HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十卷 第九期 目錄（2007年9月）

阿基米德的現代性：再生羊皮書的時光之旅

台師大數學系　洪萬生教授

在一些數學史的著作中，阿基米德總是被視爲積分學的先驅人物。誠然，阿基米德所使用的逼近法，的確具有現代積分的意義。不過，如果仔細對比定積分 (definite integral) 與他的曲線形求積（譬如拋物線截區求面積），我們可以發現阿基米德的逼近法與現代的方法，有著本質的差異。這種「對比」容易被忽略的原因之一，似乎就在於他爲了避開取極限而使用的窮盡法 (the method of exhaustion)，由於涉及古希臘哲學家亞理斯多德的「潛在無窮」(potential infinity)，而成爲眾所矚目的焦點。事實上，這也可以解釋斯坦 (Sherman Stein) 的《阿基米德幹了什麼好事？》何以將窮盡法列爲討論單元之一。

針對級數求和而言，所謂潛在無窮，是指吾人不能將無窮多項加起來。因此，當阿基米德考慮拋物線截區求面積時，他利用「有限多項的等比級數之和」逼近這一面積，然後，利用窮盡法證明它們最終必須相等。在這個論證中，阿基米德正如同稍早的歐幾里得一樣，是不可能將無窮多個正量加起來，而這正是「真正無窮」(actual infinity) 的意涵。

然則，阿基米德的潛在無窮究竟是什麼呢？以曲線區域面積的逼近爲例（參考圖一有關拋物線截區之逼近），《阿基米德寶典－失落的羊皮書》(The Archimedean Codex, 2007) 提供了一個「想像的對話」：

> 阿基米德在曲線區域內塞進一些三角形，而留下空白處之大小大於一顆沙粒。來了一位批評者說：「還是有一顆沙粒的差別。」「哦是這樣？」阿基米德喊道：「好吧，我就再重複使用我的機制更多次。」結果空白處之大小小於一顆沙粒。「等一等，」批評者說：「空白處還是比頭髮寬。」阿基米就（用同樣的機制）繼續下去。空白處總是小於批評者所提的大小。這樣的對話可以無止境的繼續下去。這是潛在無窮。

顯然，根據這種進路以及歸謬法（合起來通稱爲窮盡法），阿基米德完成了許多重要的求（面 / 體）積工作，而締造了希臘數學的高峰。

上述這一類論述，是在 2001 年 1 月以前，有關希臘數學史的大要。讓我們引述《阿基米德寶典－失落的羊皮書》的作者之論斷如下：

希臘人把數學發展成精確的、嚴格的科學。他們避免了矛盾及錯誤。這麼做的過程之中，他們也避開了無窮的陷阱。他們的科學立基於你想要怎麼大就怎麼大，或你想要怎麼小就怎麼小的數目，但絕對不是無窮大或無窮小。想要怎麼大就怎麼大的數目，是為「潛在無窮大」，但不是真正的無窮大。希臘人不用真正的無窮大。

本書作者之一雷維爾 • 內茲 (Reviel Netz) 爲舉世知名的阿基米德權威學者，目前任教於史丹佛大學。他出身劍橋大學科學史系，曾受教於希臘科學史大師洛伊德 (Geoffrey Lloyd)，因此，這一版本應該是希臘數學史的標準敘事。

現在，《阿基米德寶典－失落的羊皮書》的再度問世，加上二十世紀才誕生的同步加速器、資訊與顯影等高科技之應用，我們乃得以揭露了前所未知的秘密，而敦促數學史家改寫這一重要的篇章。那就是：阿基米德竟然實際上將無窮多項加起來，還有，他甚至進一步去比較兩個無窮集合。後者這一極有膽識的運算，史家原本認爲直到十九世紀，德國偉大數學家康托 (Georg Cantor, 1845-1918) 創造超限集合理論時，才正式進入數學舞台。

這一部於 1998 年 10 月 29 日在紐約佳士得拍賣場，以高價 220 萬美金售出的古書，是教士約翰．麥隆納斯 (Ioannes Mylonas) 在公元 1229 年 4 月 14 日所抄寫的祈禱書，爲的是在耶穌復活周年日，當作禮物獻給教會。至於所使用的再生洋皮紙，則是取原載有阿基米德的著作《平衡平面》、《球及圓柱》、《圓的測量》、《螺線》、《浮體》、《方法》以及《胃痛》，以及其他內容的羊皮書，刮掉文字再度使用，因而這部祈禱書也稱爲再生羊皮書。還有，這些再生洋皮紙原先書寫的文章，則大約是出現在公元 970 年。除了阿基米德的上著作之外，這一本再生羊皮書還保存了雅典一位最偉大演說家的講稿、古代對亞里斯多德的評論，也包括了一些拜占庭的文章、十世紀末的聖歌，和一位聖人的傳記。另有七張書頁之手稿，目前還無法辨別身份。因此，這一本再生羊皮書，簡直就是「一座擁有特殊古代手稿的小圖書館」。

2001 年 1 月，雷維爾．內茲邀請日本大阪大學的希臘數學史家齊藤壑 (Ken Saito) 一起研究阿基米德的《方法》(*The Method*)。這一份公元 970 年的手抄稿當然是《阿基米德寶典－失落的羊皮書》在 1998 年再度問世時，數學史家頗感興奮的原因。這是因爲 1906 年海柏格 (Johan Ludwig Heiberg) 在君士坦丁堡發現此一再生羊皮書時，最震撼希臘史家的結果，就是它見證了阿基米德運用機械方法 (mechanical method)，而發現了他另外再以幾何方法嚴格證明的很多面積與體積公式。後者這一嚴密證明，無疑結合了前述的逼近法與窮盡法，其中主要牽涉到潛在無窮的概念。然而，海柏格在再生羊皮書上無法讀到的，但經由 2001 年 3 月以紫外線照射的高解析數值影像，卻足以顯示它運用了不折不扣的真正無窮的概念。

根據內茲的報導（見《阿基米德寶典－失落的羊皮書》第 8 章），當阿基米德證明《方法》第 14 命題：「圓柱截體體積等於外圍正立方體體積的六分之一」時，他三度指出：某某幾何量的集合會與其他幾何量的集合，在數目上相等。就本例而言（請參考圖二），請看內茲的解說如下：

任取一切片，就產生立方體的一個三角形，它立於長方形的一個線段之上。而阿基米德指出，組成三角柱的各個三角形的數目，與組成長方形的各線段的數目，兩者是一樣的。

這一進路令人想到十六世紀的卡瓦列利 (B. Cavalieri, 1598-1647) 所提出的所謂「卡瓦列利原理」:「給定兩個立體一般高，如果等高處的截面面積，則這兩個立體體積相等。」不過，卡瓦列利卻小心翼翼地避開了「那些無窮多個截面是否可以疊回成爲原來立體」之問題，理由無他，他正是不敢觸及真正無窮之概念。[1]相反地，顯然由於連結到真正無窮之概念，於是，阿基米德毫不猶豫地將無窮多個項加起來。總之，內茲告訴我們說：「命題 14 不再用到物理－但在那裡，無窮個東西相加再也不是隱藏是的，而是明確的，立基於無窮求和的法則。」而這，也就是 2001 年 3 月史家得以確定的阿基米德之一個現代性表現。

