項少了最多？」的想法，選擇(D)，已是很「難能可貴」的解題策略，雖然想法都沒有問題，但是，執行的過程中卻出現了幾個錯誤，我想連受過數學訓練的人，也難以察覺到真正的盲點。[6]

這個問題，一直存在我的腦海中，揮之不去。趁著寫報告找些有感覺之題材的同時，抱持著前面所談的「理論與方法」的態度，試圖做一些反思，也算是對自己的學習有所交代。

■自發性概念 **(naïve concept)**[7]

根據我對 *W* 的了解，她所接觸的數學學習，大多是慣性學習 (Habit/Role Learning)。所以，在我與她接觸的時間裡，我會盡量找機會採用智性學習 (Intelligent/Schematic Learning)，以便能在關係性理解 (Relational Understanding) 與機械性理解 (Instrumental Understanding) 之間，取得某種程度上的平衡與調和。

一般而言，習於慣性學習的學習者會期望老師不斷地提供規則，以應付每一個新狀況；而智性學習則使學習者有較好的適應力，並具有信心能處理新狀況。

上面這個問題 (即 91-1-10) 對於 *W* 而言，情境雖然不陌生，但是，並沒有適合的規則可以套用，所以，她很自然產生了自發性的解法，可以看出 *W* 有信心能解出。但是問題出在哪裡呢？

■「克、兩、罐」能比較大小嗎？

我們按照 「乘上 8 倍」與 「哪一個選項少了最多？」的想法來繼續作答。

玉米醬需要 12 罐，選項 (A) 買玉米醬 11 罐，所以少 1 罐；
絞肉需要 48 兩，選項 (C) 買絞肉 45 兩，所以少 3 兩；
奶油需要 80 克，選項 (D) 買奶油 75 兩，所以少 5 克。
因為 5 克＞3 兩＞1 罐，所以奶油少了最多。

「**克、兩、罐**」能比較大小嗎？當然能。因爲基本上這些都是用來衡量物體份量的形容詞 (或乾脆說是**重量單位**好了)，只是就算是同類量，也不能直接從**數(度量)**的大小來判斷**量**的大小。例如 2 公斤、1000 公克哪一個比較重？

所以，在這之前我們還必須做一件事，就是**化成同單位**。即 2 公斤＝2000 公克＞1000 公克。(2000＞1000)

問題是：5 克、3 兩、1 罐，要怎樣化成同單位呢？

Insight！我們選擇四人份爲一單位，玉米醬需要 1.5 罐(四人份)，選項 (A) 玉米醬少 1 罐，相當於$\frac{1}{1.5}$(四人份)；絞肉需要 6 兩(四人份)，選項 (C) 絞肉少 3 兩，相當於$\frac{3}{6}$(四人份)；

奶油需要 10 克(四人份)，選項 (D) 奶油少 5 克，相當於 $\frac{5}{10}$(四人份)。

因爲 $\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}>\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$，所以，玉米醬少了最多。

■使用加法策略處理比例問題

再細究 W 的方法，要處理的問題是下列兩個表的比較：

假設選項給的都足夠 30 人份	→	32 人份
(A) 玉米醬需要 11 罐； (C) 絞肉需要 45 兩； (D) 奶油需要 75 克。		玉米醬需要 12 罐； 絞肉需要 48 兩； 奶油需要 80 克。

只要去分別比較 $\frac{11}{12}$、$\frac{45}{48}$、$\frac{75}{80}$ 與 $\frac{30}{32}$ 的大小，若 等於$\frac{30}{32}$，則表示剛好 30 人份；若 大於$\frac{30}{32}$，表示超過 30 人份；若 小於$\frac{30}{32}$，表示不夠 30 人份。即 $\frac{11}{12}=\frac{44}{48}<\frac{45}{48}=\frac{15}{16}=\frac{30}{32}$，所以，玉米醬 11 罐不夠 30 人份；$\frac{45}{48}=\frac{15}{16}=\frac{30}{32}$，所以，絞肉 45 兩剛好 30 人份；$\frac{75}{80}=\frac{15}{16}=\frac{30}{32}$，所以，奶油 75 克剛好 30 人份。

