HPM通訊

第十卷 第十期 目錄（2007年10月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

查爾斯河畔談無限（二）

國立勤益科技大學通識教育中心 劉柏宏教授

查爾斯橋可以說是布拉格吸引最多觀光客的景點之一，橋下靜謐的水流和橋上喧嚷的人潮恰呈現強烈的對比。查爾斯橋畔不僅觀光客留連忘返，歷史上也吸引著科學家的駐足。在哥倫比亞大學 Victor Katz 教授的約略指點下，來到查爾斯橋旁，企圖拜訪克卜勒 (Johannes Kepler) 在布拉格的客居之所。由於無確切地址，只能完全憑感覺，在歐洲中古建築的狹窄石道中踏尋。正如無頭蒼蠅四處亂竄之際，見到一彎曲巷弄，相當吸引人，於是，便轉身進入一探究竟。只見遠處巷弄盡頭一處樓房牆上的繡綠色鑄鐵上鑲嵌著一位人物的頭像，心中喜悅之感油然而生，雖然得來花了一番功夫，至少不必踏破鐵鞋覓無處。只是近前一望上頭，卻是一尊陌生人物的頭像，有些懊惱自己的樂觀。

就在打算轉身離開之際，眼睛餘光突然被這棟樓房中庭的一座雕塑所吸引。那是一座類似簡略渾儀的銅雕作品，心中再度欣起一陣竊喜，趕忙趨前一探，果然銅雕上以捷克文記載著克卜勒於 1607 年至 1612 年居住於此。穿過中庭旁的另一個穿廊，就是查爾斯橋旁最熱鬧的一條小街，猜想克卜勒當時寄居於此應不寂寞。然而，事實上卻非如此。儘管克卜勒在布拉格的這段日子，提出不少科學創見，但也伴隨著許多創傷。1611 年他七歲大的兒子過世，緊接著他的妻子也不幸撒手人寰，兩位摯愛的離去，帶給克卜勒無比的悲傷。再來，他的贊助人魯道夫二世的健康情形每下愈況，由他的弟弟馬帝亞斯接掌大權。馬帝亞斯不像魯道夫二世一般全力支持克卜勒的天文事業，迫使克卜勒不得不離開布拉格。據聞，離開布拉格之前克卜勒將他妻子的遺體移往他兒子的墓中，將兩人合葬，並寫了一段拉丁文的墓誌銘以紀念兩位摯愛。

離開查爾斯橋就往布拉格著名的舊城廣場走去。一般觀光客到舊城廣場主要是欣賞兩個景點，一是天文鐘，另一是雷恩教堂。位於舊市政廳鐘塔上的天文鐘，設立於 1490 年，除了以古阿拉伯數字劃分一天二十四小時外，也以羅馬數字表示上下午的時辰。而外層則以十二星座的圖樣代表不同的月份，兩根運轉的指針又可標示出地球太陽和月亮之間的運轉關係，設計相當精緻。旁邊的雷恩教堂，就是克卜勒的「師父」第谷布拉赫 (Tycho Brahe)

的長眠之地。

來到舊城廣場，除覽勝之外當然就是朝聖。根據事先蒐集的資料，布爾扎諾就居住在附近。雖然有確切的地址，歐洲中世紀蜿蜒的街道，再度讓我陷入迷魂陣中。幾經曲折，穿過一個長廊後抬頭一望，果然二樓花台的鑄鐵塊上，雋刻著布爾扎諾的頭像。布爾扎諾突出的鷹勾鼻，顯得他兩旁的臉頰更為凹瘦，也似乎印畫出他坎坷的後半生。布爾扎諾 1796 年進入布拉格的查爾斯大學哲學系就讀，同時，也研習數學與物理。可能是受到德國數學家 A. G. .Kästner 數學著作的影響，他對於數學理論的哲學思辨特別感到興趣。Kästner 特別喜歡思考別人眼中不證自明的數學性質，也思索數學哲學的問題，而這也引領布爾扎諾走向數學與哲學相交的道路。他曾說「我特別的興趣在於純數學思維的部份，也就是說，我只重視同時含有哲學成份的數學。」