阿基米德數學的另一個現代性，則是一個他稱之爲「胃痛」的組合學問題：將給定正方形切割成 14 片之後（參考圖三），再重新拼湊成爲正方形的方法有多少種？阿基米德的答案是：17152 種！這個組合問題，它出現在這一本再生洋皮書的最後一頁，現在就以《胃痛》來表示，卻是讓內茲花了很多力氣、並且得到數學家的最多幫忙，最後才得以釐清。至於成功解讀的關鍵，則在於吾人「對於將要解讀的文章的可能意義，能夠做某種猜測，你才可能有所解讀。」因此，「海柏格之所以無法解讀《方法》之有關無窮的段落或《胃痛》，這是最大的原因；他不曾預期有實質的無窮，或者組合學。」這個問題的正確答案，是電腦科學家比爾‧卡特勒 (Bill Cutler) 率先提出，後來，幾位著名的數學家包括鼎鼎大名的隆‧格拉罕 (Ron Graham) 及金芳蓉夫婦檔，都只靠紙與筆，好比阿基米德只靠紙莎草及蘆葦筆一樣，而給出了同樣的答案。

本書作者除了前述的雷維爾‧內茲之外，還有修復此一再生羊皮書的計畫主持人威廉‧諾爾 (William Noel)，他是華特絲美術館 (Walters Museum) 手稿及珍本部門策展人，學術專長爲 1020 年代來自英國坎特伯利的教會手抄本裝飾畫。諾爾自稱是「阿基米德的雜役」，凡是修復的協調分工與尋求高科技的支援，甚至於訪問這一再生洋皮書曾經典藏之處，都由諾爾負責。事實上，他也是接受本再生羊皮書擁有者（在本書中被稱爲 B 先生）委託的主要負責人，所以，他對於這一再生羊皮書的整個修復及解讀過程，提供了鉅細靡遺的報導，其中甚至引述了他們的團隊之一些相關的電子郵件之內容，再現了部份研究活動，頗讓讀者有親臨其境之感。

另一方面，數學史家內茲則專司解讀工作。由於他曾出版《希臘數學演繹法的形成：認知歷史的研究》(The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History, 1999)，所以，內茲研究古代數學文本時，基於認知科學之洞識，總是想知道：

> 數學經驗是什麼：它怎樣印入心（靈之）眼 (the mind's eye) 中？我確信要了解其意涵，我們必須能夠閱讀正確翻譯的數學，此種翻譯必須保持原作者的架構，因為從此架構我們可看出古人是怎樣看待他們的科學的。

簡單地說，從認知科學觀點切入，文本的形式 (form) 與內容 (content) 同樣重要，認知與邏輯，抽象觀念與具體圖像，終究無法分離！因此，「經由研究圖形及符號、書頁及手稿的認知歷史，我們可能會進一步倒回去瞭解敘拉古的阿基米德的頭腦。」總之，內茲在獲邀參與這一研究計畫時，他曾「狂野幼稚、狂喜而令人受不了的尖叫……」難怪他在解釋過阿基米德的名字的由來後，提供了如下的「粉絲物語」(fans' note)：

[1] 第五世紀中國的祖沖之 (429-500) 在證明球體積公式時，也提出此一原理的類似版本：「夫疊棊成立積，緣冪勢既同，則積不容異。」只是他的無窮觀念究竟如何，我們還無以索解。

在其純科學的作品中，阿基米德一直讓東西溢出浴缸：藝術與科學，美麗與秩序。讓我們開始觀看，這些元素如何在阿基米德的作品中聯手出現。

誠然，在內茲的書寫中，我們總可以讀到他的研究過程中所流露的狂喜，這對於一位歷史學家的「隔離的智慧」而言，的確是一大考驗，不過，看起來內茲倒是甘之如飴。

最後，我們針對本書的書寫策略，提供一點簡要的評論。兩位作者在書寫本書時分工合作，其中涉及希臘數學史與阿基米德手稿解讀工作者，一概由內茲負責，其他則由諾爾執筆。就此而言，本書可以說是科普寫作的一個創舉。譬如說吧，本書第 1、3、5、7、9、11 等奇數章，都出自諾爾，至於偶數章第 2、4、6、8、10 以及（第 12 章）結語章，則是內茲的創作。序文或是兩人共同創作。這種安排顯然是經過精心設計。通常，諾爾書寫的部份比較像「偵探」報告，其中有帶著電視節目製作人走訪伊士坦堡、聖城耶路撒冷以及西西里（阿基米德的故鄉），也有多方面說明如何利用各種人力資源與高科技，以利於再生羊皮書之解讀工作。相對地，內茲書寫的部份則側重阿基米德數學之相關論述，幫助讀者深入瞭解希臘數學史，內容則極有質感。由於內茲認為文本內容離不開形式，因此，他在說明如何解讀此一再生羊皮書時，總是一再強調手抄本形式的重要性。這一進路無形中呼應了高科技的顯影工作之策略，因而可以和諾爾所書寫的比較具有實作 (practice) 特色的奇數章融洽銜接。換句話說，由於內茲強調古代文本的認知意義，因此，它的內容 vs. 形式的意義得以凸顯，同時，古代文本的一個現代詮釋，顯然也必須顧及詮釋者的理論與實作之結合。這一點，當然也讓本書的數學內容說明，顯得「家常可口」，而不致於乾澀難以下嚥。

總之，面對本書，外行人當然可以看好熱鬧－至少可以發思古之幽情，分享世界文化遺產，至於內行人呢，則一定可以看出門道。這本來就是一般科普書籍期望獲得的讀者反應。不過，本書論述阿基米德數學時，堅持實質內容之鋪陳（譬如第 6 章），而且，也沒有在提及達文西時東拉西扯（科普作家通常喜歡談論名人軼事，以降低內容的硬度），的確是科普書籍少見的氣魄，值得我們欽佩與效法。還有，筆者希望中小學數學教師有機會精讀本書第 4 章〈視覺科學〉，從容領會「希臘圖形的邏輯」以分享阿基米德的數學經驗，那麼，在教學上一定可以帶來很多的啓發才是！

參考文獻

洪萬生 (2007).〈好個阿基米德〉,《科學月刊》38(8): 630-632。

斯坦 (2004).《阿基米德幹了什麼好事！》台北：天下文化。

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Netz, Reviel and William Noel (2007). *The Archimedes Codex*. London: Weidenfeld & Nicolson.

Stein, Sherman (1999). *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?* Washington, DC: MAA.

