

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）  
 助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第十卷 第六期 目錄 (2007年6月)

- 數學史值得融入數學教學嗎？
- 觀察與推理大考驗(小偵探)學習單
- 論文摘要：《東算家南秉吉《算學正義》之內容分析》摘要

## 數學史值得融入數學教學嗎？

台師大數學系碩士班研究生 黃俊瑋

近年來，不管是數學教科書，或者教師的教學活動，對於數學史料與數學知識之間的互動與融入工作，已漸漸地發展。然而，是否願意將數學史融入課堂之中，往往得視教師之教學信念與自我價值認同。

當被問及將數學史融入數學教學的必要性及效用時，部份教師認為：「我把我該做的事做好，把學生教好，讓他們學會順利解各類數學題，能在考試中得到高分，能順利升學最重要，何必多此一舉地引入數學史？」對於這些「名師」而言，或許他們心中各自早有定見，譬如什麼才是數學課該教的、值得教的，同時，他們也有屬於自己的一套教育哲學與教學方法，能讓自己帶領學生們在考試中戰無不勝立於不敗之地。平心而論，過去，這樣的教學方式與內容，也為國家訓練出許多「選手」與「精英」，然而，數學學習的目的，僅是讓學生懂得很多抽象的數學概念？或者人人成為數學解題高手呢？回憶我們求學經驗中，一向習以為常的教學內容與數學知識，對於大多數學生的學習、成長與將來的生涯真的有意義嗎？

多數學生或許在考試、文憑、升學的威逼之下，勉強地強迫自己學會解決問題，然而，其中有多少學生在畢業之後，仍能憶起過去的數學課中，學過些什麼？又有多少學生在考試之後，就選擇立刻把這些抽象、難以解題的概念與符號一股腦兒地遺忘，趕緊遠離這些充滿挫折的學習經驗？這樣的學習方式與教學的「成果」，真的是數學教育想要達到的嗎？

捫心自問，當身為數學教師的我們，脫離教學之後，這些數學知識、解題訓練對我們而言，又真的具有什麼樣的意義呢？

有鑑於此，筆者認為，數學史融入數學教學，至少提供以下的裨益：

### 1. 引發學生學習動機與興趣

透過數學史料引發學習動機的功能已是老生常談，不少研究顯示，學生的動機、學習態度會影響其學習行為與學習成就。對數學科而言，艱深而抽象的概念、往往遠離生活經

驗，加以現今評量制度之下，考試所帶來的挫折，於是，數學對於大部份的學生而言，除了考試、升學所需為目的，制式的教材內容，往往難以引發學生的興趣與學習動機。這時，適當地引入數學發展史上的相關故事、軼聞趣事、數學家的不同觀念與想法，又或者著名的數學問題等，以作為數學課程中的潤滑劑，可為枯燥的數學課注入活力，有效引發學生學習的動機與興趣。現今數學科普書籍的大量出版，也無非是為了讓學生體會瞭解學習數學的樂趣與妙用，從不排斥數學，進而願意接納數學，產生學習的動機與意願。如同筆者個人經驗，小時候考再多次滿分，也不曾讓我有選擇進入數學系的念頭，然而，因為閱讀了「費馬最後定理」的故事之故，卻令我從此下定心以數學系作為目標。

## 2. 透過對於數學史料的探討，發展更有意義數學教材

從小到大的數學學習以至於數學教學，我們學習了、機械式地記憶並重複地使用過許多數學公式或數學定理，然而，即使多數的數學教師，常常也不知數學公式背後所隱含、所代表的意義，例如：餘弦定理與畢氏定理的差別：剩餘項  $2bc \cos A$ ，若不是從歐幾里得對於畢氏定理所給予的證明的啟發，我們可能很難瞭解餘弦定理中，該剩餘項的所代表的面積意義。又多數學生們所恐懼的三角函數公式，竟能透過托勒密當初的觀點，給予圖形幾何上直觀而簡明的論證與處理。而透過瞭解不同數學家發現圓面積公式的經驗中，我們可以從更多不同的面向來探討、說明圓面積公式的意義。更不難從中發現，一般要求學生所熟背的  $\frac{1}{2}\pi r^2$  公式，並不比半周乘半徑來得高明、具有意義。或者我們從來都不曾瞭解，教科書中，天外飛來一根正焦弦，對於圓錐曲線竟有更深一層意義存在。另外，許多數學問題與數學概念，皆具有社會文化脈絡上的深層意義，透過探討、學習相關數學問題的出現與發展，同時能引領學生對當時社會文化背景，或者在其實用目的上，能得到一番瞭解與認識。

諸如此類的例子很多，因此，當我們從教材內容的精進以及有效教學的角度來看，許多令人望之生畏的數學教材或數學式，皆可透過對於過去數學史相關文本、史料的認識與探討，將之賦予直觀上、連結上、或者不同表徵上的意義，不再像過去那般冷冰冰地令學生發寒、恐懼。因此，數學史的融入，不僅有助於引領學生從學習過程中發現知識的脈絡，進而可以達到有意義的學習效果。

如同洪萬生過去所提到：「數學教師可嘗試介紹幾種不同的畢氏定理證法，然後要求學生說明自己喜歡的是哪一種方法。這是將數學的學習由『作數學』(do mathematics) 提昇至『反思數學』(reflect on mathematics) 的層次上，讓學生從解題的繁瑣中跳脫出來，嘗試由方法論的角度來體會數學，這對於數學的學習也有很大的幫助！」

因此，當數學教師能有效地活用數學史料，一定可以活化數學教材，提昇學習數學知識的意義與學習成效。

## 3. 瞭解數學與數學史本身的價值

數學課程培養我們解決問題的能力，抽象思考的能力。我們過去所經驗的數學課堂，或者數學教科書的內容，絕大多數都是數學概念的引介，以及例題習題的一再練習。課程

設計者以及數學教師，總是以讓學生在短時間內學會很多「有結構的」、「重要的」、幾千年來人類文明逐漸累積發展而形成的數學知識與數學概念為主要目標，並且能綜合融會貫通地應用這些概念與算則，來解決各種數學問題。他們似乎把所有學生都當作未來的科學家、數學家來培養。然而，對於「數學學科」而言，什麼才是最有價值的知識？除了理性的數學知識之外，數學在文化層面的上意義呢？

