HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十卷 第五期　目錄（2007年5月）

中學數學如何回顧？

台師大數學系　洪萬生教授

明年 (2008) 適逢國際數學教育委員會 (ICMI) 創立一百週年，該會已經開始籌備慶祝活動。事實上，2008 年 3 月 5-8 日即將在羅馬召開的研討會，預料將有 150-200 位國際學者應邀參加，盛況可期！

由於第一任 ICMI 主席是偉大數學家 Felix Klein，因此，回顧這一百年的數學教育史，我們緬懷他當年的高瞻遠矚的身影，仍然覺得啓發良多。現在，我藉著針對龔昇、張德建的〈回顧中學數學〉一文（刊《數學傳播》30(1): 25-35）的書評，以呼應 Klein 的數學教育改革願景，也聊誌年少時對於 Klein 的 Erlangen Programme 之嚮往。

一、Klein 的高觀點

龔昇、張德建的〈回顧中學數學〉（後文簡稱〈回顧〉）一文，是他們的『微積分五講』的第一講，是一篇設想周到的文章，值得中小學教師與數學教育工作者深入閱讀。然而，兩位作者的『回顧』方式，卻不無商榷之處，且讓筆者在此稍作『斟酌』，供本刊讀者參考借鏡。

首先，〈回顧〉既然開宗明義追溯百年前的數學故事，我們自然期待龔、張兩位作者提出 Felix Klein 貢獻的歷史意義，而不是 David Hilbert 的『23 個問題』。究其原因，蓋後者的生涯完全無關中學數學故也。同時，兩位作者根據 Hilbert 的論點以說明數學歷史的發展，「是『高級』的數學取代『低級』的數學之過程」，也過度簡化了數學知識之演化，很難啓發中學教師與學生領會初等數學的美與善。

事實上，如果〈回顧〉一開始就將 Klein 的《高觀點下的初等數學》(*Elementary Mathematics from Advanced Viewpoint*, 1908) 請出來『扮仙』，那麼，筆者這一篇文章或許就可以藏拙了。這幾年來，國內外不少的數學家關心中小學數學教育，這是象牙塔學者走向社會關懷的可喜現象。不過，他們也往往忽略了一些可資借鑑的歷史經驗，實在可惜。比如說吧，Klein 的《高觀點下的初等數學》，就是值得一讀再讀的數學（教育）經典名著。

其第一冊《算術・代數・分析》的第一、二段中，指出未來中學數學師資的培育問題，尤其一般數學系的課程與教學，顯然無法推卸責任：

近年來，在大學數學教師及其他理科教師中間，對如何更好地培養未來中學師資產生了廣泛的興趣，這確實是一種新的現象。在此之前，長期以來，大學裡的人只關心他們的科學本身，從來不想一想中學的要求，甚至不考慮與中學數學的銜接。結果如何呢？新的大學生一入學，他面對的問題，好像與中學學過的東西一點也沒有聯繫似的。當然，他很快就忘記了中學階段學習過的東西。但是，他們畢業後擔任教師，又突然發現他們必須按中學教師的教法，來教授傳統的初等數學。由於缺乏指導，他們很快就墜入相沿成習的教學方法，而他們所受的大學訓練，則至多成為一種愉快的回憶，對他們的教學毫無影響。

Klein 這一百年前的觀察，絕對歷久彌新，我想只要曾任教於國內大學教育學程的數學家，一定心有戚戚焉吧。緊接著，我們再來引述 Klein 的第二段：

現在的改革運動，就是要克服這種對中學教學和大學教學都沒有幫助的雙重不連貫性。一方面，要努力在中學教材中注入由線代數學進展得來與現代文化相一致的新觀念（本書將不斷有機會探討這一點）；另一方面，又試圖在大學教育中把中學教師的需求考慮進去。我現在為你們開設的這樣一個綜合的課程，正是幫助你們提高的最重要的方式之一。……我的始終之一的任務，是向你們指明一般課程中，沒有充分指明的各個數學領域中種種問題的相互聯繫，尤其是強調這些問題與中學數學問題的關係。我希望通過這種方式使你們更易於掌握從大量放在你們面前的知識中，汲取促進數學的養料之能力。而你們進行學術研究的真正目標，我認為就在於掌握這種能力。

如果運用現在非常時髦的術語，來綜合上述這一段話，那麼，我們可以說 Klein 早已爲『教學用的學科知識』(pedagogical context knowledge，簡稱 PCK) 發爲先聲了。這是 1980 年代國際數學教育研究中，L. S. Shulman 提出來的最有創意之概念，其目的之一，便是在於強化中學數學教師的教學能力，從而期待大學數學系的高等數學訓練，可以實質地幫助他們的中學教學工作。

這一個十分有用的概念，當然不是憑空想像得到。上引 Klein 這兩段文字，也絕對不是乾澀的數學教育修辭 (rhetoric)。事實上，Klein 的這一些論點完全出自他的身體力行，其中最重要的，莫過於他親自『下海』，編寫像《高觀點下的初等數學》(Elementary Mathematics from Advanced Viewpoint) 這樣的教師進修著作，與中學教師分享他對於數學教育的『想像』與『期許』。

我們不妨簡略回顧一下 Klein 的數學教育生涯。1900 年之後，Klein 意識到數學教育改革，除了加強師資的培育工作之外，中學數學課程的改革也是相當重要的一環。由於 Klein 的呼籲，1900 年召開的學校會議 (Schulkonferenz) 強調應用數學的重要性，並要求中等學校講授微積分和解析幾何。1904 年，Klein 在哥廷根對參加講習班的中學教師發表演講，更主張函數概念數學教學的核心。同一年，普魯士科學家會議在 Breslau 召開，在 Klein 的提議下，決定成立數理教育委員會，並且委託包括 Klein 在內的十二人，寫下在翌年 1905 年 Meran 會議上公布的『中學數學課程大綱』。它的主要精神是：