而 W 的處理方式如下：

玉米醬需要 12 罐，選項(A)買玉米醬 11 罐，所以少 1 罐；絞肉需要 48 兩，選項(C)買絞肉 45 兩，所以少 3 兩；奶油需要 80 克，選項(D)買奶油 75 兩，所以少 5 克。 因為 5 克＞3 兩＞1 罐，所以奶油少了最多。

事實上，這樣的情形等於在解「比例的文字題」中，不知不覺使用了「加法策略」，

來繼續完成她自己所布下的計畫。也就是說，在將情境問題轉化成數學問題的過程中，原本的問題可相當於「比較 $\frac{11}{12}$、$\frac{45}{48}$、$\frac{75}{80}$ 的大小」來決定，但是，*W* 卻用不知不覺使用了「11－12、45－48、75－80」來處理。

如果題目改為「分別比較 $\frac{11}{12}$、$\frac{45}{48}$、$\frac{75}{80}$ 的大小」，我想 *W* 還不致於會使用加法策略，[8]顯然 *W* 受題目的型態影響很大。

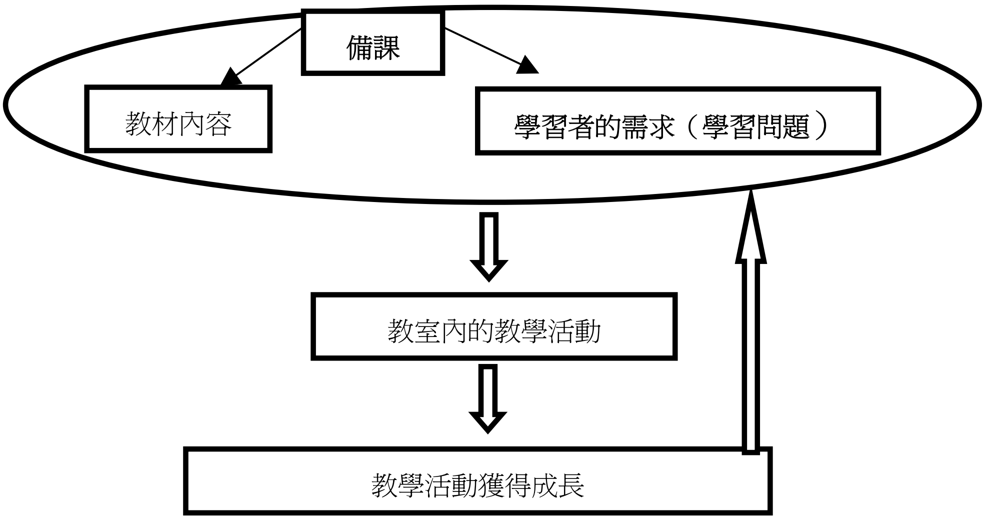
換句話說，同樣的數學概念，表達的方式是用一般的文字敘述或是直接用數學語言表達，對大多數的學生是有差異的。[9]至於哪一種對學生有利，就看個人不同的喜好、習慣、學習方式以及思考型態而不同。我們在教學上應要多傾聽學生的語言，[10]從而在教學活動設計上作考量，以便能產生共鳴。

註解

註 1. 關於這些學習理論的中文名稱，並非原來的學者們所提出，而是引自台灣師大數學系金鈐老師的心得。

註 2. 我總覺得自己的教學有些問題，但是又不知全盤去改善，愈來愈心虛，所以，也就只能虛心去面對問題，一點點的改善。但是，改善的速度似乎跟不上學期的腳步……，日子也就這樣一天一天地過了……。

註 3. 91 年 2 月間，我曾經整理了這幾年來(85.08~91.02)自己對於「三角形的重心」這個單元的教學過程以及轉變，做了一番大綱式的記錄，得到下列的心得：1.數學教師可從平日的**備課**著手，來提高教室內的教學活動之品質。2.數學教師可從**學生的學習問題**著手，來進行教學活動的設計。(該篇心得可於 http://home.kimo.com.tw/t266.tw/teach/centerofgravity.zip 下載。)