查爾斯河畔談無限 (一)

國立勤益科技大學通識教育中心　劉柏宏教授

位於捷克布拉格的查爾斯大學 (Charles University) 是中歐歷史最優久的大學，而其教育學院這兩年接連舉辦了兩場數學教育相關的大型會議。一是 2006 年的PME (Psychology in Mathematics Education) 會議，另一則是 2007 年第五屆歐洲暑期大學(5th European Summer University)。歐洲暑期大學不定期在歐洲各國舉行，當四年一度的HPM會議地點也恰巧在歐洲國家時，則與HPM會議合併舉辦。今年筆者前往參加歐洲暑期大學的理由有二。一來今年主題是「On the History and Epistemology in Mathematics Education」，與HPM息息相關，相當吸引人。二來這兩年在國科會的贊助下，個人的研究主題圍繞在學生對於無限的概念與無限概念的歷史演變。閱讀文獻時發現當大家談論無限的歷史發展時，往往強調康托 (Georg Cantor) 的非凡貢獻，卻忽略了捷克數學家布爾扎諾 (Bernhard Bolzano) 的幾個關鍵概念不僅對康托的無限思想有著舉足輕重的影響，而且在教育上也有其意義，因此決定前往布爾扎諾的母校朝聖，也報告自己的研究心得。

無限概念所涉及的領域相當廣泛，不僅與數學相關，在哲學與神學領域也引起熱烈的討論。當然個人的研究焦點只在無限的數學領域。對於古希臘數學史稍有涉獵的人都知道古希臘數學家與哲學家都避談無限，而這都是伊利亞學派的芝諾(Zeno)所惹的禍。為了反駁畢達哥拉斯學派萬物皆數的最小單位論，芝諾提出了著名的四個悖論，以無限分割所得的矛盾來影射數的最小單位論是無法成立的。因此之故，之後的希臘數學家也都避免涉及無限概念的數學論證，而其中號稱逍遙學派的教主亞里斯多德雖算是比較勇於挑戰禁忌的，但卻很明顯成事不足敗事有餘。由於他否認存在一個永恆不變的真理世界，並主張知識取決於感官認知，因此無法為人類感覺所窮盡的無限在他眼中並不是一個真實存在的概念。但由於無限概念已被「真實地」討論過，因此他創造出「實無限」與「潛無限」兩個名詞，並認為「實無限」是不存在的。換句話說，無限這個概念只能「潛在性地存在」(potentially exist)。亞里斯多德更進一步替他的說法辯護：

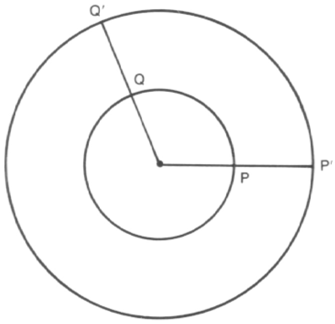
> 我們的主張並不會剝奪數學家們的科學……事實上，他們並不需要無限也不必使用它。

事實上，亞里斯多德的看法已經影響許多後世數學家處理無限的手法。例如歐幾里德在其幾何原本中證明了質數有無限多個，但他的敘述方式卻是間接的：

> 給定任意多個質數，必有更多個質數。(《幾何原本》第九冊命題 20)

而這種迂迴的方式就很明顯地表達出一種「潛無限」的信念。

或許受到亞里斯多德的無限思想所鉗制，此後將近兩千年的時間關於無限的數學概念的探究並無明顯進展。直至文藝復興與科學革命時期，科學家關注的焦點轉移到浩瀚無窮的宇宙，關於無限的討論才又再度復興。在《兩門新科學的對話》一書當中，加利略考慮兩個問題。如圖一之兩個同心圓，若我們從圓心出發作任意一條直線都會與大小兩圓各相交於一點，且不同直線所相交的點的位置也不相同。換句話說，兩同心圓圓周上的點呈一對一對應。但那不就意謂著兩同心圓的圓周長相等？這個怪異的結果頗令加利略覺得困惑。



圖一

此時加利略又考慮另一個整數個數問題，以現代的符號與名詞來說就是下列三個集合的元素個數哪一個比較多？

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}; B=\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\}; C=\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

若我們從一對一的對應觀點來看，A 集合與 B 集合具有相同的元素個數。若從集合包含的觀點來看，由於 C 集合包含於 A 集合，所以 A 集合元素個數比 C 集合元素個數多。但是 B 集合與 C 集合卻又是相同的集合，所以我們發現 A 集合元素個數既可以等於 C 集合元素個數，也可以大於 C 集合的元素個數。一個令人無法理解的結果！這兩個例子就是繼芝諾悖論之後所謂的加利略悖論。雖然加利略亟欲在無限的思想上有所突破，但事情發展至此他也不得不伏首稱臣。於是在《兩門新科學的對話》一書藉由主角之一，代表當代知識分子的薩爾維提 (Salviati) 之口說道：

> 當以我們有限的心靈思考並企圖以有限領域和具限制性的性質討論無限時，這就是我們會遭遇到的困難之一。而我想這是錯誤的。因為我們不能說某一個無限量會大於，或小於，或等於另一個無限量。

除了加利略之外，同時期的數學家笛卡兒也認爲：

> 因為我們是有限的，要我們決定任何與無限有關的事物都是荒謬的……除　　非有人自認本身的心智是無限的。

所以即使文藝復興時期探究無限的思想復興了，但還是無法對於無限本質的了解有所突破。

十七世紀微積分的誕生爲數學家提供了一套解決科學問題的有效利器，但在無限本質的探究上仍顯現出其侷促與謬誤。十八世紀初義大利數學家葛蘭蒂 (Guido Grandi) 提出一個與無窮級數相關的有名悖論：$1-1+1-1+1-1+1-\ldots=$？

以下是三種不同的解法：

(a) $1-1+1-1+1-1+1-\ldots= (1-1) + (1-1) + (1-1) +\ldots= 0$

(b) $1-1+1-1+1-1+1-\ldots=1-(1-1) -(1-1) -(1-1) -\ldots= 1$

(c)令 $S = 1-1+1-1+1-1+1-\ldots$，得 $S = 1-(1-1+1-1+1-1+1-\ldots) = 1-S$

因 $2S = 1$，所以 $S = 1/2$。

以有限的觀點來看上述三種解法都是成立的，只是爲何會得到不同答案？Guido Grandi問了一些數學家，而當萊布尼茲得知此事後也去信徵詢瑞卡提 (Jacopo Riccati) 的意見。瑞卡提認爲從幾何級數公式 ”$1/(1-x) = 1+ x + x^2 + x^3 + x^4 +\ldots$” 的角度來看當$x = -1$ 時

1−1+1−1+1−1+1−…確實等於 1/2。萊布尼茲後來也附和道：

> 若我們隨機地計算任意有限項之和，其值為 0 或 1。因此就機率觀點而言應取其平均值 1/2。

由於當時對於無窮級數並無收斂區間的觀念，所以錯誤地引用幾何級數公式來驗證答案並未引起太多的質疑。但是當後來歐拉引用幾何級數公式得到令人無法接受的結果時 (例如，1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …= −1)，數學家們再度反省是否有必要去討論這個棘手的問題。連高斯也對於這問題表達了相當消極與負面的看法：

> 我反對將無限量看成真實的實體來運用，這在數學之中是永遠不被允許的。無限只是一種說法。

有如被亞里斯多德下了魔咒一般(記得嗎？他說數學家並不需要無限也不必使用它)，經過了兩千餘年，數學家仍在原地踏步。而解開這魔咒的重責大任即將落在和無限一樣有著坎坷命運的波希米亞數學家布爾扎諾身上。 待續