我們熟知的歷史課程，引領我們瞭解大至人類文化、小至國家民族的發展，國文課當中，我們瞭解並學習了唐詩、宋詞、元曲、小說，以至現代的白化新詩散文等，歷代文學作品演變的發展史，生物課程中學習各類物種的起源與演化史，地球科學與地理，了解大地、及我們週遭環境的改變。然而，數學本身的發展過程，以及對於人類文明的貢獻與意義，是否也值得學生花多些時間與心思來學習與瞭解呢？

身為數學教師，大可不必要求學生編年或記傳地為數學家與數學大發現歌功頌德，但至少藉由學生對數學發展的認識中，瞭解數學之於科學、數學之於人類文明發展的意義與價值，例如：人們從生活經驗中抽象出數的概念，對於人類文明的意義與重要性，人們利用數學方法來尋求瞭解大自然運行的規則，數學之於日常生活以及社會文化上的實用意義，以至近代西方數學的蓬勃發展，對於科技上的突破與發展發帶來的種種影響，以及數學演繹論證方法上的客觀性與絕對性等。數學史本身即是有意義的知識，數學發展之於人類的重要性，可說是絕不亞於科學發展、文學發展或者朝代版圖的變遷或典章制度的演進，那為何過去我們的學習經驗，獨漏這一塊呢？

#### 4. 數學史的認識，可帶給教師在教學上許多不同的啟發。

在許多調查研究中顯示，數學是學生最感到痛苦、挫折、恐懼的學科，數學概念的抽象艱深。從數的發展過程中，我們不難發現，即使是過去諸多偉大的大數學家們，也都曾經對於無理數、負數、零、複數的出現與使用感到困擾與無法理解。此外，函數概念的發展與演變、數學家對於無窮小數的處理與無窮概念的發展過程等，也著實曾令數學家們頭疼不已，又由當時康熙皇帝對於未知數的使用上，所產生的迷惑。無怪乎許多學生在學習數學的過程中充滿疑惑，又總是無從問起，被抽象的數學概念搞得團團轉，而教師們卻又總以達朗貝 (d'Alembert) 式的口吻告誡學生：「努力不懈，自然會生出信心」。於是，學生只能機械式地反覆練習與記憶，為了考試而「背多分」，往往失去了真正理解數學概念的機會。

透過對數學概念發展的認識，數學教師們更能瞭解數學教材與諸多概念之中，最難以理解、容易產生困惑之處，適時地放慢教學步調，加強說明，以助益於學生的學習，同時，也從中學會同理地體諒並包容學生們在數學上失敗的學習經驗。

另外，在數學的發展上，往往自由創造必需先於形式化和邏輯基礎，過於制式而嚴格地規定，反而容易壓抑了創造性的思維與先知卓見，數學史家 M. Kline 曾提及：「幸好當時 (17 世紀) 數學家如此輕信乃至天真，而不是在邏輯上認真窮究，數學於是進入創造成最輝煌時期。」「推動數學最大進步的，是有傑出直覺能力的人，而非具有構造嚴格證明的人。」試想，倘若過去數學才華溢的歐拉 (Euler)，生長在嚴格而制式的教育環境中，恐怕今天的數學史也沒有機會，為其多產而卓越的創見，好好地記上一筆。

然而，現代的直昇機父母們望子成龍、望女成鳳的心態，逼使得許多小學生在未入學前即開始學習心算，入學後參加補習、或者坊間「資優」數學訓練。這些填鴨式的教育，顯然導致多數學生對於數學的印象，就只剩下計算、解題，還有許多負面的情緒感受。數學課堂中，有多少學生的創意想法、多少學生天馬行空的想像力，多少學生對於知識的好奇與熱情，在這種「精英式」的教育方式下一點一滴地被磨逝，一再地受到壓抑。取而代之，無非是制式地填入數學教師們所謂的「數學真理」，或者各種解題「妙招心法」。這樣的教育之下，縱使訓練出再高明、再出色的解題高手，那又如何呢？對於學生的知識與自身的成長真的具有意義嗎？

也因此，透過對數學史的研討與融入教學的過程，相信亦能帶給教師們在教學上以及看待學生的學習上，有更多不同面向的啟發與想法。並引領學生有開擴的數學觀與更深刻的數學價值觀。

綜合以上所提，筆者認為數學史融入數學課堂的助益，期望提供教師設計教學活動之反思與參考，以求讓學生的數學學習歷程，更加具有意義。

## 參考文獻

李文林(2003)：《數學史概論》，台北：九章出版社。

洪萬生(2006)：《此零非彼 0-數學、文化、歷史與教育文集》，台北：台灣商務印書館。

Morris Kline 著，趙學信，翁秉仁譯(2004)：《數學-確定性的失落》，台北：台灣商務印書館。

郭慶章(2006)：〈改弦易調說正弦〉，《HPM 通訊》，9(10)。

蘇俊鴻(2006)：〈餘弦定理可以怎麼教?〉，《HPM 通訊》，9(10)。

# 觀察與推理大考驗(小偵探)學習單

台北市立興雅國中 林壽福老師

## 一、前言

### 【人物介紹】



姓名：伊克斯·普羅雪夫探長  
(取自英文“炸藥”：explosive)  
職業：爆破專家  
專長：拆製炸彈、爆破、思考數學  
題目  
破案率：100%  
破案方法：利用數學方法破解各種  
炸彈機關和陷阱  
特徵：一副墨鏡、八字鬚、動不動  
就要帥、還有不管天氣多熱  
都會穿著一件皮大衣

【北市興雅國中 910 (94 年畢業) 詹祐嘉 繪】

## 二、小偵探養成訓練(二)——歸納推理能力

- |             |                          |
|-------------|--------------------------|
| 第一關 觀察力大考驗  | 第二關 胚騰的推理                |
| 第三關 神奇的回文算式 | 第四關 解讀 $\sqrt{2}$ 司令的勒索信 |
| 第五關 救出人     | 第六關 瓦解毒窟                 |

伊克斯·普羅雪夫探長，也是一位業餘魔術師，這天探長有感而發，化身為記憶天才，他在黑板上寫了許多行長長的數：

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| (1) 11235831459437 | (2) 22460662808864 |
| (3) 33695493257291 | (4) 44820224606628 |
| (5) 55055055055055 | (6) 66280886404482 |
| (7) 77415617853819 | (8) 88640448202246 |
| (9) 99875279651673 |                    |