註 4. 這個學生(*W*)是台北市某私立中學國中部的女生，家境良好。我從她國二下學期最後一個月，開始擔任她的數學家教老師直到國三基測結束 (90.06~91.06)，她對於學校的數學 (所指的是 83 年版的課程標準下的教材) 一向都能勝任。

註 5. 在台灣對於數學學習，普遍存在的心態是，能通過考試用的數學，遠比學校的數學、日常生活的數學重要。於是，大家努力於考試的問題，爾後大家都不想再碰數學。

註 6. *W* 的父親是台南某一所明星高中畢業，之後念醫學院，現職是一位醫生。以他的背景，在聽完了這段陳述之後，突然說：「這樣想，也對！」至於當時的我，一下子也只能以

正確的答案 (以考試的角度，即乘上$\frac{30}{4}$倍) 來回答他們。顯然這樣的回答並未真正回答我們心中的疑惑。從這個窘況，讓我深刻感受到「懂 數學＋懂 教育 ≠ 懂 數學教育」

註 **7.** 這個名詞引用自金鈴老師的課堂。***Naïve***，形容詞，天真的。

註 **8.** 例如 用「11－12、45－48、75－80」 或是 $\frac{11}{12}=\frac{47}{48}>\frac{45}{48}=\frac{77}{80}>\frac{75}{80}$ 來決定 $\frac{11}{12}$、$\frac{45}{48}$、$\frac{75}{80}$ 的大小。

註 **9.** 再舉一例，有興趣的讀者不妨找學生試試。

92 年第二次基測第 8 題(92-2-8)

若 45 可分解為 $a\times b$，其中 a、b 均為正整數，則下列哪一個<u>不可能</u>是 $a+b$ 的值？ (A) 46 (B) 42 (C) 18 (D) 14 。

(文字敘述方式)

將 45 分解成兩正整數的乘積，下列哪一個<u>不可能</u>是這兩個正整數的和？ (A) 46 (B) 42 (C) 18 (D) 14 。

註 **10.** 透過學生的語言，可以了解學生對所學內容理解的程度，也可以了解學生某些先備知識、自發性的概念、另類想法、某些初階的直觀……等等。

後記 (洪萬生老師的來信 96.04.13)

問題一、

洪老師說：圖二中的『方法 2』打了一個星號，請問特殊意涵何在？值得說明。

明德回答：的確有個我自己的想法，在圖一中『方法 2』是由理論 A 研發出來的；在圖二中『方法 2*』是綜合了理論 A 與理論 B 而開發的。為了突顯且簡潔地交待圖一中的方法 2 與圖二中的方法 2*的相同與相異之處，所以在圖二中的『方法 2』打了一個星號，這種用法就好像類似數學中的 A，A'，A''，……。

問題二、

洪老師說：註 9 問題似乎比較簡單，類比性不夠強，你可有其他例子？

明德回答：因該文的初稿是 92 年(2003 年)8 月寫的，故註 9 再舉一例，採用了當時最新的基測考題，主要只是想在註 9 中補充說明像類似的情況，幾乎每年基測都會出現，但忽略了類比性夠不夠強的問題。不過，經老師的提醒，感覺到真是如此。雖然每年應該都會有，但是我一下子又難以決定哪一例子的類比性比較強，是故，請老師等我一段日子，或許我將基測中有這類情形的題目作個整理，到時再決定哪一個例子比較適合用來作為這類例子的"張本例"(generic examples)。(明德敬上 96.04.17)

96 年度大學學測數學考科題解討論

北市建國中學 郭慶章老師

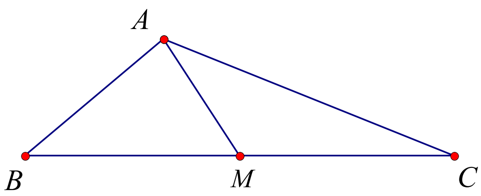
九十六學年度大學入學學科能力測驗考後，有關數學考科，一般認爲今年的試題中間偏難，這兩天陸續看到「三民版」的〈試題詳解與分析〉與「翰林版」的〈試題評析・試題解析〉兩篇專文，二位作者北一女中蘇俊鴻老師與蘭陽女中陳敏晧老師都是教學經驗豐富的數學名師，又用心於教學研究，敘事論理自有獨到處。俊鴻說：「若與去年相較，今年的試題較爲靈活，難度略有上升。」完全符合當時在考場同學考完後的即時反應。敏晧也說：「此次試題其鑑別度是很高的，相信對平均分數而言會比去年約降十分左右。」證之以學測後所發布的成績，果然。