・教材的選擇與排列，應適應於學生心理的自然發展。
・融合數學的各分科，密切與其他各學科的關係。
・不忽略邏輯訓練，但實用面向也應列爲重點，以便培育學生對自然人文社會現象，擁有數學觀察的能力。
・爲達到此等目的，應養成函數思想和空間觀察的能力，作爲數學教學的基礎。

顯然爲了連繫初等數學課程和高等數學之間的關係，Klein 在 1908 年出版的《高觀點下的初等數學》（第二冊主題爲『幾何』，第三冊主題則是『精確數學與近似數學』），其主要訴求正如前述，就是爲了訓練在職的中學數學教師。

這些貢獻，也使得 Klein 在數學教育領域內成就非凡。事實上，Klein 在數學教育界的影響，已經從德國延伸到國際了。1908 年第四屆國際數學家大會在羅馬舉行，與會數學家正式通過一項提案，決定成立國際數學教育委員會 (International Commission on Mathematics Education, ICMI)，第一任主席就是 Klein。從 1908 到 1914 年中，在 Klein 領導下的 ICMI 做了大量的工作，這六年累積的各國數學教育情報告、以及在會議上的專題報告，乃是極爲寶貴的數學教育史資料，至今仍不失其重要價值。

二、Hilbert 觀點 vs.歷史角度

現在，根據 PCK，我們回來咀嚼〈回顧〉一文引述的 Hilbert 一段話：

數學中每一步真正的進展都與更有效的工具和更簡潔的方法之發現有關，這些工具和方法同時有助於理解已有的理論，並把陳舊、繁瑣的東西拋到一邊，這是數學發展的基本特質。

旨哉斯言！不過，卻擺脫不了數學家本位的『現身說法』。如果我們運用它來回顧中（小）學數學時，也應注意龔、張兩位作者所指出的『循序漸進過程』之重要，因此，『低級的』數學之學習仍然有其必要。

在〈回顧〉一文中，龔、張兩位作者所提供的例證，可以參考該文第二節『算術與代數』，以及第三節『幾何與三角』。顯然，他們的假設似乎是：Hilbert 的觀點符合歷史的實際情況。我們不想在此爭論 Hilbert 的史觀，這是因爲即使他的觀點合宜，也並不表示一定適合充當中小學教學的指引。這種迷思只要不打破，涉及『實作理論』(practical theory) 的數學教育，大概很難提升，而稍有名氣的數學家基於使命感，也容易『隨性地』介入教育場域。如此，數學教育改革的爭議終將沒完沒了。

有關『算術與代數』這一節的內容，龔、張兩位作者所舉的例證，是聯立方程組與一元高次方程之解法。至於有關算術與代數之區別或關連，他們指出算術爲『計算的技術與方法』，代數則是『以符號代替數字』。這種刻畫完全忽略了這兩個分支的本質差異，譬如說吧，等號『＝』的意義在這兩個學科中就完全不同，這是數學教育研究老早發現的成果之一。此外，韋達 (F. Vieta) 的符號法則 (symbolism) 所代表的意義，也不應輕忽待之，這是因爲如此一來代數與算術的研究對象，終於有了清楚的劃分，亦即前者對象爲形式 (form)，而後者爲數目 (number)，而這往往是初學代數的中學生之罩門。

儘管如此，我們也必須指出在符號法則 (1590 年代) 問世之前，卡丹諾 (G. Cardano) 與斐拉利 (Ferrari) 的三、四次方程解法早已完成 (1545)。因此，我們很難將方程論歷史的

巨大突破，歸功給符號法則。事實上，卡丹諾也已經察覺二、三次方程的根與係數關係，只是無從說明其意義。這一史實，更提示『符號』在數學史上，並不適合作爲區分算術與代數的單一指標。譬如，《九章算術》用以解聯立一次方程組的『方程術』，就完全缺乏代數符號，但是，當時的中國數學家卻能發展出等價於高斯消去法 (Gaussian elimination method) 的解法，可見代數符號的表徵，絕對不是必要條件！

再者，有關中學代數到大學近世代數的平滑銜接，也沒有受到龔、張兩位作者的應有關照，無形中削弱了『回顧』的力道，實在相當可惜。對於很多的中學數學教師而言，他們始終無從理解高中與大學的代數何以大大地不同！究其原因，代數方程式理論顯然未曾扮演媒合的角色。因此，如果數學家在講授近世代數之前，有機會複習代數方程式的根與係數關係之意義，並『複製』J. L. Lagrange 的『失敗』經驗，那麼，我們對於前述 Hilbert 的史觀，或許就可以更深入理解了。

三、貼近《幾何原本》的必要性

在〈回顧〉一文第三節『幾何與三角』中，龔、張兩位作者花了很多篇幅介紹歐幾里得的《幾何原本》。因此，他們對於這一部數學經典是否『忠實』，筆者基於數學史的教學經驗，不得不吹毛求疵，希望作者與讀者多加包涵才是！

首先，《幾何原本》共有 13 冊，其中含 5 個設準 (postulate)，5 個公理 (common notion)，468 個命題 (proposition)（含定理與作圖題），因此，〈回顧〉一文所謂的『119 個定理和 365 條定理』不知所據爲何？至於第五設準（或如〈回顧〉一文所說的『公設』）的引文：

> 若一直線落在兩直線所構成的同邊內角和小於兩直角，那麼把兩直線無限延長，它們將在內角和小於兩直角的一側相交。

則有明顯的謬誤！請參照英文版本如下：

> That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

其中，『無限延長』顯然譯自 “if produced indefinitely”。其實，“indefinitely” 根本沒有『無限』(infinitely) 的意思。此外，如果共平面的兩直線相交（亦即『不平行』），則顯然不需要經過『無限延長』的程序。不信的話，請再參考《幾何原本》第一冊第 23 定義：