教學上如何詮釋丟番圖恆等式？

蘭陽女中　陳敏晧老師

壹、歷史溯源：

德國偉大數學家萊布尼茲（Gottfrried Leibniz, 1646-1716）在年輕時曾發現一個有趣的結果：若$\mathrm{Re}(z)$表示複數z的實部，$\mathrm{Im}(z)$表示複數z的虛部，若u,v爲複數，$|u|^2+|v|^2=[\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)+\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2+[\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)-\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2$。請問若$a,b$爲自然數時，且$(17^2+19^2)\cdot(13^2+15^2)=a^2+b^2$，若$a\geq b$，求數對$(a,b)=$？[2]這個問題看似困難，實際上是不折不扣的「考古題」，在中世紀《平方數之書》（*The Book of Squares*）一書中，費伯納西（Fibonacci）很明確提出在丟番圖（Diophantus of Alexandria, 約 246-330 年）的《算術》（*Arithmetica*）第三冊的第十九個問題中，[3]寫道：

$65=(13)(5)=(3^2+2^2)(2^2+1^2)=8^2+1^2=7^2+4^2$，之後這個恆等式在阿拉伯世界廣泛被運用，[4]例如：阿爾．卡西（al-Khazin, 約 900-971 年）在大約 950 年明確使用這個恆等式。[5]本文將從不同的數學教學單元中談論丟番圖恆等式，看此恆等式在教學中所扮演的角色與地位。

貳、教學上的運用：

2.1、不言而喻的證明（**Proof without words**）：

丟番圖恆等式（Diophantus of Alexandria’s “Sum of Squares” Identity，即$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$）的證明除了直觀的代數運算外，其幾何證明首先可以參考Roger B. Nelsen於*Mathematics Magazine*所發表的*Proof without Words: Diophantus of Alexandria's "Sum of Squares" Identity*，如圖一所示：[6]

[2] 計算如下：令$u=a+bi, v=c+di$，其中$a,b,c,d\in R$，因爲

$|u|^2+|v|^2=[\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)+\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2+[\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)-\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2$，所以，得下式：

$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$，則$(17^2+19^2)\cdot(13^2+15^2)=a^2+b^2$

得$(a,b)=(17\times15+19\times13,19\times15-17\times13)=(502,64)$或

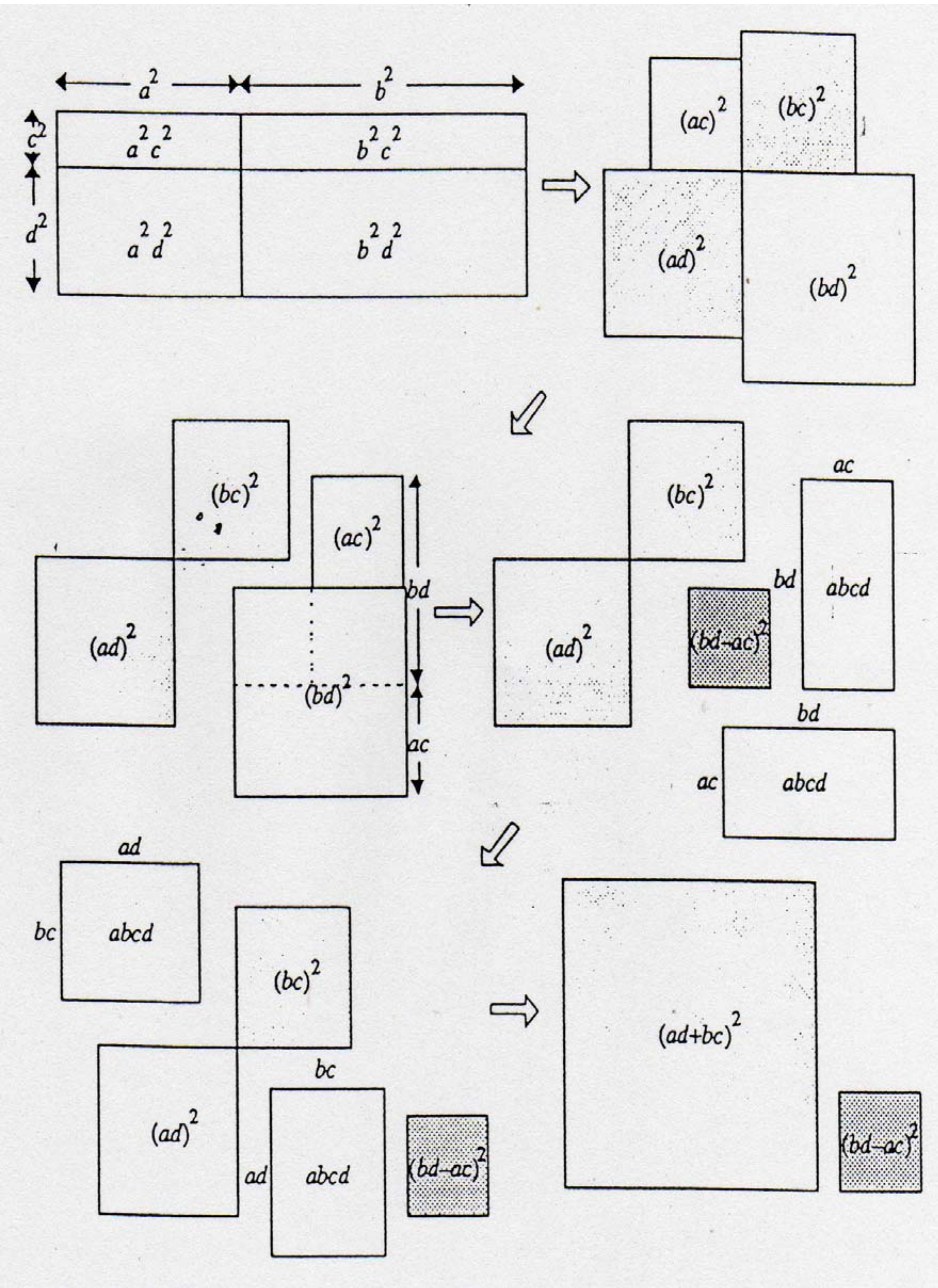
$(a,b)=(17\times13+19\times15,17\times15-19\times13)=(506,8)$。

[3] 關於丟番圖的生平事蹟可參考J. D. Swift, Diophantus of Alexandria ,*The American Mathematical Monthly* , Vol. 63, No. 3 (Mar., 1956), pp. 163-170.

[4] 關於丟番圖的代數理論在阿拉伯世界的發展，有興趣的讀者可參考S. Gandz, The Sources of Al-Khowarizmi's Algebra, *Osiris* , Vol. 1 (Jan., 1936), pp. 263-277

[5] Leonardo Pisano Fibonacci, *The Book of Squares*, An annotated translation into modern English by L. E. Sigler, Academic Press, Inc. Orlando, Florida, 1986, p28.

[6] Roger B. Nelsen , *Proof without Words: Diophantus of Alexandria's "Sum of Squares" Identity*, *Mathematics Magazine*, Vol. 66, No. 3 (Jun., 1993), p. 180.