然後說：「這些數，我只是按題號隨意寫出的。現在不論你說哪一題，我都可以立即背誦出來！」

## 第一關 觀察力大考驗

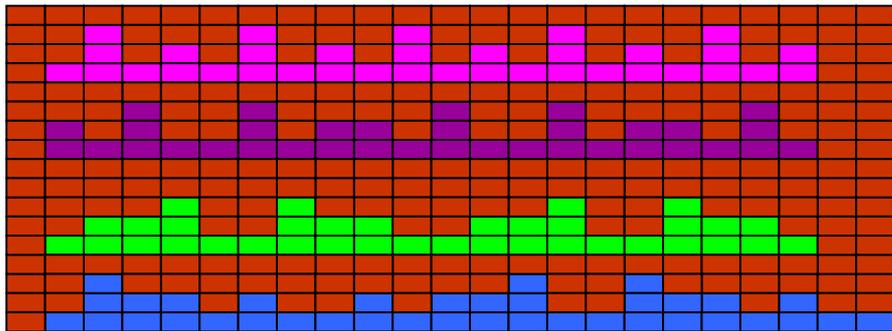
\_\_\_\_\_班 \_\_\_\_\_號 姓名：\_\_\_\_\_

著名的大偵探——伊克斯·普羅雪夫探長，在尤拉市幫助市長一連破了幾樁大案。但是近幾年，探長卻不再公開露臉。他幹什麼去了？研究數學。伊克斯探長本人是位數學家，偵破案件只不過是他的業餘愛好。

近年來數學界一直有一種主張出來，多數教授認為學習數學最主要的目的，是學會胚騰 (pattern)。探長本人閒暇之餘，總喜歡拿幾題胚騰來練練腦袋，畢竟身為一名大偵探，擁有敏銳的觀察力和思考力是不可或缺的。

生活中常常可以看到一些幾何胚騰，如果我們留意觀察和多加思考的話，這些胚騰常能為抽象的代數提供明晰的說明。興雅國中校園步道這片磚牆所彩繪的胚騰，對思考能發揮一些啓迪的作用！請循著探長的引導，完成下列問題：

1、你能說明這四列磚塊的胚騰特徵嗎？(☆☆)



2、如果你必須記住這些胚騰，有什麼好方法？(☆☆)

3、由上而下，第一與第二個胚騰，它們之間有什麼關連？請說說看！  
(☆☆)

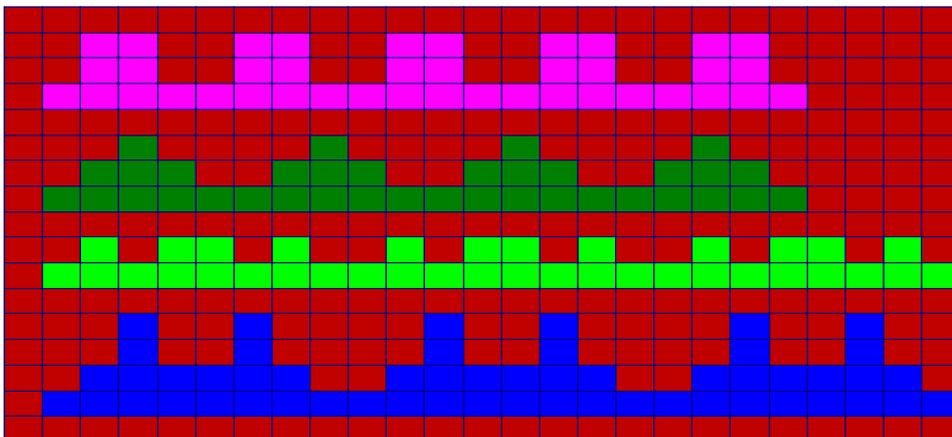
4、由規律性來看，請找出每列胚騰的最小單位？(☆)

伊克斯探長說，或許你會問 1、2、3 是這麼簡單的數，因為  $1+1=2$ ， $2+1=3$ ，這裏面有什麼數學呢？有的，這裡有一個世界著名的數學難題，到現在還沒有人能解決，它是 1842 年比利時數學家卡達朗 (Catalan, 1814~1894 年) 提出的，所以也叫“卡達朗猜想”。你或許知道  $2^3=8$ ， $3^2=9$ ， $9-8=1$  吧！卡達朗認為除了  $x=3$ ， $m=2$ ， $y=2$ ， $n=3$  滿足這樣的關係式  $x^m-y^n=1$  ( $m>1$ ， $n>1$ ) 以外，再也找不到其他整數能滿足以上的等式。這問題幾年前有

狄茲德曼 (Tijotdeman) 用很深的數學工具，證明上面方程式只有有限個解。但現在怎樣證明這有限解只有一個，是很難的問題，用中學的數學知識是不夠解決這樣的問題的。

【再探一番】

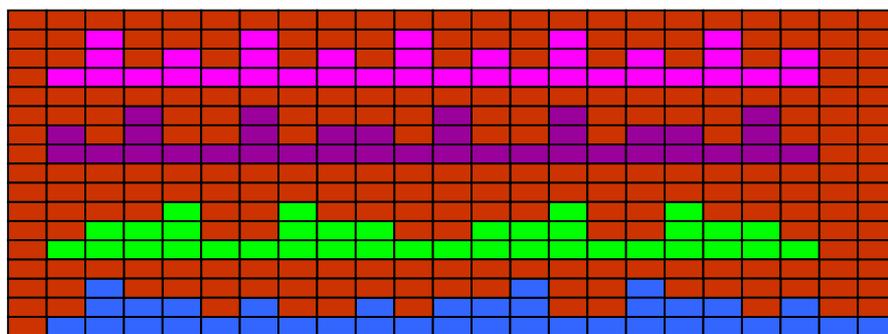
1. 如圖所示，請說明這四列磚塊的胚騰特徵？並寫下你的觀察發現。



## 第二關 胚騰的推理

\_\_\_\_\_班 \_\_\_\_\_號 姓名：\_\_\_\_\_

- 5、你分別能預測它們的第 100 個，是什麼模樣嗎？(☆☆)