> *Parallel* straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

請注意在『平行』情況下，兩直線的延伸也是 “indefinitely” 而已！

在第五設準的英文版引文中，一開頭的 “That” 也很値得討論，這是因爲它涉及了古希臘演繹科學（如數學知識結構）中的 “postulate” 與 “common notions”的地位之不同，只是我們現在只用 “axiom” 一詞，以是 “postulate” 與 “common notion” 的差異，就變得不重要了。事實上，不同於五個公理，在五個設準之前，有一個共用的英文句子如下：

> Let the following be postulated:

如此一來，“That” 的出現當然就十分必要了。

四、其他反思

〈回顧〉一文也說明了非歐幾何的出現經過，不過，未曾提及 Giovanni Saccheri (1667-1733)，則是一大不足。因爲即使不引述康德 (I. Kant) 的歐氏幾何真理之主張，Saccheri 在認識論上的『盲點』，也值得大書特書，否則高斯、Bolyai 與 Lobatchevsky 的『非歐革命』就沒有太大意義了。此外，有關非歐幾何與微分幾何之關連，〈回顧〉一文的處理，也忽略了歐拉與高斯在古典微分幾何（尤其是曲面論）上的不朽貢獻，因爲如此一來，微積分的角色好像毫不相涉了。這對於『循序漸進』的學習策略而言，是一個相當奇怪的安排，應該注意修訂才好。

另一方面，〈回顧〉一文有關『三角函數』的介紹，也給了我們十分牽強的印象。其實，在古希臘時代，三角學的理論發展，主要得力於現在所謂的『托勒密定理』，因此，古希臘三角學當然離不開幾何學。在目前的高中三角課程單元中，過度代數化已經成爲很多教師心中的痛。因此，當我們追本溯源時，或許應該將三角學回歸到幾何母親的懷抱，如此，我們進行教材連貫時，才容易掌握一些數學本質的制高點。試想如果三角離不開幾何，歐拉公式也離不開幾何，那麼，幾何意義的銓釋，當然就可以成爲代數化的三角學之高觀點了。

四、結語

總之，有關中學數學如何回顧，筆者當然有所期待於數學家社群，可以貢獻更細緻的討論。其實，龔昇、張德建兩位作者如果願意『拉長戰線』，從更多的面向（歷史的，教育的，甚至哲學的）切入，那麼，有很多看來有一點急就章的論述，一定可以得到更多的關照，而讓全文結構顯得更加圓潤。如此，講題即使多寫一點（不只五講），那又何妨呢？還有，中學數學似乎也值得多談一點，讓『回顧』時有本有料！

另外，筆者也希望龔昇、張德建兩位作者暫時將 Hilbert 拋開（尤其是他的那兩句箴言），大可不必言必稱 Hilbert！這就好比我們在『統整規範』各色各樣的幾何學時，也不必非按 Klein 的變換群不可（事實上，也不可能！）一旦累積大數學家的多元觀點之更多『籌碼』時，或許我們自己的主張，就會不知不覺地現身了。金庸寫張三豐傳授張無忌太極拳時，一直問他『忘記』了沒？這或許是我們所期待的境界吧！

參考文獻

Klein, Felix (1994).《高觀點下的初等數學》，台北：九章出版社。
毛爾 (2000).《毛起來說三角？》，台北：天下遠見出版公司。
洪萬生 (1999).〈誰發明了代數學？〉，洪萬生，《孔子與數學：一個人文的懷想》，（台北：明文書局），頁 157-168。
洪萬生 (2006).〈數學史如何呈現：評價數學普及書籍的簡易法則〉，洪萬生，《此零非比０：數學、文化、歷史與教育文集》（台北：商務印書館），頁 143-146。
洪萬生 (2006).《此零非比０：數學、文化、歷史與教育文集》，台北：商務印書館。
莫理斯．克萊因（趙學信、翁秉仁譯）(2004).《數學：確定性的失落》，台北：商務印書館。
顏志成 (2003).〈哥廷根學派的領導人－Felix Klein〉，《HPM 通訊》6(4): 8-14。
蘇惠玉 (2001).〈三角函數公式的托勒密方法〉，《HPM 通訊》4(5): 12-14。

蘇惠玉 (2006).〈三角形面積教學的縱深與統整〉,《HPM 通訊》9(4): 41-46。
Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Rainbow of Mathematics*. London: Fontana Press.
Heath, Thomas L. (1956). *Euclid: Thirteen Books of Elements*. New York: Dover Publications, INC.
Klein, Felix (1908/1924/1945). *Elementary Mathematics from Advanced Viewpoint: Arithmetic・Algebra・Analysis*. New York: Dover Publications, INC.
Klein, Felix (1908/1925/1945). *Elementary Mathematics from Advanced Viewpoint: Geometry*. New York: Dover Publications, INC.
Maor, Eli (1998). *Trigonometric Delights*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂**PDF**電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹 (及人中學)、羅春暉 (二重國小)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）、郭志輝（內壢高中）、程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。

駒場教養學部的傳奇（之二）

交通大學通識中心　李弘祺教授

東京大學的通識教育是由它在駒場校區的教養學部來負責的。教養學部的創立已經將近六十年，我在<駒場教養學部的傳奇>一文中，對它的創辦人矢內原忠雄的生平已經有了簡單的介紹。

這一次我回到東京大學，拜訪了渡邊浩和小島毅兩位教授，對東大的教養學部有了更進一步的認識。渡邊浩是東大法學院的教授，曾擔任東大的副校長，專門研究中國法制史，當然對日本法學也有精深的研究。小島毅專門研究中國近世史（相當於宋元明歷史），但是對日本早期的思想史也鑽研頗深，他最近的新書談的是「靖國」的觀念，可見他敢於處理棘手的問題，不憚潮流，是不容易找到的學者。渡邊浩由於擔任過東大的副校長，所以他的立場多少會反映官方的看法。小島是本部專業學門的教授。但也在教養學部開課，對本部教授與教養學部教授之間的關係，有切身的現實說法。綜合他們兩人的說辭，可以得到比較持平的觀點。