圖一

另圖形證明如圖二，令$\overline{AC}=c,\overline{CE}=d,\overline{AB}=a,\overline{BF}=b,\overline{AF}=p,\overline{AE}=q,\overline{EF}=r$

，$\angle EAF=\theta,\angle ABF=\angle ACE=\angle FDE=90^0$，則$\overline{BC}=\overline{FD}=c-a$，由畢氏定理可知

$p^2=a^2+b^2, q^2=c^2+d^2, r^2=(c-a)^2+(d-b)^2$，在$\Delta EAF$中，運用餘弦定理可得

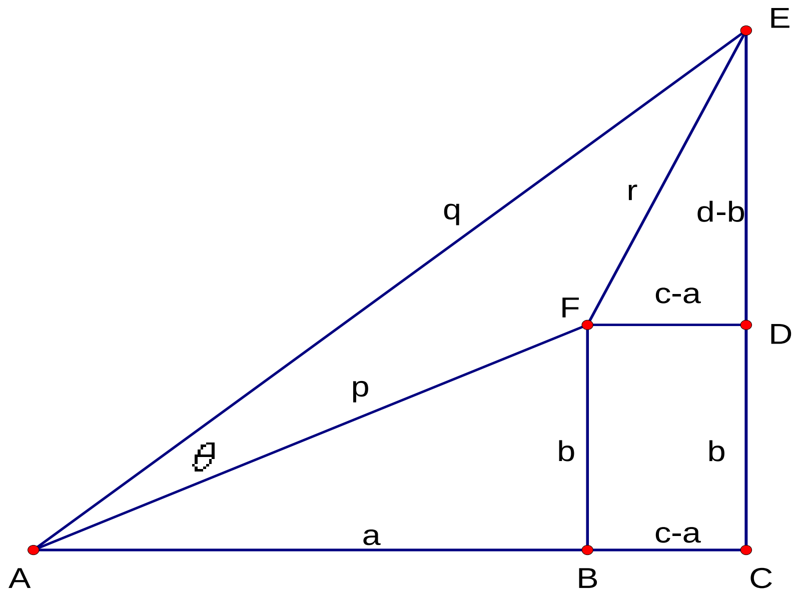
$\cos\theta=\dfrac{p^2+q^2-r^2}{2pq}, 2pq\cdot\cos\theta=p^2+q^2-r^2$，化簡可知$pq\cdot\cos\theta=ac+bd$，平方得

$p^2q^2\cdot\cos^2\theta=(ac+bd)^2, p^2q^2=(ac+bd)^2+(pq\sin\theta)^2$，

又$a\Delta EAF=a\Delta ACE-a\Delta ABF-a\Delta DEF-a\square BCDF$，代面積公式即

$\dfrac{1}{2}pq\sin\theta=\dfrac{1}{2}cd-\dfrac{1}{2}ab-\dfrac{1}{2}(c-a)(d-b)-b(c-a)$，化簡得$pq\sin\theta=ad-bc$，代入上式，即

丟番圖恆等式$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$。[7]



圖二

2.2、應用於柯西不等式：

柯西不等式（Cauchy Inequality）：當$a_1,a_2...a_n\in R$又$b_1,b_2...b_n\in R-\{0\}$，則

$(a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)\cdot(b_1{}^2+b_2{}^2+...+b_n{}^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$，等號成立時，為

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$，丟番圖恆等式可應用於柯西不等式的二維情形，即

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\geq(ac+bd)^2$，當$(ad-bc)^2=0$時，得$ad-bc=0$，

[7] 參考梭爾著、胡守仁譯，《數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量》，台北：天下遠見出版社，2006 年 9 月，頁 47、48。

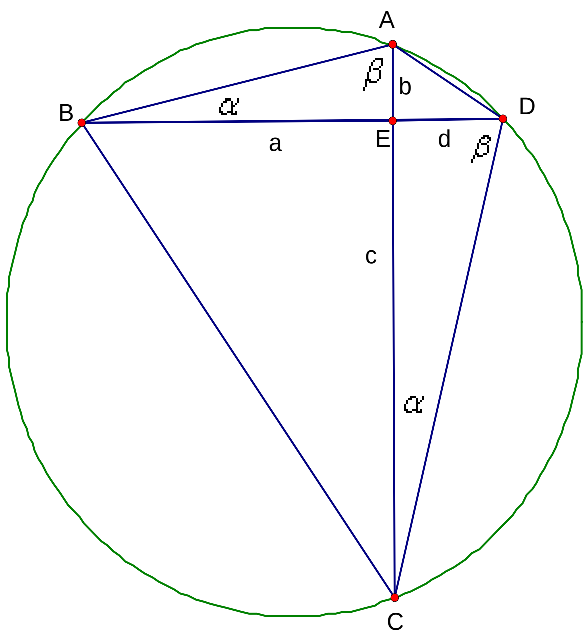
若$c \neq 0$且$d \neq 0$，即$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$時，得$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2$。此可延伸至柯西不等式的另一形式，以範（norm）的寫法：$\left|\langle x,y\rangle\right| \leq \|x\|\cdot\|y\|$。

2.3、托勒密定理的特例：

托勒密定理（Ptolemy’s Theorem）：當$ABCD$爲圓內接四邊形時，則$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$。當圓內接四邊形$ABCD$中（如圖三），因爲$\angle ABE=\angle DCE=\alpha, \angle BAE=\angle CDE=\beta$（對同弧），所以，$\Delta AEB \sim \Delta DEC$，得$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$，即$ad-bc=0$，丟番圖恆等式將轉換成下式：

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2=\left(ac+bd\right)^2+0^2=\left(ac+bd\right)^2$。

若$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，得$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$，$\overline{CD}=\sqrt{c^2+d^2}$，再轉換成$\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}=ac+bd$，即$\overline{AB}\times\overline{CD}=ac+bd$，同理：$\overline{AD}\times\overline{BC}=ab+cd$，兩式相加得$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=ac+bd+ab+cd=\left(a+d\right)\cdot\left(b+c\right)=\overline{AC}\times\overline{BD}$，成爲托勒密定理的特例。因此，適當運用兩次丟番圖恆等式的結果可得托勒密定理。



圖三

2.4、利用共軛複數證明：

引進共軛複數（conjugate complex number）之後，丟番圖恆等式的証明變得十分可親了（accessible），這就是萊布尼茲所利用的複數分解方式，此爲丟番圖恆等式的証明中最

不可思議的一種：

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left[\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)\right]\left[\left(c+di\right)\left(c-di\right)\right]$$
$$=\left[\left(a+bi\right)\left(c-di\right)\right]\left[\left(a-bi\right)\left(c+di\right)\right]$$
$$=\left[\left(ac+bd\right)+\left(bc-ad\right)i\right]\left[\left(ac+bd\right)-\left(bc-ad\right)i\right]$$
$$=\left(ac+bd\right)^2+\left(bc-ad\right)^2$$
$$=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$$

在上複數平面時，筆者曾經在課堂中講解此證明方式，學生對於此證明方式皆嘖嘖稱奇，端詳許久。

2.5、與向量的關係：

令向量（vector）$\vec{u}=\left(a,b\right),\vec{v}=\left(c,d\right)$，內積定義：$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(a,b\right)\cdot\left(c,d\right)=ac+bd$，外積定義：$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，根據丟番圖恆等式$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$，所以，$\left|\vec{u}\right|^2\cdot\left|\vec{v}\right|^2=\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)^2$，若$\vec{u},\vec{v}$的夾角為$\theta$，因為$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\cos\theta$，這個等式對於數學老師介紹為什麼定義$\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\sin\theta$是有直接的幫助。