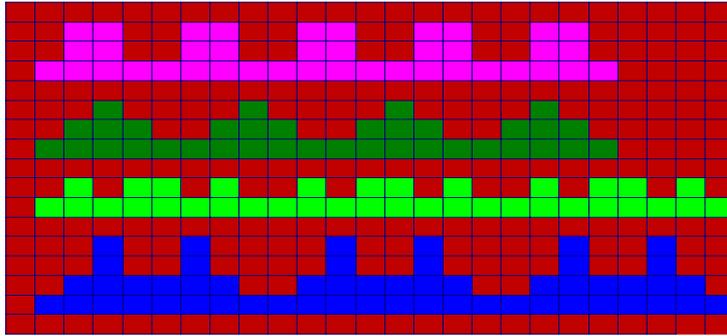
【再探一番】

1. 看了老師的魔術表演，敏樺毫不謙虛地說：「我也是記憶天才。」說著，他也在黑板上寫下了：
- (1) 13, 24, 57, 68, 13, 57, 24, 68
  - (2) 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33
  - (3) 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21
  - (4) 11, 22, 44, 88, 176, 352, 704
  - (5) 81, 27, 54, 18, 36, 12, 24, 8

他說：「看！我的數更多。不必分題號，只要告訴我每一行前面的兩個數，以後的數我可以接著背下去。」

請你評評理，你相信敏樺的說法嗎？為什麼？

2. 請你試著仿照上面兩個魔術的表演方式，自行設計一個魔術。
3. 如圖所示，請你預測它們的第 89 個，是什麼模樣？



### 第三關 神奇的回文算式

\_\_\_\_\_班 \_\_\_\_\_號 姓名：\_\_\_\_\_

6、如果我們將第三個胚騰以數字表達，則正好是一個數字運算左右對稱的等式（回文算式）： $12 \times 231 = 132 \times 21$ 。請你仿造這個例子，也將第四個胚騰也寫成數字運算左右對稱的等式（回文算式）。（☆☆）

7、承上題，另外一個回文算式如下，不過其中有一個數字沒有寫出來，用一個小空格代替： $12 \times 46 \square = \square 64 \times 21$ ，請你算出  $\square$  所代表的數字？（☆☆）

※回文算式：是指等號兩端的數字由左到右和由右到左的次序一樣。

伊克斯探長說，一提到李白，大家都知道他是唐代的大詩人。如果把“李白”兩個字顛倒一下，變成“白李”，這也可以當成一個人的名字，此人姓白名李。像這樣，正著念、倒著念都有意義的詞語叫做回文。

文學史上，有許多與回文有關的故事。

清代，北京有個酒樓叫“天然居”。有一次，乾隆皇帝觸景生情，以酒樓為題寫對聯，上聯是：

客上天然居，居然天上客。

但是，這位博學多才的皇帝苦苦思索，卻寫不出下聯。因為下聯的後五個字，必須是前五個字的顛倒，又要語意通順，還要平仄協調，的確是很難的事。直到很久以後，才由紀曉嵐的同窗張璉給出了下聯：

僧遊雲隱寺，寺隱雲遊僧。

與此類似，數學裏也有“回文式”。

我們借用上面的對聯組成這樣一個式子：

僧遊 × 雲隱寺 = 寺隱雲 × 遊僧

如果將不同的漢字用不同的數字（0~9）代替，例如：上面第三關第 6 題「 $12 \times 231 = 132 \times 21$ 」，就是所謂的「回文算式」。

另外，還有  $12 \times 462 = 264 \times 21$ ， $13 \times 341 = 143 \times 31$ ，

$13 \times 682 = 286 \times 31$ ，……

我們看到，這類等式不僅外形整齊、對稱，“內部構造”也很巧妙。但是這類回文算式不止一個。

【問題】：請你仔細觀察它們的奧妙處，再至少找出三組來？並說明你的方法。

### 【回文詩欣賞】

楊振寧教授曾在香港大學演講“物理和對稱”，當時舉了蘇東坡的七律詩《游金山寺》作為對稱（Symmetry）的例子。

潮隨暗浪雪山傾，遠浦漁舟釣月明。橋對寺門松徑小，檻當泉眼石波清。

迢迢綠樹江天曉，靄靄紅霞晚日晴。遙望四邊雲接水，碧峰千點數鷗輕。

你試試倒讀就會變成另外一首詩。

### 【英語回文】

英文中也存在回文現象，同樣受到人們的歡迎。

英文單詞：**dad**（爸爸），**mum**（媽媽）。順讀和倒讀完全相同。

你還能想到哪些單詞嗎？請寫下來：\_\_\_\_\_。

或者你想到，順讀和倒讀後，意思不一樣的單詞：\_\_\_\_\_。

\_\_\_\_\_。

回文句：

例如：MADAMIMADAM

加上標點符號後，成爲 Madam, I'm Adam。(夫人，我是亞當。)

《愛麗絲夢遊記》中有一句回文趣題：

WASITACATISAW

Was it a cat I saw? (我看見的是一隻貓嗎?)

【詩題】李白有一首五言名詩《靜夜思》，可以改編成算式謎如下：

{ 床前 = 明月 + 光，  
疑是 = 地上 × 霜；

{ 舉頭 × 望 = 明月，  
低頭 × 思 = 故鄉。

這首詩共有 20 個漢字。其中，每個漢字代表 0~9 中的一個數字；相同的漢字表示相同的數；不同的漢字，在每組兩個算式中表示不同的數，從兩組算式來說，也可能表示同一個數。這是怎樣的四個算式呢？

## 第四關 解讀 $\sqrt{2}$ 司令的勒索信

\_\_\_\_\_ 班 \_\_\_\_\_ 號 姓名：\_\_\_\_\_

尤拉市經過上次數學狂人的風波後，最近又開始不平靜了。一個神秘組織滲透了這座城市。這個組織專門研製具有毀滅性的生化武器，並從事大規模的犯罪活動。他們發現尤拉市由於長年相安無事，治安管理鬆散，是個理想的避風港，便把生化武器的實驗室搬進了城裏。尤拉市從此失去了寧靜！

前幾天，尤拉市的市民中心正要舉辦一個國際性的資訊大展。突然，警察局長慌慌張張的跟市長說：「糟了…有 20 位資訊展的參展商失蹤了…」緊接著，市長接到了一封匿名的 E-mail，信上寫道：

親愛的市長：

那 20 位參展商正在接受我們妥善的招待。最近本組織的實驗經費稍有不足，期望您能贊助……目前我們急需在 3 天內籌到 abcde 億元以購買炭疽病毒實驗用具，若您無法贊助本組織，嗯……我想這 20 位參展商就會是現成的白老鼠了……