通識教育是人言人殊不容易有共識的「一門」學問。我也知道來參與它的工作，吃力而不討好。不過，我還是從「博雅」或「博文」教育的觀點，來努力從事它的推展。今天世界最好的大學絕對是哈佛大學，而哈佛大學的大學部（即 Harvard College）是全校最有錢、最有力量的部門，也就是說它的教育就是哈佛傲人成就的基礎。哈佛學院的教育就是通識教育：我們一般稱為文理學院也者，就是教育部翻譯為博雅教育的基礎大學教育。我一直瞭解的通識教育正是這樣的博雅（我喜歡用博文，用孔子「博學以文」的理想）教育。

東京大學的教養學部應當是模仿這樣的基礎教育：所有新生都到駒場的教養學部去讀一年級和二年級，然後再選系，陸續到校本部去就讀。換言之，東大入學時，學生並不馬上分系。而只是粗略地分成文科和理科學生兩大類（每一類再次分爲三小類，故一共有六類；轉類過去比較困難，但從 2008 年以後，將大量放鬆）。第二年中才開始選擇他們要去攻讀的學系。

教養學部的教員大概也是本部專業的教員，但他們在教養學部開的課多為跨院系的課，合乎基礎或核心的構想。教養學部專任的教師則屬於一個叫作綜合文化研究科。綜合也者，近於「通識」，教授的主要是人文社會的科目，以「文化」（認同與歧異，這是我的解釋）為貫串的中心關心。三年級以後如果想在這方面繼續攻讀的，便留在駒場，讀所謂的「後期」教養學部。「後期」的學科分爲六門（下面次分各系）：語言情報門（language and information）、超域文化門（interdisciplinary cultural studies）、地域文化研究門（area studies）、國際社會門（social and international studies）、廣域科學之生命科學門（life and cognitive sciences）、廣域科學之相關基礎科學門（basic sciences）、廣域科學之系統科學門（general systems studies）等。這裡的學生的訓練因此強調的是通識，不標榜高深的學術，而重視學生對基本知識的確實把握，顯然以能舉一反三作爲教學方法的根本。

留在駒場繼續攻讀「後期」的學生，數目大約有一百人（每年全學部收入的新生數目約為三千人）。由於駒場的教育注重廣泛的文化素養，因此它的畢業生一般來說，都具有比較好的語言能力，畢業後成爲企業界的最愛，遠勝於在本部讀書的專科學生。東大的教

養學部是從通識教育的理念發展而成，可見它的重要性。美國現在有許多 liberal studies 的碩士課程，其發展蓬勃就是因爲警覺到全球化需要有具備不同文化素養的人才，因此提供文化專攻的課程，希望給那些具有管理或專業學位的人有基本文化的認知，以便在全球化的現代世界裏，能具有競爭的優勢。最近，卡內基基金會就曾經撥款專門研究管理學如何可以借助人文學科的訓練。這些發展與東大的觀念正是不謀而合。當代日本有名的記者若林正丈，他講的一口非常流利的中文，臺灣許多學者應當對他不陌生。他就是東大教養學部的教授。

東大本部的教授不免對教養學部的教授有瞧不起的情形，但是由於教員並不死硬地分成兩種，而且實際上，在兩部門都可以開課，因此，歧視的情形並不會造成太大的問題。例如小島教授，他除了在本部的文化思想學科擔任教授之外，也在教養學部開課。教授們對自己拿手的科目，常常爭取要到教養學部去開課，理由很簡單，因爲這樣他可以吸引學生來跟自己念書。

哈佛的博雅教育是美國優秀大學所共同採用的模式。他的特色，如上所說，與東大的「前期」教養學部是一樣的。當年矢内原忠雄設立教養學部時，應當是仿造美國的 liberal arts education，這一點我想沒有問題。可見當代世界上第一流的大學，都以博雅教育為它的高等教育的基礎。台灣只是全球化了的世界的一個邊陲地區，只是一個難受重視的附庸經濟體，因此完全採行美國或東大的模式(東大的教養學部雖未為日本普遍採行，但渡邊浩告訴我說現在模仿的越來越多)或許沒有真正的需要，也或許時機還沒成熟，但思考通識教育，有樣學樣，我認為至少在想像或憧憬的過程中可以用它來作為指涉的參考。(九六、五、十四　晨 於交大初稿。九六、五、十六修訂。本文修訂完畢，消息傳來，哈佛大學通識教育的改革已經於今天定案。這是近年來美國高等教育的大事，謹誌於此，作為紀念。)

參考文獻：

李弘祺 (2007).〈駒場教養學部的傳奇〉，《HPM 通訊》10(4): 1-3。

從圓族(系)的教學中成長--數學史的幫助

台師大數學系碩士班研究生 王鼎勳

一、 研究動機

在翰林出版社發行的《數學天地》第 23 期 (NO.23) 中，有一篇〈用向量來看圓系〉，將圓系的由來與好處，完整且清楚交代了一次，相信各位教育界的先進應該早能將這個方便的工具上手。而今天我的報告的方向，就不再贅言該文提過的內容。[1]

在教學時，圓系的使用是方便的，但常碰上學生問「為什麼？」，要把它像〈用向量來看圓系〉一樣講清楚說明白，又覺得曠日費時，講完學生也不見得聽懂，這個時候便要開始傷腦筋，到底要不要介紹。筆者的經驗中，「教了」真的好處很多，但也很浪費時間，「不教」遇上一些較特殊的命題，雖然可用替代方案但又不方便。在兩難之際，通常筆者會選擇「教」，所以，只剩下一個問題，如何**合理且較快速**的讓學生接受『族』(或『系』)的想法呢？便是本文的目標。從數學史的角度來切入，看看能否解決老師的「麻煩」。