敏晧認爲：包括選塡 I 在內等 8 題，「這些計算題是稍具難度的題目，對於計算能力(較弱)的考生相當不利」。俊鴻認爲：96 年度大學學測數學考科「整份試題的難易順序配置也有用心考量」，其說不知是否有最後一題最難之意？不過在閱讀他們的試題評析後，題解部分，我倒是都從最後一題看起。最後一題就是選塡題 I，完全答對得 5 分，題目是：

「在$\triangle ABC$中，M為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且$\angle BAC=120^\circ$，
則$\tan\angle BAM=$____________。(化成最簡根式)」

這些年來的學測考題，誠如敏晧所說：「基本概念從始至終都是學測的基本精神」，俊鴻也認爲：今年的數學科整份試題維持了學科能力測驗一貫的標準，又說：「事實上，考生靜下心來稍加思考，會發現只要運用基本概念便能解決。」這一題目相當平實，是常見的題型，高中同學應不陌生。究竟那些基本概念可以用來處理此一問題？筆者略有心得，願敘述於下，就教各位同學。

[解法 1]：



(1)先利用餘弦定理求$\overline{BC}$邊長：

$$\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120^\circ=49$$

$$\Rightarrow\ \overline{BC}=7$$

(2)利用中線定理求中線$\overline{AM}$之長：

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

即：$3^2+5^2=\ 2[\overline{AM}^2+(\frac{7}{2})^2]\ \Rightarrow\ \overline{AM}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

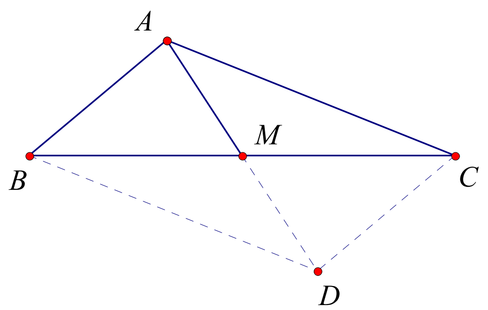
(3)參看$\triangle ABM$，再利用餘弦定理：

$$\cos\angle BAM=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-\overline{BM}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AM}}=\frac{9+\frac{19}{4}-\frac{49}{4}}{2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{19}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow\ \tan\angle BAM=\sqrt{(2\sqrt{19})^2-1}=5\sqrt{3}$$ 。

俊鴻與敏晧都是這麼做的，考量學生的思維方式，這可能是最直觀的解法。然則，求中線 $\overline{AM}$ 之長可不必先求 $\overline{BC}$ 邊長，有 $\overline{AM}$ 之長後要求 $\angle BAM$ 之度量，在餘弦定理外，亦可利用正弦定理。

[解法 2]：



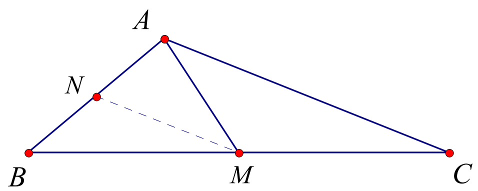
(1)先作輔助線，如右上圖，將 $\overline{AM}$ 延長至 D，使 $\overline{DM}=\overline{AM}$ ；或如右下圖，取線段 $\overline{AB}$ 之中點 N。

(2)參看△ABD，利用餘弦定理：

$$\overline{AD}^2=\overline{BA}^2+\overline{BD}^2-2\cdot\overline{BA}\cdot\overline{BD}\cdot\cos\angle ABD$$
$$=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos60^\circ=19 \Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{19}$$

或參考△AMN，利用餘弦定理：

$$\overline{AM}^2=\overline{NA}^2+\overline{NM}^2-2\cdot\overline{NA}\cdot\overline{NM}\cdot\cos\angle ANM$$
$$=(\frac{3}{2})^2+(\frac{5}{2})^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cos60^\circ=\frac{19}{4}$$
$$\Rightarrow \overline{AM}=\frac{\sqrt{19}}{2}$$