駐尤拉市司令官  $\sqrt{2}$

市長看完信，不出 2 秒鐘就氣得昏倒了……

好不容易把市長救醒後，市長的秘書也把伊克斯探長千請萬請請了過來，於是市長立即召開緊急會議。大家看了這封匿名信後，開始議論紛紛。

重案組長搔著頭問：「怪了，上次才鬥垮了一個數學狂人，怎麼這裡又冒出一個 $\sqrt{2}$ 司令來？」

伊克斯探長發表了他的看法：「在數學上來講，『 $\sqrt{2}$ 』是一個無理數，這應該代表這名歹徒做事喜歡不按牌理出牌，才会有這個稱號……」

市長著急地說：「現在最要緊的，是趕快把那無辜的 20 位參展商給救出來吧！要是讓歹徒拿資訊展的參展商來做病毒實驗的話，以後還有誰敢來我們這裡開展覽啊！先來弄清楚歹徒到底要多少錢吧……」

「這 abcde 億元是多少呢？」伊克斯探長把附加檔案打開，看到裡面還有一封文件，內容如下：

$$1abcde \times 3 = abcde1;$$

交錢地點：尤拉市第某條大街某號。其中大街的序數和下面問題中乞丐數相同；門牌號和我每天發出的錢數（單位為分）相同。

我很有錢，在窮人城時許多乞丐向我乞討，我每天拿出一定數目的錢施捨給他們。如果我給每個乞丐 7 分錢，還剩 24 分；要是給每個乞丐 9 分錢，就不夠 32 分。

【問題】：同學們！請你幫忙求出勒索金額，和交錢地點是在第幾條大街、門牌幾號？

【再探一番】

1. 重案組長曾經與數學狂人交手鬥智過，落敗被綁，當時伊克斯探長前往營救。組長被關在石頭屋中，石頭屋沒有窗戶，只有一個鐵柵欄門，門上有道密碼鎖。探長走近一看，密碼鎖共有 6 位數字，鎖的背面寫著兩行字：

開鎖密碼是 abcdef，這 6 個數字各不相同，而且  $b \times d = b$ ， $b + d = c$ ， $c \times c = a$ ， $a \times d + f = e + d$ 。

請你試試看，體驗一下探長是怎麼救出重案組長的？

2. 鐵蛋想知道探長當年救出重案組長時的年齡。探長說：「我的年紀嘛……對了，我現在的年齡是 5 年後年齡的 5 倍與 5 年前年齡 5 倍之差，你可以算算我的年紀有多大？」
3. 探長說，有一個六位數，它的個位上的數字是 6。如果將這個 6 移到最高位前面時，所得新的六位數是原來六位數的 4 倍。求原來的六位數。

## 第五關 救出人質

\_\_\_\_\_班 \_\_\_\_\_號 姓名：\_\_\_\_\_

伊克斯探長看完這封 E-mail 後，立刻找來紙筆。沒多久，他就算出了歹徒勒索的金額和交錢地點。這時，市長說：「這個外號 $\sqrt{2}$ 的人想必就是這個犯罪組織的首腦。他綁架 20 名商人絕不會單單爲了錢而已，恐怕背後還有更大的陰謀。」

重案組長忙問：「咱們該怎麼辦？」

伊克斯探長說：「歹徒拿了贖款，一定會把錢送回他們的總部。我們只要跟蹤進去，一舉殲滅他們，還怕他們有什麼陰謀嗎？」

當伊克斯探長一行人發現歹徒的巢穴後，探長熟練的用炸彈把大門轟出了一個大洞，重案組長馬上帶領精銳部隊殺了進去。歹徒們顯然沒料到警方會找上門來，大多數歹徒不是在睡夢中被擒，就是來不及掏槍抵抗。因此，精銳部隊只受到一些零星的反抗。

但是，精銳部隊搜遍了建築物的每個角落，就是不見那 20 名人質。

重案組長厲聲逼問剛抓到的匪徒：「說，人質究竟藏在哪裡？」

一名匪徒說：「老大叫我們拿了贖款後，到郊區的廢棄工廠去解開牢門上的密碼鎖，把人放出來。他還特別交代，若沒在 3 天內收到錢，就趕快離開尤拉市。不過，唯一知道密碼的人，已經在剛才的槍戰中斃命了。」

爲什麼 $\sqrt{2}$ 司令要求手下 3 天沒收到錢就閃人呢？伊克斯探長很快就在郊區的工廠找到了答案。原來 $\sqrt{2}$ 司令在工廠內囚禁人質的牢房門上設置了密碼鎖，而密碼鎖正連接著一座毒氣飛彈發射架，有 3 枚毒氣彈瞄準尤拉市，發射時間設定在 3 天後。發射架的周圍更佈滿了觸發式炸藥，稍一不慎，飛彈可能就當場炸開，因此也不可能拆掉飛彈。要是爲了救人而不小心弄壞了密碼鎖，飛彈也可能提早發射。因此，伊克斯探長只好嘗試解開密碼鎖……。

他趨前一看，鎖上面寫著一個等式和兩句回文對聯：

$$12 \times 42 = 24 \times 21 \quad (\text{二})$$

門雞山上山門雞

龍隱洞中洞隱龍

伊克斯探長看完後，面露微笑說：「這是一個左右對稱的回文算式，和緊接的回文對聯有著一樣的象徵意義，等式是“上聯”，其實在徵求兩句類似的“下聯”，太簡單了！難不倒我。」

**【問題 1】**：同學們！請你也想想！伊克斯探長是如何解開的。請你再找出至少 10 組兩位數相乘的回文算式。並寫下你在解題過程中，有什麼發現？

**【問題 2】**：承上題，在你解題過程中是否觀察到，兩位數與兩位數相乘和兩位數與三位數相乘的回文算式，彼此之間有何聯繫？請加以對照說明。

**【問題 3】**：如 A、B、C、D 代表 0~9 中各不相同的一個數，有  $ABCD \times 9 = DCBA$  等式成立，求 A、B、C、D。

伊克斯探長說，有趣的是，數學家族裏的主要成員「數」當中也有回文，例如：101，32123，9999，……，我們稱爲“回文數”。它們特徵是：從左讀到右和從右讀到左完全一樣。其實在第三關所學「回文算式」，裡頭便隱含有回文數的影子，例如： $12 \times 231 = 132 \times 21$ ，左右兩邊的運算結果都等於 279972，它就是一個回文數。

兩個相同位數的回文數，如果各位相加時能夠“就地容和（“融合”諧音）”，不發生進位情況，那麼其和仍是一個回文數。同樣，在兩個回文數相減時（規定要用大數減小數），如果不需要從上一位元“借”位，則其差也是一個回文數。例如：

$$\begin{array}{r} 56365 \\ +12621 \\ \hline 68986 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5775 \\ - 2222 \\ \hline 3553 \end{array}$$