二、窮竭法的由來

哲學家柏拉圖 (Plato，427B.C.－347B.C.) 在雅典創辦著名的柏拉圖學園(Academia)，[2]他專心致志地教學、著述和培養數學家，[3]幾乎所有前第四世紀重要的數學成就，都是柏拉圖的朋友或學生的傑作，[4]柏拉圖學園成為早期畢氏學派和後來長期活躍的亞歷山大學派之間聯繫的紐帶。歐多克索斯 (Eudoxus，約 408B.C.－355B.C.) 是該學園最著名的人物之一，他創立了同時適用於可公度量及不可公度量的比例理論。[5]

歐多克索斯除了提出比例論 (theory of proportion) 解決了不可公度量的問題，[6]又提出窮竭法 (method of exhaustion) 初步克服了動點成線，動線成面，動面成體。換言之，線、面、體分別由點、線、面組成。但是，點沒有長度，如何累積出有長度的線段？同理，線段只有長度，沒有寬度，即線段沒有面積，如何累積出有面積的平面領域？面有長度與寬度，但沒有厚度，即面沒有體積，如何累積出有體積的空間領域？這些問題更深刻難纏，直到微分法與測度論 (measure theory) 出現才完全解決。這是他對數學的兩個偉大貢獻。[7]

窮竭法 (method of exhaustion) 一詞有雙重意義。一是將所有可能的情形都一一考慮到

---

[1] 此篇文章為北一女中蘇俊鴻老師所寫，蘇老師目前也是師大數學系的博士班的研究生，專長是數學史。此篇文章的主要內容，據筆者與作者討論的結果，作者指出其動機或目的，應為如何導出圓族(系)。

[2] 梁宗巨著《世界數學通史》上冊，頁 273。提出：這所學園一直存在到 529 年拜占庭皇帝查士丁尼(Justinian)下令關閉所有的希臘學校為止，前後延續九百多年，時間之長在歷史上也是罕見的。以學園為中心，自然形成一個相當強大的學派。

[3] 參閱M.克萊茵著、張祖貴譯《西方文化中的數學》，頁 31。

[4] 參閱林炎全、洪萬生、楊康景松譯《數學史-數學思想的發展》上冊，頁 47。柏拉圖本身對於這些作品的潤飾下了許多工夫。

[5] 參閱梁宗巨著《世界數學通史》上冊，頁 277-279。根據亞里斯多德的記述和後來許多評注家的分析，歐幾里得《幾何原本》的卷V和卷XII主要取材於歐多克索斯的工作。當然有的工作還散見于卷VI，X和XIII之中。

[6] 畢氏學派認為數是實體的最根本成分，數如果離開意念的實體就不能存在。不可公度量或無理量的發現，或許是這個學派最大的貢獻，但卻與他們的信條抵觸。他們認為萬物都可以用數來表示，所謂數，就是自然數與分數。可公度量即為有理數。

[7] 請提醒自己歐多克索斯是希臘時期的人物，卻已有微積分的思維在裡頭了。

的一種證明方法，現在譯爲『窮舉法』；另一種是指某一個圖形(如圓)被另一個圖形(如內接正多邊形)所逐步『窮竭』(填滿) 譯爲『窮竭法』。[8]窮舉法即將所有的狀況舉出，再逐一將不可能的狀況討論完畢，即得證。[9]而所謂窮竭法的原理是指：假設 M_0 與 ε 爲任意給定的兩個幾何量（如長度、面積或體積等等，因此它們皆爲正的量，我們想像 M_0 很大，ε 很小）。從 M_0 減掉大於等於形$\frac{1}{2}M_0$的量，剩下M_1；再從 M_1 減掉大於等於$\frac{1}{2}M_1$的量，剩下 M_2；仿此不斷地作下去，得到數列 $M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots$，那麼就存在某個自然數 n，使得$M_n < \varepsilon$。我們不能將『窮竭法』完全歸功於歐多克索斯，但畢竟從他之後，整個『窮竭法』的方法便定型了。

而本文需要的概念 (方法) 即爲窮舉法，筆者的作法是將**代數意義**與**窮舉法**結合便可使原本不容易理解的『族』(或『系』) 的想法，轉化成較容易的方式。當然，前提是學生的代數意義可以快速轉換成幾何意義，這個方法才快得起來，而通常教授圓族（系）時，已經是高二的學生了，一般的幾何圖形與代數意義的連結應不成問題才對。

三、直線族（系）

從代數意義上通過兩直線的交點，得到的第三條直線爲什麼可以用其他兩條直線表示呢？

以代數明之，$\begin{cases} L_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ L_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$，若$L_1 \cap L_2 = P(x_0\ ,y_0)$，則過$P(x_0\ ,y_0)$的直線$L$可表爲$\alpha L_1+\beta L_2=0$，亦即$L:(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)=0$，根據窮舉法知$L:(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)=0$爲一個**二元一次方程式，其形必為直線**，故只須驗證$P(x_0\ ,y_0)$帶入L是否成立即可：

$$\begin{aligned}&(\alpha a_1+\beta a_2)x_0+(\alpha b_1+\beta b_2)y_0+(\alpha c_1+\beta c_2)\\ &=\alpha(a_1x_0+b_1y_0+c_1)+\beta(a_2x_0+b_2y_0+c_2)\quad (\because P\in L_1 \wedge P\in L_2)\\ &=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0\end{aligned}$$

也就是說L爲過$P(x_0\ ,y_0)$（亦即L_1與L_2交點）的任一直線。得證！[10] 同樣的概念可以類推到平面族（系），現在便不多做介紹了，[11]以下來看看主角圓族（系）又是如何推導呢？

四、圓族（系）

教到圓方程式時，一般而言會從定義出發，先導出圓標準式：$\Gamma:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，再將圓標準式展開，而得到圓一般式：$\Gamma: x^2+y^2+dx+ey+f=0$。接著，應該會討論配方的狀況：

$$\Gamma:\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{d^2+e^2-4f}{4}\quad (=k)$$