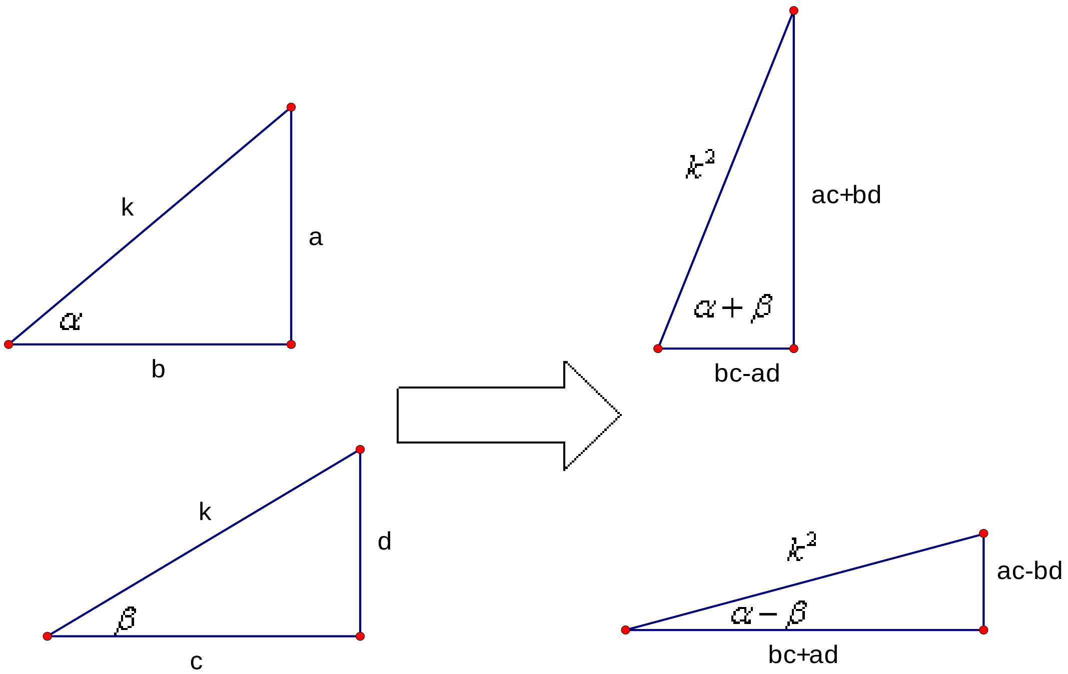
值得注意的是因為$\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\perp\overrightarrow{u},\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\perp\overrightarrow{v}$所以，當$\vec{u}=\left(a,b\right),\vec{v}=\left(c,d\right)$時，計算$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$時，[8]需要將$\vec{u}=\left(a,b\right)$改成$\vec{u}=\left(a,b,0\right)$，$\vec{v}=\left(c,d\right)$改成$\vec{v}=\left(c,d,0\right)$，然後計算$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left(\begin{vmatrix}b & 0\\ d & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right)=\left(0,0,ad-bc\right)$，若定義$\left(a,b\right)$的運算如下：

$\left(a,b\right)+\left(c,d\right)=\left(a+c,b+d\right)$及$\left(a,b\right)\cdot\left(c,d\right)=\left(ac-bd,bc+ad\right)$，則$\left(a,b\right)$形成一個體（field）。[9]

[8]在講述當$\vec{u}=\left(a,b\right),\vec{v}=\left(c,d\right)$時，計算$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=?$可以讓學生思考一下，會有意想不到的各種結果。

[9] 礙於篇幅請讀者自行參閱高等代數關於體的定義與運算要求。

2.6、證明三角函數和差角公式：



令恆等式$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2=\left(ac-bd\right)^2+\left(bc+ad\right)^2$

中的$a^2+b^2=c^2+d^2=k^2$。

和角公式：

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\frac{ac+bd}{k^2}=\frac{a}{k}\times\frac{c}{k}+\frac{b}{k}\times\frac{d}{k}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta ，$$

$$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{bc-ad}{k^2}=\frac{b}{k}\times\frac{c}{k}-\frac{a}{k}\times\frac{d}{k}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta ，$$

$$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{ac+bd}{bc-ad}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{d}{c}}{1-\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} ，$$

差角公式：

$$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\frac{ac-bd}{k^2}=\frac{a}{k}\times\frac{c}{k}-\frac{b}{k}\times\frac{d}{k}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta ，$$

$$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\frac{bc+ad}{k^2}=\frac{b}{k}\times\frac{c}{k}+\frac{a}{k}\times\frac{d}{k}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta ，$$

$$\tan\left(\alpha-\beta\right)=\frac{ac-bd}{bc+ad}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{d}{c}}{1+\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} 。$$ [10]

[10] 這個分解形式源自於韋達（François Viète, 1540 - 1603）的想法。

2.7、與矩陣的相關的模式：

若定義矩陣 $M(a,b)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$，利用矩陣的乘法運算，即得下式

$M(a,b)\cdot M(c,d)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}=M(ac-bd,ad+bc)$ 此結果類似丟番圖恆等式的表徵模式（representation pattern）。

2.8、解決相關競試問題：

利用丟番圖恆等式常使困難的計算或證明得到有效且立即的功效，例如，曾有一題競試題目如下，[11]

已知：$a\rangle 0$ 且 $b\rangle 0$，且 $\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$。

求證：$\forall n\in N$，$\dfrac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}}+\dfrac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}}=\dfrac{1}{(a+b)^{n-1}}$ 恆成立。

證明：因為 $1=\left(\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}\right)\cdot(a+b)$

$$=\left[\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]\text{（利用丟番圖恆等式）}$$

$$=\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}\right]^2+\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b}-\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a}\right]^2$$

$$=1+\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b}-\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a}\right]^2$$

即得 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\sin^2 x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\cos^2 x$，令 $\dfrac{\sin^2 x}{a}=\dfrac{\cos^2 x}{b}=t\rangle 0$，代入已知式，得

$$\frac{1}{a+b}=\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\sin^2 x\cdot\frac{\sin^2 x}{a}+\cos^2 x\cdot\frac{\cos^2 x}{b}=\sin^2 x\cdot t+\cos^2 x\cdot t=t$$

則 $\forall n\in N$，$\dfrac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}}+\dfrac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}}=\sin^2 x\cdot\left(\dfrac{\sin^2 x}{a}\right)^{n-1}+\cos^2 x\cdot\left(\dfrac{\cos^2 x}{b}\right)^{n-1}$

$$=\sin^2 x\cdot t^{n-1}+\cos^2 x\cdot t^{n-1}$$

[11] 李鐵烽，〈丟番圖恆等式在解題中的應用〉，《中學數學月刊》，2002 年 7 月，頁 46-48。

$$= t^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(a+b)^{n-1}}$$ ，得證。

參、推廣與研究：

丟番圖恆等式是否爲可推廣的恆等式呢？這是一個值得深思及討論的數學問題，根據《數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量》第 67 頁所陳述的：「目前我們有 1、2、4、8 個平方和的等式。下一個是什麼？顯然，我們想到 16。可惜不對。這個序列斷了。事實上，數學家已經證明了只有在 1、2、4 及 8 時，這個等式才會存在。這就是個不能推廣的例子。」[12]當「一個」平方和即$(a^2)(x^2)=(ax)^2$；「兩個」平方和即丟番圖恆等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$；「四個」平方和即