(3)利用正弦定理：

參看△ABD，$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\angle BAD}$，$\dfrac{\sqrt{19}}{\sin60^\circ}=\dfrac{5}{\sin\angle BAM}$

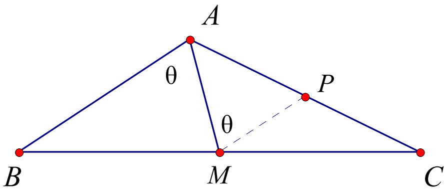
$$\Rightarrow \sin\angle BAM=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} \quad \Rightarrow \tan\angle BAM=5\sqrt{3}$$ 。

或參看△AMN，$\dfrac{\overline{AM}}{\sin\angle ANM}=\dfrac{\overline{NM}}{\sin\angle NAM}$，$\dfrac{\frac{\sqrt{19}}{2}}{\sin60^\circ}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sin\angle BAM}$

$$\Rightarrow \sin\angle BAM=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} \quad \Rightarrow \tan\angle BAM=5\sqrt{3}$$ 。

其實，求解 $\angle BAM$ 之度量，可以不必先求得 $\overline{AM}$ 之長。假設 $\angle BAM=\theta$ ，則 $\angle CAM=120^\circ-\theta$ ，它們各別的相應邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 之長皆爲已知，二角與其二對邊四個數中只有 θ 一個未知數，若作輔助線把 θ 與 $120^\circ-\theta$ 二角「放」在同一個三角形中，則利用正弦定理易求 θ 之值。

[解法 3]：



(1)先作輔助線，取 $\overline{AC}$ 邊之中點 P，
連結 $\overline{MP}$ ，如右圖。

(2)∵ M、P 各為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 邊中點，
∴ $\overline{MP}$ 平行 $\overline{AB}$ ，$\angle AMP=\angle BAM$，$\overline{MP}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ 。

(3)參看△AMP，由正弦定理可知

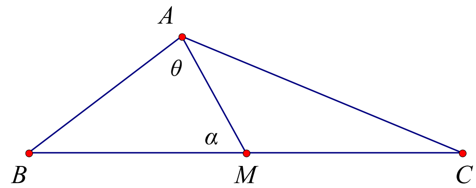
$$\frac{\overline{AP}}{\sin\theta}=\frac{\overline{MP}}{\sin(120^\circ-\theta)} \Rightarrow \frac{\frac{5}{2}}{\sin\theta}=\frac{\frac{3}{2}}{\sin(120^\circ-\theta)} \Rightarrow \frac{\sin(120^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin120^\circ\cos\theta-\cos120^\circ\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\theta+\frac{1}{2}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\theta=\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \tan\theta=5\sqrt{3}$$ 。

事實上，已知 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 二邊與其夾角 $\angle ABC$，又 $\overline{AM}$ 為中線，則△ABM 與△ACM「地位」相同，[解法 3]可取 $\overline{AC}$ 邊之中點 P，藉由△AMP 求 θ；也可以取 $\overline{AB}$ 邊之中點 N，如[解法 2]下圖，藉由△AMN 求 θ 。此一解法之難點，在輔助線之構圖可能沒有想到。不作輔助線，代之以觀察「地位」相同的△ABM 與△ACM，兩次使用正弦定理，亦是解題可行之路。

[解法 4]：



設 $\angle BAM=\theta$ ，$\angle AMB=\alpha$ ，根據正弦定理，

△ABM 中， $\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BM}}{\sin\theta}$

△ACM 中， $\frac{\overline{AC}}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{\overline{CM}}{\sin(120^\circ-\theta)}$

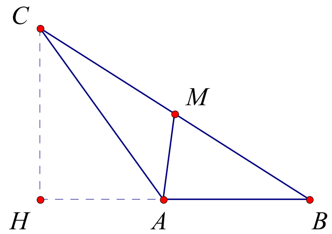
∵ $\overline{BM}=\overline{CM}$ ，$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ ，∴ 上二式相除可得：$\frac{3}{5}=\frac{\sin(120^\circ-\theta)}{\sin\theta}$

$$\Rightarrow 3\sin\theta=5(\sin120^\circ\cos\theta-\cos120^\circ\sin\theta)$$

$$\Rightarrow 3\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=5\sqrt{3}$$