(i) 當$k>0$：Γ爲一圓。

---

8 參閱梁宗巨著《世界數學通史》上冊，頁 280。

9 此法現今歸類到反證法中。

10 直線族的想法的幾何理論的根據，應爲法向量線性組合的唯一性，而此僅利用代數式的幾何意義，讓學生較容易連結。

11 平面族的想法與直線族一樣，還是可以利用法向量的線性組合得到。

(ii) 當 $k=0$ ：Γ 爲一點。

(iii) 當 $k<0$ ：Γ 沒有圖形。

換言之，所有 $\Gamma: x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 退化或沒退化的情形便只有三種，也因此若兩圓 $\begin{cases} C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases}$ ，且兩圓的交點 $P(x_1\ ,y_1)$, $Q(x_2\ ,y_2)$ ，過 C_1 與 C_2 交點的所有圓方程式 C ，皆可表爲 $C:\alpha C_1+\beta C_2=0$ ，也就是要驗證 $\Gamma:(\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)y^2+(\alpha d_1+\beta d_2)x+(\alpha e_1+\beta e_2)y+(\alpha f_1+\beta f_2)=0$ ，Γ 這個圖形必過 $P(x_1\ ,y_1)$, $Q(x_2\ ,y_2)$ 兩點，[12]且當 $\alpha+\beta\neq 0$ （可同除 $\alpha+\beta$ ），[13]得到 $\Gamma: x^2+y^2+d'x+e'y+f'=0$ 它便是圓的一般式，此時只剩一個概念要驗證，「它有無退化？」或「它爲什麼一定是圓？」，此時再引入窮舉(竭)法，稍作說明：

(i) Γ 不可能沒有圖形，因爲 $P(x_1\ ,y_1)$, $Q(x_2\ ,y_2)$ 在 Γ 上。

(ii) Γ 不可能是一個點，因爲至少 $P(x_1\ ,y_1)$, $Q(x_2\ ,y_2)$ 在 Γ 上，已有兩個點了。

由 (i)、(ii) 與窮竭法得證，過過 C_1 與 C_2 交點的所有圓方程式 C ，皆可表爲 $C:\alpha C_1+\beta C_2=0$ ，也就是 $C: x^2+y^2+d'x+e'y+f'=0$ ，如此便可較輕易的介紹或引入圓族（系）的想法。

五、結語

從圓族（系）的教學活動中，引入窮竭法裡面可以得知：在教學上引入數學史料時，學生的回饋通常都是正面的，學生會訝異爲何兩千多年前，歐多克索斯（Eudoxus，約 408B.C.－355B.C.）可以想出窮竭法，而窮竭法，竟可以輕易的將圓族（系）的概念解決，也因爲有如此的互動，學生會較輕易的上手，而將數學史引入教學的模式爲何？應該沒有固定的模式才對，它可以是歷史、亦可以是軼事、也可以是故事、甚至是數學的推導過程…。香港大學蕭文強教授曾說：「**數學史就是數學本身！**」我認爲，我們沒有必要將數學史獨立出來教授，亦不應該抗拒教授數學史。[14]數學史只是教學策略的一部分，如果我們以「不考就不教」或「要教就要考」的態度來處理數學史，那麼對整個教學而言，將會是十分悲哀的！亦正如蕭教授所說：「**吸收和運用數學史，既充實了自己，亦豐富了教學。**」我認爲，無論是我的學生，或者是我自己，都是研習數學史的得益者！蕭文強教授有一句很有意思的話：「**為教人而教書，由教書而教人。學無止境，教無止境。**」[15]共勉之！

---

[12] 因爲 *P*、*Q* 兩點代入 Γ 後，必使得 $\alpha C_1+\beta C_2=0$ ，因此 *P*、*Q* 兩點必在 Γ 上。

[13] 若等於 0，Γ 爲一次式，不滿足題意的要求，題目要求圓。

[14] 這便是一般人的迷思了，一般以爲數學史是歷史，應與數學教學無關。

[15] 筆者有幸於 2006 暑假前，與蕭教授與HPM團隊參與研討會，於座談中所提。

中國計算球體積的方法：牟合方蓋

台師大數學系大四學生　洪弘倫、林政勳、吳宜峻

一、前言

在高中時期，相信很多人便已經接觸到圓面積以及球體積公式，對於圓面積，大家都很欣然的接受以 π（圓和以圓半徑爲邊長的正方形面積的比值）進行運算，但是對於球體積，則是囫圇吞棗的硬記，只是模糊的知道似乎可以用微積分進行證明，而微積分卻是在球的體積公式一千多年後才出現，在這之前球體積公式早被大家所接受運用，在西方世界裡，球的體積早被阿基米德提出並証明，而中國則是在《九章算術》中出現$16D^3/9$（D 爲直徑），之後被劉徽指出此公式誤差過大，進而提出**牟合方蓋**這個特殊的立體圖形想修正公式，可惜卻無法計算出其體積，直到一百多年後，才由祖沖之父子延續其想法，算出牟合方蓋的體積，並修正球體積公式。

那麼**牟合方蓋**到底是什麼呢？爲何這個問題要過一百多年才有人解決呢？計算這個立方體的體積難在何處呢？以下我們先爲大家介紹劉徽及祖沖之父子的生平事蹟，再進一步分享他們對於球體積所提出的奇特想法。

二、劉徽的生平

劉徽（公元 263 年左右）中國魏晉年間人。籍貫是淄鄉 (今山東鄒平)，生卒年不詳。

據《隋書・律歷志》(公元 7 世紀)記載，他於公元 263 年注釋《九章算術》。劉徽在該書序中自敘說「徽幼習《九章》，長再詳覽」，可知他早年就學習過《九章算術》，成年後又繼續深入研究。他除了注釋《九章算術》外，還撰寫了《重差》作爲該書第 10 卷。唐初以後，《重差》以《海島算經》爲名獨立成書。《九章算術》是中國古代流傳下來的最重要的數學著作，幾乎集中了秦漢時期的全部數學知識。劉徽全面論述了《九章算術》所載的方法和公式，指出並糾正了其中的錯誤，在方法和理論上做出傑出貢獻，成爲中國古代數學理論的奠基者。他的主要貢獻有：