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) &= (ax+by+cz+dt)^2 \\ &+(bx-ay+dz-ct)^2 \\ &+(cx-dy-az+bt)^2 \\ &+(dx+cy-bz-at)^2\end{aligned}$$

這個複雜的式子可利用四元數（quaternion）的方法證明，首先定義運算 $i^2=j^2=k^2=-1, ij=k, jk=i, ki=j, ji=-k, kj=-i, ik=-j$，運算如下表：[13]

相乘積	a	bi	cj	dk
x	ax	bxi	cxj	dxk
-yi	-ayi	-byi^2	-cyji	-dyki
-zj	-azj	-bzij	-cz j^2	-dzkj
-tk	-atk	-btik	-ctjk	-dtk^2

整理得下表：

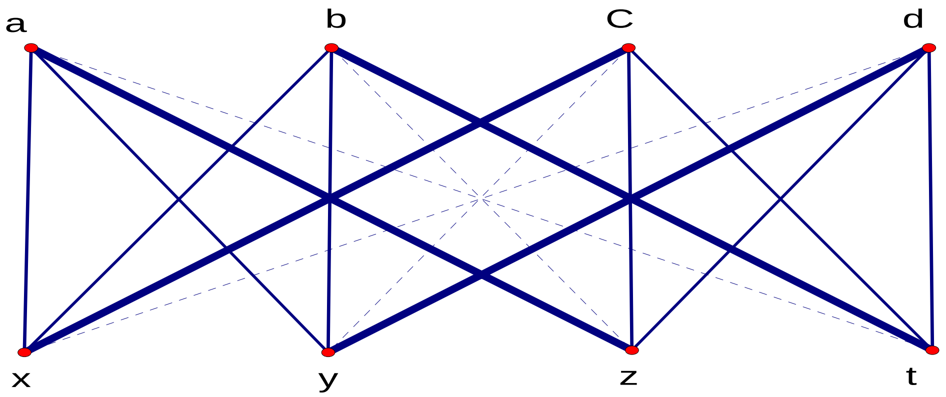
相乘積	a	bi	cj	dk
x	ax	bxi	cxj	dxk
-yi	-ayi	by	cyk	-dyj
-zj	-azj	-bzk	cz	dzi
-tk	-atk	btj	-cti	dt

此即$(a+bi+cj+dk)(x-yi-zj-tk)=(ax+by+cz+dk)+(bx-ay+dz-ct)i$

$$+(cx-dy-az+bt)\,j+(dx+cy-bz-at)k$$

[12] 因爲筆者尚未看到相關證明，故尚且保持懷疑的態度。

或利用行列式的方式如下所示，這是筆者經過長時間思索得來的，是不是有點像帕普斯定理（Pappus' Theorem）的圖形呢？這也就是爲什麼筆者對於是否可推廣的結論尚處於保留的態度？



此即代表$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)=\left(ax+by+cz+dt\right)^2$

$$+\left(\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & d \\ z & t \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b & d \\ y & t \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} a & d \\ x & t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}\right)^2$$

，至於「八個」平方和由於運算複雜，暫且略過。

肆、結論：

丟番圖恆等式是個極有趣的教學實例，筆者從證明、柯西不等式、托勒密定理的特例、利用共軛複數證明、與向量的關係、三角函數和差角公式、與矩陣的相關的模式、競試問題討論恆等式的意義，最後淺論其推廣與研究，希望此實例的分享可以讓學生聯結（link）到許多數學領域，礙於筆者學識有限，僅能侷限於數學知識範疇中，但是，筆者有靈感覺得此恆等式應該在自然科學：如電學、力學、化學、動力學、生物等領域，還有許多討論的空間，就如同費氏數列（Fibonacci Sequence）一樣，原本僅是一個單純數學關係式，但是，其運用既廣且深。感謝蘭陽女中數學教師李翔在閒聊數學中所提供丟番圖恆等式的相關想法，讓筆者受益良多，集結成此小文章，提供數學老師一個教學實例推演。最後引《數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量》第 72 頁的一段話：「數學史最令人感到心滿意足的時刻，就是發現兩個一直以來認為是疏遠而不相關的領域，基本上卻是同一樣東西的不同偽裝。」

---

[13] 四元數爲數學家漢米爾頓（William Rowan Hamilton, 1805-1865）於 1843 年所創造的。

荷蘭紀行

台師大數學系博士班研究生　英家銘

荷蘭一直是我想要去旅行與讀書的地方，但因爲種種原因，始終未能成行。今年暑假，經由本系謝豐瑞教授的推薦，參與「國際教育評比學會」（International Association for the Evaluation of Educational Achievement，簡稱 IEA）的研究計畫，得以到阿姆斯丹受訓，這才一償宿願。

先來介紹一下 IEA 與我這次參與的計畫 TEDS-M。IEA 早期爲聯合國教科文組織（UNESCO）的附屬機構（spin-off），由一群教育心理學家、社會學家與心理測驗專家組成，1967 年成爲一獨立的非政府非營利組織，主要的目的在試圖對不同教育體系的教育成就做出比較，找出對各種教育體系中持續且有意義的影響因素，以及協助每個教育體系找出進步的方法。台灣的國科會科教處目前爲 IEA 的機構會員。IEA 最大型的跨國比較研究就是大家常聽見，四年一循環的 TIMSS（Trends in Mathematics and Science Study），這項研究獲得許多國家公認爲十分客觀的跨國教育評比研究，主要在評鑑各國四年級與八年級學生數學與科學的學習成就，台灣學生在 2003 年的研究中平均成績爲世界第二，僅次於新加坡。我這次參與的計畫是 TEDS-M（Teacher Education Study in Mathematics），是 IEA 首次對（實習）教師進行研究，主要是要比較各國的中小學數學師資培育政策，以及新手教師具備如何的數學內容知識與數學教學知識。我在這個計畫中擔任的角色是台灣地區的品質控管專員，負責協助計畫主持人謝豐瑞教授，確保資料收集與問卷施測的品質。

這次到荷蘭由於重點是受訓，所以並沒有太多時間當一個觀光客。雖然如此，我還是利用到達荷蘭當日的下午，以及受訓兩天的晚上，好好地把阿姆斯特丹逛了幾圈。我對阿姆斯特丹的第一印象，就是這個城市非常有歷史氣息，因爲就如很多歐陸古城一般，阿姆斯特丹到處都是數百年的古建築。這裡也有很多的博物館，我參觀了梵谷博物館與阿姆斯特丹歷史博物館，除了增加歷史知識外，也順便附庸風雅，欣賞大師畫作，當我站在梵谷名畫「向日葵」的前面時，雖然沒有起雞皮疙瘩，仍可以發思古之幽情，並感受梵谷畫作的真實感與力量。

荷蘭國內大多數地區位於海平面之下，而阿姆斯特丹則處處是運河。走在運河邊上，就可以感受到荷蘭人的智慧，讓他們能如此和平地與自然相處，還建造出這樣美麗的城市景觀。

此外，荷蘭人對異國文化的包容大概也是世界首驅一指。有超過 170 個不同國籍的人居住在荷蘭，走在阿姆斯特丹的街上，你可以吃到任何一個國家的美食，聽到數十種不同的語言，看到各樣不同長相的人，而這些人明顯地不只是觀光客，也包括在阿姆斯特丹生活的市民。我認爲，荷蘭才是名符其實的種族大鎔爐。這一點是值得我們台灣學習的。