有趣的是，某些回文數在相加時即使要發生“進位”，但其和數卻依然是個回文數。例如：

$$\begin{array}{r} 3333 \\ + 8888 \\ \hline 12221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7777 \\ + 4444 \\ \hline 12221 \end{array}$$

**【問題 4】**：請你仔細觀察，要滿足關係：「相加時發生進位，其和數卻依然是個回文數。」則這兩個數需要有怎樣的條件限制？

伊克斯探長說，圍繞著回文數的研究，數學家們發現，有些回文數會隱身，並不是明明白白的站在數字的隊伍裡，而是隱藏在其他數裡，經過特殊變換以後才顯露真容。請看：

83：83 + 38 = 121，經過 1 步運算就能得到回文數 121；

68：68 + 86 = 154，154 + 451 = 605，605 + 506 = 1111，1111 是回文數，只需 3 步運算；

195：195 + 591 = 786，786 + 687 = 1473，1473 + 3741 = 5214，5214 + 4125 = 9339，要運算 4 步，得到回文數是 9339。

是不是所有的數經過上述的運算，都能產生回文數呢？

**【問題 5】**：請你任取三個自然數，驗證這個想法。

這就是有名的“回文數猜想”。說它是一個猜想，是因為它至今仍然是個謎：說它正確，卻無法證明；說它不正確，又找不出一個反例。

可能成為說明“回文數猜想”不成立的反例是 196，因為有人用電腦對這個數進行了幾十萬步計算，仍然沒有出現回文數，但是卻沒有人能證明這個數永遠產生不了回文數。後來，數學家又發現，在 10 萬個自然數當中，有 5996 個數，不管運算多久，似乎也產生不出回文數。196 就是其中最小的一個。因為沒有確鑿的證據證明它們產生不了回文數，所以只能用含糊的詞“似乎”來表述。

另外，數學家還對“回文質數”進行了大量研究，也發現了一些“謎”。

101，131，353，919，這些自然數既是回文數，又是質數，叫做“回文質數”。

數學家已經證明回文質數有無限多個。

181 和 191，373 和 383，30103 和 30203 等等，它們都是回文質數，並且每一對中間的數字是連續的，而其他數字都是相同的，這樣的兩個數叫做“回文質數對”。

其中一個謎是：回文質數對有無窮多個嗎？至今也沒有解決。

藉助計算機，數學家還發現，在回文數中，完全平方數、完全立方數非常多，其比例要比一般自然數中回文數所佔的比例大得多。例如  $121=11^2$ ， $12321=111^2$ ， $1234321=1111^2$ ，……， $12345678987654321=111111111^2$ ； $343=7^3$ ， $1331=11^3$ ， $1367631=111^3$ ……。

人們迄今未能找到四次方、五次方，以及更高次冪的回文數。於是數學家們猜想：不存在  $n^k$  ( $k \geq 4$ ； $n$ 、 $k$  都是自然數) 形式的回文數。

【問題 6】：同學！你有否注意到上面所提到的“回文質數”，除了 11 之外，它們的位數都是奇數位，想想是為什麼？

### 【再探一番】

1. 華人社會在民間常有許多回文詩詞的對聯，對岸福建廈門鼓浪嶼魚脯浦就有一副有名的回文對聯：霧鎖山頭山鎖霧，天連水尾 \_\_\_\_\_。(缺字填答)

對仗工整，只用八個字就把那裏的自然壯闊境界以及山與霧互鎖的迷韻意境表達出來。台北的芝山岩也有回文名詩流傳：芝山綠水流風涼，水流風涼春日暖。暖日春涼風流水，涼風流水\_\_\_\_\_。(缺字填答)

2. 我們稱數  $n$  滿足  $m(n) = n$  為對稱數 (palindrome)。121，11，12344321 都是對稱數。我們現在定義一個運算  $F: Z \rightarrow Z$ ，對於任何  $x$ ， $F(x) = x + m(x)$ 。有一個猜想是對任何數  $x$ ，存在一個整數  $k$ ，使得  $F^k$  會把  $x$  映射

到對稱數去。這問題看似簡單但還沒有人能證明。

例如：176→847→1595→7546→14003→44044，第 5 次遞代就變成對稱數。

請你再隨意舉 3 個三位數，看看分別經過幾次遞代後，是否會變成對稱數？

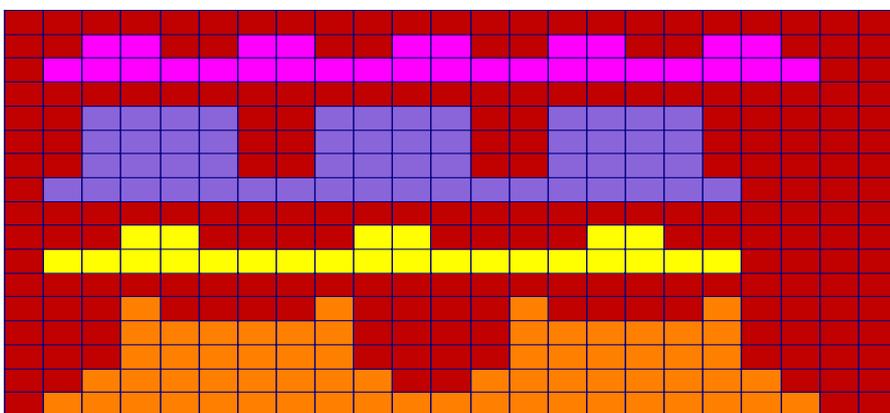
3. 如 A、B、C、D 代表 0~9 中各不相同的一個數，有  $ABCD \times 4 = DCBA$  等式成立，求 A、B、C、D。（ABCD 和 DCBA 彼此互稱為是對方的鏡反數）
4. 1982 年 9 月 28 日，一位廣播評論員在節目中提到，如果把當天的日期縮寫成 28.9.82，就成了有趣的數位回文。遇事喜歡追根究底的玉芬聽過節目之後，也想去研究這一類回文日期的分佈情形。她很快就得出結論，某些年份會比其他年份有更多的回文日期，她還找出本世紀中最接近的兩個回文日期。你知道玉芬的研究結果是什麼嗎？
5. 有一個 24 小時制的數字鐘顯示的範圍從 00:00 到 23:59。請問在這一天的之中有多少次鐘面顯示的數字是回文數？  
(註：回文數是指這個數字由正向和逆向讀起來的數值都一樣。例：10:01)