・創立割圓術、運用樸素的極限思想證明圓面積公式及計算圓周率，得到近似值，得到 π 的近似值爲 3.14。

・發展天文觀測中的重差術，提出重表法、連索法、累距法三種基本方法；

・重視邏輯推理，同時又注意幾何直觀的作用，採取「析理以辭，解體用圖」的注釋方法；

・發展了「率」的理論、齊同原理和出入相補原理；

・提出所謂的「劉徽原理」，並用極限思想對之作了證明。

在求體積問題上，劉徽給出了 4 種稱爲「棊」的立體模型：立方、塹堵、陽馬、和鱉臑，其中，鱉臑並非實際生活中所會用上之物品，但沒有鱉臑便無法計算陽馬之體積，而沒有陽馬便無法進一步計算錐、亭(台)之類的體積，此外，劉徽指出《九章算術》中球體積公式誤差過大，而設計了「牟合方蓋」(直徑相同的兩個正交圓柱的公共部分)，爲日後祖暅原理的建立指明了方向。

總之，經過劉徽注釋的《九章算術》影響深遠，支配中國數學的發展 1000 多年，成為東方數學的代表作，劉徽應居首功。

三、祖沖之父子的生平

祖沖之，字文遠 (公元 429-500 年) 祖籍范陽郡道縣 (今河北省淶水縣北)人。他生活在南北朝時代，出身於天文、曆算世家，是劉宋王朝奉朝請祖朔之的兒子。他歷任徐州從事吏、公府參軍、婁縣令、竭者僕射、長水校尉等職。

祖沖之的傑出成就主要在數學、天文曆法和機械三方面，他研究過《九章算術》及劉徽注。在天文曆法方面，祖沖之創製了《大明曆》，最早把歲差引進曆法。可惜終其一生《大明曆》都沒有機會使用，直到其子祖暅在南齊任官時，才獲得頒布使用，這是南齊天監八年 (509 年)，距離祖沖之謝世已有五年，而距離他制定那一年 (大明六年，公元 462 年)，則更是長達 47 個年頭了。此外，祖沖之算出地球繞太陽一周所需的時間是 365.24281481 日等數據，和現在用精製的儀器得到的數據 365.2422，他的數字準確到小數第三位，在一千多年前，這成果是值得驕傲的。

祖沖之父子的數學成就十分豐富，《綴術》是他們的代表作，唐初被列入《算經十書》之一，在明算科中，修習時數高達 4 年，可惜，現在已失傳。在其他的著作中，我們可知他們的數學成就有圓周率、球體積和開帶從立方等三個方面。在圓周率方面,祖沖之接續了劉徽的工作，算到了圓內接正 24576 邊形，結果得到了圓周率 π ，提出了 $3.1415926<\pi<3.1415927$，他並且取 22/7 作為約率，及 355/113 作為密率 (現稱祖率)。可惜，隨著《綴術》的失傳，使我們很難掌握「祖率」的由來。祖暅亦解決了魏晉時期劉徽所留下的計算球體的體積，其中運用到「冪勢既同，則積不容異」的原理 (現稱祖暅原理)，該原理在西方亦稱卡瓦列利 (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647) 原理。

機械學方面，他設計製造過水碓磨、銅制機件傳動的指南車、千里船、計時器等等。在音律表現在他「當時獨絕」的「解鐘律博塞」。所謂「博」與「塞」是指古代兩種遊戲，今已失傳。不過，史載稱玩家需要懂一點數學，祖沖之也因善解這些遊戲之奧妙而馳名於當時。著實是歷史上少有的博學多才的人物。

四、祖沖之父子如何完成牟合方蓋

先看一則在《九章算術》給定球體積求半徑的題目。《九章算術》卷四〈少廣〉:

今有積四千五百尺。問為立圓徑幾何？

答曰：二十尺。

又有積一萬六千四百四十八億六千六百四十三萬七千五百尺。問為立圓徑幾何？

答曰：一萬四千三百尺

開立圓

術曰：置積尺數，以十六乘之，九而一，所得開立方除之，即立圓徑。

在《九章算術》中，球的體積公式為$V=\dfrac{9}{16}D^3$， D 為球的直徑(即上所指「圓徑」)、V 為球的體積(即上所指「積尺」)。這個公式怎麼來的呢？

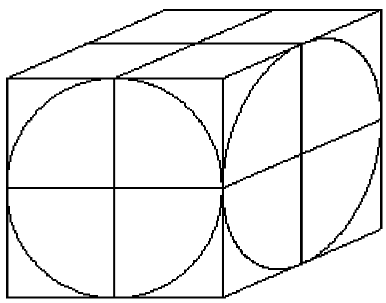
在一立方體內取內切圓柱，則圓柱體爲立方體體積的四分之三(此依周三徑一之率)，古人將圓柱體視爲立方體，誤認內切球體積爲圓柱體體積的四分之三，所以得到球體積爲立方體體積的十六分之九，將球體積轉化成同體積之立方體再開立方即爲立圓徑。劉徽明白指出此公式是有問題的，而且真正橫截出的圖形是牟合方蓋形。

開立圓劉徽注釋：

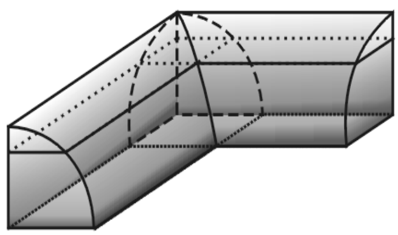
立圓，即丸也。為術者，蓋依周三徑一之率。令圓冪居方冪四分之三，圓囷居立方亦四分之三。更令圓囷為方，率十二；為丸，率九；丸居圓囷又四分之三也。置四分自乘得十六分，三自乘得九，故丸居立方十六分之九也。故以十六乘積，九而一，得立方之積。丸徑與立方等，故開立方而除，得徑也。然此意非也。