使用解析方法，定坐標求解，是常用的解題策略。俊鴻的〈詳解〉中也寫出了這種做法，他認為「可以坐標化來處理，而且比較符合學測的目標」。

[解法 5]：



右圖中，將 A、B、C 各點坐標化，

設 $A(0,0)$、$B(3,0)$，

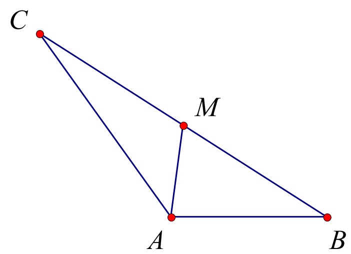
$\because \overline{AC}=5$，$\angle HAC=60°$，$\therefore$ $C(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow$ $\overline{BC}$ 邊中點 M 之坐標為 $(\frac{1}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4})$，

又 $\tan\angle BAM$ 即直線 AM 的斜率，$\Rightarrow$ $\tan\angle BAM=5\sqrt{3}$。

同樣是定坐標求解，從幾何方法出發是最常採用的方式，不過，有些問題以三角觀點切入，也有其方便性。以本題言，只要想到廣義角三角函數的定義，從廣義角圓函數的角度來看問題，解題尤其便利。

[解法 6]：



若 $A(0,0)$，$B(3,0)$，$\angle BAM=\theta$，$\overline{AM}=r$，

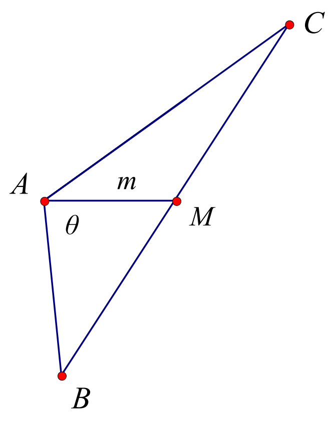
則 $M(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，$C(5\cos120^\circ,\ 5\sin120^\circ)$，

$\because$ M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，$\therefore$ $2r\sin\theta=5\sin120^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$$2r\cos\theta=5\cos120^\circ+3=-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=5\sqrt{3}$$

[解法 6]與[解法 5]二者看似並無差異，實則想法有點不同。[解法 5]主要架構在直角坐標之上，[解法 6]定坐標時同時考量角度與距離，約略有極坐標的味道。複數及其極式是直角坐標接軌極坐標的一種方式，本題適當地規範在複數平面上，可以藉由複數極式乘法的幾何性質輕鬆解題，也是好招。

[解法 7]：



設 $A(0)$，$M(m)$，$\angle BAM=\theta$，則

B：$\dfrac{3}{m}(\cos\theta-i\sin\theta)$，

C：$\dfrac{5}{m}(\cos(120°-\theta)+i\sin(120°-\theta))$，

$\because$ M 為 $\overline{BC}$ 中點，$\therefore$ $\dfrac{3}{m}\sin\theta=\dfrac{5}{m}\sin(120°-\theta)$

$\Rightarrow$ $3\sin\theta=5\sin120^\circ\cos\theta-5\cos120^\circ\sin\theta$

$$\Rightarrow 3\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=5\sqrt{3}$$

幾何、三角、解析方法都是高中數學的重要內容，複數及其極式之外，向量也是高中數學課綱中的重點題材，向量方法亦是求解此題的有力工具。

[解法 8]：

設 $\overline{AM}=m$，$\angle BAM=\theta$，$\because\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ=-\frac{15}{2}$，

$\therefore\ 2\overrightarrow{AM}\cdot 2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=9+25-15=19\ \Rightarrow\ \overline{AM}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

由△AMB，可知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=3\cdot\frac{\sqrt{19}}{2}\cdot\cos\theta=\overrightarrow{AB}\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$\Rightarrow\ \frac{3\sqrt{19}}{2}\cos\theta=\frac{9}{2}-\frac{15}{4}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{19}}\ \Rightarrow\ \tan\theta=5\sqrt{3}$。