## 第六關 瓦解毒窟

\_\_\_\_\_ 班 \_\_\_\_\_ 號 姓名：\_\_\_\_\_

伊克斯探長救出人質後，再接獲密報，消息指出： $\sqrt{2}$  司令一夥人製作炭疽病毒的實驗室，就混跡在克拉克住宅區附近一棟有庭院的透天樓房。探長和重案組長一行人很快就找到這間建築，歹徒早已逃之夭夭。這棟大樓外觀跟一般民宅沒兩樣，但大夥還是小心翼翼地，深怕不小心觸動陷阱或機關！一進到宅院後，才知道別有洞天。其中有一間密室很可能就是實驗室，它的大門佈滿格子磚圖案，很不一樣！仔細檢查，牆上另有兩行英文符號和數字。探長研判這很可能是另一種密碼鎖。

經過一陣苦思後，終於看到伊克斯探長露出慣有的笑容，大夥也隨即放鬆了緊繃的神經！



$$MI(N^2) = [MI(N)]^2, (xy)_{10}^2 : 6, (xyz)_{10}^2 : 15$$

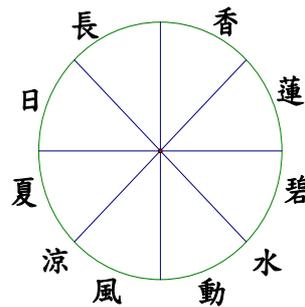
看探長歡喜自信地模樣，相當篤定！已有了破解的腹案。

探長說，中文非常的優美，如果你能靈活巧妙地應用，那麼，你一定將發現，它不僅僅有音律詞藻的美，也有形式變化的神奇。譬如說宋代李禹的《夫妻互憶回文詩》，其中有一句「夫憶妻兮父憶兒」，如果你從後面倒過來讀，那就會變成「兒憶父兮妻憶夫」，同樣有意義，真是妙極了！

清初女詩人吳絳雪作有一首轆轤回文詩：

香蓮碧水動風涼，水動風涼夏日長。  
長日夏涼風動水，涼風動水碧蓮香。

全詩只用了十個不同的字，描繪了一幅風吹水動，花香暗浮的夏日圖。妙的是詩的上兩句倒著讀過來就是詩的下兩句，更妙的是把這十個字排成一個圓，順時針讀是上兩句，逆時針讀是下兩句，就像是一隻來回旋轉的轆轤。



在數學裏，把一個數倒讀後所得的數，稱為原數的“鏡反數”（mirror image number）。鏡反數是一種相互的關係，例如 1234 與 4321 就互為鏡反數。

探長接著說，這面牆所隱藏的密碼，如下圖所示。這些數的平方和它們在鏡子中反映（inversion 或 mirror image）的數的平方，兩者在鏡子中的反映數恰巧相等。我們稱這樣的數為“平方鏡反數”，最早是 1979 年 3 月中旬，由在美國紐約一所大學研究固態物理的華裔學者梅維甯先生所發現。

$$\begin{array}{ccc}
 12 & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} & 21 \\
 (12)^2=144 & & 441=(21)^2 \\
 & \text{鏡子} & \\
 112 & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} & 211 \\
 (112)^2=12544 & & 44521=(211)^2 \\
 & \text{鏡子} & 
 \end{array}$$

至於  $MI(N^2) = [MI(N)]^2$ ，則是對於上列數學關係的簡要表示法，其中  $MI(N)$  是  $N$  的鏡反數， $MI(N^2)$  是  $N$  的平方鏡反數。另外， $(xy)_{10}^2 : 6$ 、 $(xyz)_{10}^2 : 15$  分別表示徵求：二位數中共有 6 個平方鏡反數，三位數中共有 15 平方鏡反數的答案。所以需要瞭解問題，並能加以破解，才有辦法進得了毒窟。

同學們！請你試試看，探長是怎麼破解的？

【問題 1.】二位數中共有 6 個平方鏡反數，請你將它們一一找出來，並寫出解法和討論過程。

【問題 2.】三位數中共有 15 個平方鏡反數，請你將它們一一找出來，並寫出解法和討論過程。

【再探一番】

1. 四位數中共有 39 個平方鏡反數，請你將它們一一找出來，並寫出解法和討論過程。
2. 五位數中共有 91 個平方鏡反數，請你將它們一一找出來，並寫出解法和討論過程。
3. 能這樣六位數、七位數、……繼續求解下去嗎，在求解平方鏡反數的過程中，你有什麼發現？請你將想法寫下來。

伊克斯探長破過大案後，總會一如往常，繼續他的數學研究之路。從這次破獲毒窟的過程中，又讓他的數學能力再一次精進，並且也獲得了不少啓發。例如：他進一步提出滿足  $m(n \times n \times n) = m(n) \times m(n) \times m(n)$  的立方鏡反數的概念。觀察 11 的立方， $(11)^3 = 1331$  是立方鏡反數，而  $(22)^3 = 10648$  卻不是立方鏡反數。他提出問題如下：

【問題 3.】(1) 尋找所有小於 10000 的立方鏡反數？這些立方鏡反數其中是否有回文數？

(2) 尋找構造立方鏡反數的方法，以此判斷立方鏡反數的個數是有限還是無限。

【問題 4.】(1) 觀察 321 這個數， $321-123=198=2 \times 99$ ，而 452 這個數也有  $452-254=198=2 \times 99$ 。證明任何三位數  $n = a_1 a_2 a_3$ ，下面的絕對值

$|n - m(n)|$  一定能被 99 整除。

(2) 承上題，能否證明  $n$  位數  $N = (a_1 a_2 \cdots a_n)_{10}$ ，下面的絕對值  $|N - MI(N)|$

一定能被  $999 \dots 9$  ( $n-1$  個 9) 整除。

【再探一番】

1. 據說有位數學家在一次偶然的機會，看到一塊里程路標上的公里數 3025 被折成兩段，成爲“30”、“25”，心裡起了一陣顫動。他想：

$30+25=55$ ,  $55^2=3025$ 。又回到了原來的數，真是奇怪極了！這引起他的興趣，也受到了不少數學家的關注。

大家經過一番探索，又找到了另外兩個這樣的數：2025、9801。

觀察  $2025=45^2=(20+25)^2$ ,  $9801=99^2=(98+1)^2$ 。事實上，具有這一性質的數並不限於四位數，例如： $81=9^2=(8+1)^2$ 。 $494209=703^2=(494+209)^2$ 。