接著，劉徽說明牟合方蓋如何得出：對立方體先截出其內切圓柱體，接著再橫圓截出(見圖一)，得牟合方蓋，取八塊中的一塊即圖二，有點像是生活常見的雨傘，不過雨傘的傘骨要修正成四隻。劉徽也指出球與牟合方蓋體積比爲π：4 即圓率比方率，並非九章算術所誤認之球與圓柱體的體積比。

取立方棊八枚，皆令立方一寸，積之為立方二寸。規之為圓囷，徑二寸，高二寸。又復橫圓之，則其形有似牟合方蓋矣。八棊皆似陽馬，圓然也。按合蓋者，方率也。丸居其中，即圓率也，推此言之，謂夫圓囷為方率，豈不闕哉？



圖一



圖二

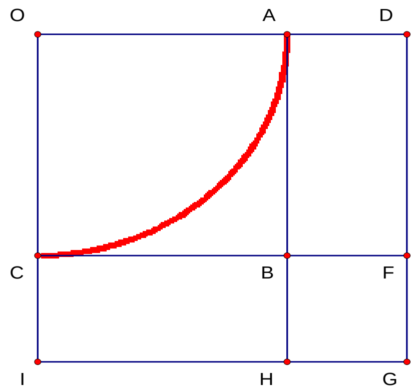
不過，劉徽始終沒求出牟合方蓋的體積，並期待能言者出現。

欲陋形措意，懼失正理。敢不闕疑，以俟能言者。

二百年後，祖沖之祖晅父子承繼了劉徽的工作，完成牟合方蓋的體積計算公式，球體積公式也隨之解決。祖晅之開立圓術曰：以二乘積，開立方除之，即立圓徑。($D=\sqrt[3]{2V}$)

如 GSP 所示，立方體被截成四個部份。

唐李淳風註：於是立方之棊分而為四：規內棊一，謂之內棊，規外棊三，謂之外棊。先觀察等高截面的情形。內棊截面爲正方形 OABC，外三棊截面分別長方形 ADFB、BFGH、CBHI。外三棊的截面積合爲正方形 ODGI 減去正方形 OABC



圖三

即$\overline{OD}^2-\overline{OA}^2$，再觀察直角三角形 OAJ 得到$\overline{OD}^2-\overline{OA}^2=\overline{AJ}^2-\overline{OA}^2=\overline{OJ}^2$，則等高時外三棊截面積合同於一倒立陽馬的截面積，(因三角形 KLM 為等腰直角三角形) 參見 GSP：

> 以句股言之，令餘高為句，內棊斷上方為股，本方之數，其弦也。句股之法：以句冪減弦冪，則餘為股冪。若令餘高自乘，減本方之冪，餘即內棊斷上方之冪也。本方之冪即內外四棊之斷上冪。然則餘高自乘，即外三棊之斷上冪矣。不問高卑，勢皆然也。…按陽馬方高數參等者，列而立之，橫截去上，則高自乘與斷上冪數亦等焉。

現已證得等高外三棊截面積同於一倒立陽馬截面積，且因兩物等高時截面積一樣者，其體積相等：

> 夫疊棊成立積，緣冪勢既同，則積不容異。

陽馬體積為立方體體積的三分之一，則推得內棊體積占立方體體積的三分之二，將八個內棊合成一牟合方蓋，且已知球體積比牟合方蓋體積為π：4，故得球體積 $V=\frac{2}{3}D^3\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}D^3$：

> 三分立方，則陽馬居一，內棊居二，可知矣。合八小方成一大方，合八內棊成一合蓋。內棊居小方三分之二，則合蓋居立方亦三分之二，較然驗矣。置三分之二，以圓冪率三乘之，如方冪率四而一，約而定之，以為丸率。故曰丸居立方二分之一也。

五、結論

我們希望能幫助讀者比較清楚地了解祖沖之父子整個推導的過程，所以設計了動態 GSP 的牟合方蓋。一開始做出來的圖形只有牟合方蓋主體，而且無法做旋轉看起來比較辛苦，討論過後決定將它修改成動態立體圖，為了這個改變幾乎是整個重新開始。我們參考陳創義老師三維坐標系的 GSP 網頁，做出可以自由旋轉的三維坐標軸，接著，我們計算所需要的曲線將它們描繪在坐標空間上，完成牟合方蓋主體的動態圖形。製作解析牟合方蓋的部分，設計了可以自己操作的參數 d，用來控制內外棊的分離與組合，希望能對讀者的想像有所幫助。

經過上面的介紹，相信大家對於球體積的由來能夠有另一方面的了解，不禁嘆服老祖

先豐富的想法，這也讓我們知道中國數學有著凌駕於西方數學之上的輝煌一面。在前文球體積的計算中，牟合方蓋便是一個別具特色的想法，其後的祖暅原理更是在一千多年後才由義大利的卡瓦列利所提出，假使大家能夠再進一步的去閱讀劉徽及祖沖之的著作，相信一定能夠對他們在數學上的貢獻有更高的評價，也對他們的努力更加的敬佩。

參考文獻

李繼閔 (2002).《九章算經校證》，台北：九章出版社。

洪萬生 (2004).〈魅力無窮的「祖率」：355/113〉，《HPM 通訊》6(4)：1-8。又，本文也收入洪萬生，《此零非比０》（台北：台灣商務印書館，2006），頁 86-100。

郭書春 (1998).《九章算術譯注》，瀋陽：遼寧教育出版社。

嚴敦傑 (2000).《祖沖之科學著作校譯》，瀋陽：遼寧教育出版社。

參考網頁

科學月刊資料庫

http://book.tngs.tn.edu.tw/database/scientieic/content/1980/00100130/0013.htm

數裡天地

http://www.mikekong.net/Maths/maths-frame.php

HPM 通訊第六卷第四期

http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol6no4a.htm

引用圖文

圖一來自：http://staff.ccss.edu.hk/jckleung/squ_sphe/squ_sphe.html

圖二來自：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_01_4_01/notes.html#foot39