此一解法也可不先求 $\overline{AM}$ 之長，而直接尋找 $\tan\theta$，如下：

$\because\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ=-\frac{15}{2}$，

則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=3m\cos\theta=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{9}{2}-\frac{15}{4}=\frac{3}{4}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=5m\cos(120^\circ-\theta)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC})=-\frac{15}{4}+\frac{25}{2}=\frac{35}{4}$

$\Rightarrow\ 4m\cos\theta=1$，$4m\cos(120^\circ-\theta)=7$

$\Rightarrow\ \frac{\cos(120^\circ-\theta)}{\cos\theta}=7\ \Rightarrow\ \frac{\cos 120^\circ\cos\theta+\sin 120^\circ\sin\theta}{\cos\theta}=7\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta=7$

$\Rightarrow\ \tan\theta=5\sqrt{3}$

本題解法眾多，除卻餘弦定理，還有許多切入點。當然餘弦定理可能是多數考生最先想到的策略。

在遊戲中發現數學！

台師大數學系 洪萬生教授

按：本文是為依凡·莫斯塞維奇 (Ivan Moscovich) 的《耍心機，玩數學》（台北：究竟出版社，2007，ISBN 978-896-137-076-7）而寫的推薦序。

兒童玩具或益智遊戲的設計如何引發好奇心與創意思考？我想這是國內目前正流行的、有關童玩的教學與研究的最大挑戰之一。這是因為『如何設計』都離不開數理素養的緣故。

本書作者伊凡·莫斯科維奇被譽為玩具工業領域最有創意的發明家之一，曾經獲獎無數。誠然，我們細讀本書，的確可以發現他的現身說法，「充分展現他創作遊戲時的堅持 — 不只益智，還能激發好奇心與創意思考」。不過，本書作者要是缺乏一點高等數學的素養或好奇，那麼，本書有一些相當深刻的佈題，就很難理解了。

基於此一特色，中小學教師或家長在推薦本書給學童時，不妨多作一點數學的引導，如此一來，他（她）們在遊戲之餘，一定更有感覺。而這，尤其需要教師或家長的積極參與，無論是師生或親子活動，這些遊戲都是難得一見的題材。當然，如果教師或家長並不瞭解相關的數學門道，也不妨放下身段，遊戲就是遊戲嘛，只要好玩就行了。

有關本書涉及數學知識內容，尤其是尺規（或幾何）作圖部份，我們有必要提供一點修訂意見。本書介紹尺規作圖時，也提及高斯 (1777-1855) 年方十九歲所締造的不朽貢獻，那就是：他先是證明正 17 邊形可以尺規作圖，再進一步證明了正 n 邊形可以尺規作圖的充要條件。按照這一定裡，到正 17 邊形為止，凡是 n 為 3、4、5、8、10、12、15、16 等邊的正 n 邊形，我們都可以運用尺規作圖的方式，將它們畫出來，至於正 7、9、11、13、14 邊形，則無法按此方式畫出。本書作者誤認正 9 邊形可以尺規作圖，請讀者務必更正。另一方面，他也誤認正 7 邊形可以尺規作圖。

針對正 7 邊形的作圖，我特別邀請本系所研究生李建勳幫忙澄清，他發現當圖形比例不大時，本書有關正 7 邊形之尺規作圖很難看到誤差。一旦圖形比例放大，那麼，誤差立即變得相當明顯（亦即：圓規在圓周畫的第七段弧，不會剛好通過第一段弧的起點）。此外，他還利用簡單的三角學計算，反證了此一尺規作圖的可能性。

由此可知，設計遊戲時還想談一點相關的數學知識，的確非常吃力不討好。儘管如此，本書作者的「膽識」還是值得肯定。其實，他設計與圖形理論有關的遊戲中，就確實掌握了模式 (pattern) 的基本精神，可見他曾經對數學下過一些基本功夫。

總之，數學遊戲（與謎題）一直有非常迷人的一面，縱使外行人不易洞察內行人的門道，但是，正因為單純地覺得有趣而投入，有時反而可以獲得更多的解題樂趣。因此，我們非常期待讀者喜歡本書所提供的遊戲與謎題。當然，解題之後的反思，也非常值得鼓勵。