既然到了荷蘭，就不能不去拜訪有名的 Freudenthal Institute。這個國際知名的數學與科學教育研究所屬於 Utrecht 大學，位於阿姆斯特丹東南方車程半小時的古城 Utrecht。就跟許多古老的歐陸大學一樣，它沒有廣闊的校園，各學院散佈於城市各處。Freudenthal 研究所就位於一個火車站旁的不起眼辦公大樓內，而且只佔據這個大樓的其中三層，這與我想像中的知名學府相去甚遠。無論如何，Freudenthal Institute 代表的是荷蘭人所信仰的數

學教育哲學 – 現實數學教育（Realistic Mathematics Education）。

我利用了這個機會拜訪了 Freudenthal Institute 的所長，也是數學史家的 Jan van Maanen 教授。他非常熱情地接待我，還送我兩本他們研究所畢業生的博士論文，讓我有機會更加認識他們在 HPM 以及現實數學教育上所做的研究。我們略爲討論了在那裡與在台灣師大的研究教學情形，也希望能兩校能繼續保持互相之間的國際交流。Freudenthal Institute 十分歡迎外國學生到那裡就讀碩士學位，畢業後也可以繼續申請攻讀博士學位。我們也談到了台灣的千里馬計畫，而 van Maanen 教授也歡迎台灣的博士生藉由這個計畫的獎學金到那裡留學一年。關於他們的碩士課程，詳見本期的留學資訊。

這次到荷蘭走一趟，除了能與 IEA 優秀的研究人員合作，欣賞荷蘭的美景與名畫，還能親自拜訪 Freudenthal Institute 與 van Maanen 教授，真的是獲益良多，不虛此行。

鼎鼎大名的數學史家與數學教育專家 **Freudenthal** 研究所所長 **Jan van Maanen** 教授 與 英家銘 的合照

Information 留學資訊

– 荷蘭 Utrecht 大學 Freudenthal Institute 碩士課程

台師大數學系博士班研究生 英家銘

荷蘭 Utrecht 大學理學院提供了一個「科學傳播與教育」（Science Communication and Education）的碩士課程，旨在訓練學生做科教研究，並且使科學與社會能做出雙向溝通，讓社會（包含中小學生）了解科學，也讓學術界體認科學在現實世界的各種應用。在這個課程中，Utrecht 大學的 Freudenthal Institute 提供了「數學教育的研究與發展」（Research and Development in Mathematics Education）碩士課程，修業期間為兩年，歡迎來世界各地的學生前去進修。

這個課程背後秉持的哲學，就是 Freudenthal Institute 多年來所發展的進路：現實數學教育（Realistic Mathematics Education，簡稱 RME）。簡單來說，「現實數學教育」對數學教學與學習的看法是，學生能從特定脈絡的解決方法出發，逐漸發展出數學工具與較具形式的理解；從課堂活動中，學生提出模型，由此引致高階數學思維。

這個課程所需修習的科目其中一半是數學，另一半是數學教育。數學課程包含數學基礎、數學史、幾何學、數論、統計學等；數學教育科目則包含 RME、研究方法論、數學教學、教學設計，以及最後的論文研究。碩士論文的教育實驗可以在荷蘭，也可以在另一個國家進行，這對台灣學生，特別是在台灣已經成為教師的留學生，確實是一大利多。同時，如果你已經有數學的碩士學位，你也可以用一年的時間將這個課程的數學教育部分修完，完成論文後即可畢業，這也對想進修的在職老師或經濟能力普通的留學生來說非常有利。

從這個課程畢業後，你可以繼續申請攻讀 Freudenthal Institute 的博士學位，或是從事數學教育與數學文化事業。我們台灣學生的國際視野，坦白說比很多歐陸，甚至東南亞國家都顯得略有不足。我建議有志從事數學教育研究或數學文化事業的同學，能夠嘗試到荷蘭這個非常國際化的國家接受教育。並且，在這個世界一流的數學教育研究中心進修，對你未來的教學或研究，絕對有很大的助益。特別對數學史與 HPM 有興趣的同學，Freudenthal Institute 所長 Jan van Maanen 教授正是這方面的專家，可以好好向他學習。

相關資訊：

Freudenthal Institute首頁：http://www.fi.uu.nl/en/

「數學教育的研究與發展」碩士課程簡介：

http://www.fi.uu.nl/en/rdmasters/masters/welcome.html

所長Jan van Maanen：maanen@fi.uu.nl

留學申請：jaapdh@fi.uu.nl

論文摘要

《陳藎謨《度測》之內容分析》摘要

台師大數學系教學碩士班研究生 鍾秀瓏老師

一般來說，相較於宋元數學高度發展的成就，總認為明代數學呈現停頓、衰退的情形。對明代數學的評價，大都不高，但是明代數學承先啓後，在中國傳統數學發展的歷史上，仍佔有十分重要的地位。

本論文主要是分析明末清初學者陳藎謨所撰《度測》成書的時代及各卷的內容，期望透過此一文本的探討，有助於掌握明末清初的數學發展及其歷史脈絡。

《度測》一書分為卷上、卷中、卷下三部分，書末附有〈開方說〉兩卷、〈度算解〉一卷。在《度測》的卷中及卷下，均只針對《周髀算經》的內容舉例說明，但卷上卻分為六個小節－〈詮經〉、〈詮理〉、〈詮器〉、〈詮法〉、〈詮算〉和〈詮原〉。這種體例安排不同於中國古代算書的體例，而和《崇禎曆書》的體例安排十分類似，足見在《度測》一書中，陳藎謨把《周髀算經》與西方測量術進行了綜合和會通。他利用《崇禎曆書》的體例，企圖去詮釋《周髀算經》和進行「勾股測望」，這正是傳統中國人一直強調的「中學為體，西學為用」的思想。

雖然陳藎謨以《測量法義》為藍圖，解說測量的原理方法，但所舉例說明的測量問題大多為他個人編造，足見他善於測量之術。他除了將納皮爾算籌運用於開方法中，大為簡化開方的工作，在矩度等儀器的製造使用上，也頗被清代算學大師梅文鼎所讚許。

在《度測》卷下，陳藎謨算創「石肅菴太極周徑術」，取圓周率的近似值約 3.152，誤差甚大，不合時用。而且他雖然列出了數種不同的圓周率值，但卻未針對這些近似值作出正確的評論，還一味強調自己所發明的「石肅菴太極周徑術」之準確，足見他在關於圓周率近似值方面的數學知識十分不足，以致無法作出適當的評論、分析。

透過《度測》的內容分析，得以窺見一位不具備高深數學知識的非主流的數學工作者，在西學第一次輸入中國之際，如何將西方傳入的工具－矩度等測量儀器和納皮爾算籌巧妙的融入中國傳統數學中，懷抱「中學為體，西學為用」的原則，盡已之力闡述「西學中源」的思想，致力於中西數學的會通工作。

此外，藉由《度測》這一類非主流的次要數學文本的研究，除了可以體認明末清初的學者們如何闡述自己「西學中源」主張，也能使人們對明末清初中國傳統數學蛻變的過程有更深層的了解。