這些數是能把組成它的數字分成兩半，然後取這兩半的數的和平方而得到，相當有趣。請你完成下列問題：

- (1) 尋找小於 100 的所有這類整數。
- (2) 尋找小於 10000 的所有這類整數。
- (3) 找出構造具有以上奇妙性質的數的一般方法由此證明這類數是有無窮多個。

2. 找到一些數字，使得  $abc \times def = ghijk$  與  $cba \times fed = kjihg$ ，同時成立並不困難，例如： $131 \times 111 = 14541$  與  $102 \times 201 = 20502$ 。這與數字本身的對稱性有關，但也可以找到沒有對稱性的解，例如： $312 \times 221 = 68952$  將數字倒轉得： $213 \times 122 = 25986$  仍然成立。你能找到其他的解嗎？試著找出數字 a、b、c 與 d、e、f 之間的關係，取其被乘數和乘數的鏡反數時，其乘積也恰等於原來乘積的鏡反數。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

- 日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬾（東京大學）
- 台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）  
蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章  
（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文  
（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）  
林裕意（開平中學） 林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小）
- 台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦  
和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹  
林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹（及人中學）、羅春暉（二重國小）
- 宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
- 桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（武  
漢國中） 徐梅芳（新坡國中）、郭志輝（內壢高中）、程和欽（永豐高中）、鍾秀瓏（東安國中）
- 新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高  
商）
- 苗栗縣：廖淑芳（照南國中）
- 台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
- 台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
- 嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
- 台南縣：李建宗（北門高工）
- 高雄市：廖惠儀（大仁國中）
- 屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
- 金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
- 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

# 論文摘要

## 《東算家南秉吉《算學正義》之內容分析》摘要

台師大數學系碩士班研究生 陳春廷

《算學正義》成書於 1867 年，由朝鮮南秉吉編撰、李尙懌校正而成。此書一開始是南秉吉自己所寫的〈算學正義序〉，接著是〈算學正義提綱〉以及目錄，全書共有五百一十八頁，問題數量有二百八十七題。內容的安排順序是由淺入深，由上編（天）的數學基礎，包括度量衡、雜率、加減乘除、分數、開方、勾股、堆垛……等等，到中編（地）的異乘同除、同乘異除、同乘同除、按分遠折差分、按數加減差分、和數差分、較數差分、和較差分、盈朒與雙套盈朒、借徵、方程。最後是下編（人）的高深數學，包括測量、天元術、多元、大衍術。

藉由題目的對照，可以看出《算學正義》的內容與中國算學的關係，也得以窺見中國與朝鮮之間的交流，南秉吉參考的中國算學著作計有：《數理精蘊》、《九章算術》、《海島算經》、《四元玉鑒》、《算學啓蒙》、《數書九章》以及《數書九章札記》……等中算書，其中又以《數理精蘊》關係最為密切，相同題目高達四十九題之多。

南秉吉在《算學正義》裡不僅是收錄中算的題目而已，與其他算書不同之處，甚至是創新的部份也不少，例如：在勾股方面提出『五和』與『五較』不同的定義方式，融合《九章算術》、《海島算經》與《數書九章》之「測望類」三書的題目並注入『新意』，創新「多元」的表示法，對大衍術進行專門研究等等。

總之，《算學正義》是南秉吉在中國傳統算學的基礎之上，加上他個人對於數學概念、解題過程的詮釋與創新，最終呈現融合風貌的一部著作。

### 撰寫碩士論文之心得感想

從去年（碩士班一年級下學期）決定要做數學史文本的研究，六月份拿到朝鮮（現今的韓國）的文本——《算學正義》，就開始了我為期約一年的論文寫作。

首先，我花了大概三個月把文本內容閱讀一遍，自行替文本裡的問題編號，詞句也註明了標點符號，並計算文本裡的每一個題目，以確保答案的正確性。在這過程之中，我第一個遭遇到的困難，就是無法轉換用文本裡的思考來解題，例如：『盈朒』、『借徵』等單元的題目，用現在的二元一次方程式來解是很迅速、方便，主要是因為我已經習慣這樣的計算方式，但是，若不能進入文本的脈絡來看問題，那就沒有意義了！到後來我讀文本第二遍，才開始慢慢克服這個部份，不過，有幾個題目一直擱置到我動筆寫論文之後才解決。

接著，我開始收集資料，相當幸運的是洪萬生教授之前已經寫過一篇關於《算學正義》的論文——〈數學文化的交流與轉化：以韓國數學家南秉吉（1820—1869）的《算學正義》為例〉，這便是我寫論文主要的依據。其次，洪教授門下其他研究生已經完成的論文，其

中不乏與朝鮮數學史相關的部份，尤其包含了南秉吉、李尙嫻（分別為《算學正義》的編撰者與校正者）的算學著作研究。此外，為了瞭解朝鮮王朝的歷史文化，我向圖書館借了不少的書籍。唯一可惜的是，對於南秉吉的生平資料掌握不多，再加上我不懂日、韓文，查到一些書籍就只能約略猜測其中的意思。

論文內容先處理《算學正義》的內容分析，我盡量以文本的方式來解讀，並比對《算學正義》與許多中算書的題目，最後才將緒論和結論完成。後來，雖然論文初稿已經出來了，但是，我覺得自己的結論非常薄弱！經過好一段時間，我還是無從下筆修改，多虧洪教授的提醒，我向大陸學者郭世榮教授要了兩篇論文，分別是〈朝鮮數學家對《四元玉鑒》的研究〉與〈秦九韶《數書九章》在朝鮮半島的流傳與影響〉，讓我在遇到瓶頸之際豁然開朗！有了這兩篇論文的『加持』之後，我的結論果真豐富了許多！

在撰寫論文期間，要感謝洪萬生教授的耐心指導，讓我獲益良多，才能順利完成碩士論文。碩士班兩年的日子裡，我從對於數學史這一個領域一無所知，到漸漸學習如何閱讀與理解關於數學史的書籍，以及對內容有適當的懷疑與提問，如今能夠寫出一篇研究論文，全歸功於洪教授讓我有這樣的成長。

當然，還要感謝同在洪教授門下的研究生：博士班的俊鴻、家銘學長，教學碩士班同甘共苦的夥伴（秀瓏、淑芳、鼎勳、和欽等人），以及好友靜宜的勉勵與幫忙也是不可缺少的！謝謝大家！