1800 年大學畢業後，布爾扎諾不顧父親的反對轉往神學領域的研究，但卻同時著手撰寫與幾何相關的博士論文。他於 1804 年拿到博士學位，第二天就被任命為羅馬天主教廷的神父。隔年，布爾扎諾進入哲學系任教，並於 1818 年獲選為系主任。當時，布爾扎諾也在數學系系主任的候選名單中，不過，可能由於他的神父背景，遴選委員會傾向由他領導哲學系。眼看布爾扎諾逐步邁向學術生涯高峯的同時，只是沒想到這項任命案，正是布爾扎諾一生悲慘命運的開始。由於布爾扎諾的理性思維和帶點自由主義的思想，他的領導方式觸怒了「最高當局」，一年後他主任職位即被撤銷，並且限制他所有著作的出版，使得此後的布爾扎諾過著流離與孤單的生活。布爾扎諾的職位之所以被撤銷，與當時波希米亞地區複雜的政治與宗教氛圍有關，但真正原因究竟，直到今天都還是個不解的謎題。

布爾扎諾研究的領域涵蓋宗教、哲學、與數學。而其著作中對往後數學發展具有舉足輕重地位的當數《無限悖論》(*Paradoxien des Unendlichen*) 一書。由於書禁的限制，這本書直到他死後三年，也就是 1851 年才問世。全書共分 70 節，前 28 節屬於名詞定義與概念鋪陳，後面則針對一些令人困惑的無限悖論，提出解決之道並涉及分析學的基礎。布爾扎諾在一開始，就提出他對於無限存在性的看法，他認為「即使在一個真實性與可能性都被存疑的領域中，無限集合的存在仍是最無庸置疑的」，例如，所有數所成之集合就是一個無限實際存在的最佳範例。這句話一個值得注意的重點，是布爾扎諾明確地提出了「集合」這個概念，布爾扎諾就是在「集合」這個概念底下，鋪陳與建構起他的無限大樓。他對於集合的定義如下：

> 若一個聚集 (*aggregate*) 之基本概念無關於其成員 (*members*) 之排列次序且其重組不會產生基本變異，則稱為集合 (*Menge*)。

布爾扎諾的集合定義強調成員(即元素)之重組不會產生基本變異，很明顯地，這比起現代集合論中對集合的定義更為嚴謹。乍看之下，這項條件顯得多餘，但當了解布爾扎諾如何定義級數的運算後，就豁然開朗了。他說「級數 (*Reihe*) 是在不考慮其成員次序之情形下，能一致地 (uniformly) 使用於聚集中所有成員的法則」。這是什麼意思呢？以等比級數公式為例，當時公式的證明通常表示如下。

$$
\begin{aligned}
S &= 1+e+e^2+e^3+\ldots+e^n+e^{n+1}+\ldots in\inf. \\
&= (1+e+e^2+e^3+\ldots+e^{n-1})+e^n+e^{n+1}+\ldots in\inf. \\
&= \frac{1-e^n}{1-e}+e^n+e^{n+1}+\ldots in\inf. \\
&= \frac{1-e^n}{1-e}+e^n(1+e+e^2+\ldots in\inf.)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*) \\
&= \frac{1-e^n}{1-e}+e^n(S) \\
\Rightarrow S &= \frac{1}{1-e}
\end{aligned}
$$

若用有限的眼光來看似乎沒什麼問題，但是，布爾扎諾認爲算式 (*) 中右邊括號內的無窮級數 “$1+e+e^2+\ldots in\inf$” 是從比原來的無窮級數 S 少了 n 項的式子當中分解而來，所以，不可以被等同於 S，因爲其一致性已被破壞了。據此，布爾扎諾提出了他自己的嚴格證明版本 (詳見該書 93-94 頁)。依此繼續推演，布爾扎諾就可以從容地解決先前提到 Grandi 所提出關於「1–1+1–1+1–1+…」之和的悖論。假設我們把此級數視爲對集合 {1, −1, 1, −1, 1,⋯} 所做的運算，依據布爾扎諾的定義，當我們無論如何變換級數各項次序仍能得到一致的答案時，我們才能宣稱級數和確實是存在的。依照悖論的內容，由於不同運算次序會得到不同答案，交錯級數「1–1+1–1+1–1+…」之和是無法求出的，這也和現今級數收斂的概念幾乎有異曲同工之妙。

布爾扎諾在《無限悖論》一書中，也將無限概念區分爲離散無限 (所有整數的集合) 與連續無限 (所有實數的集合)。透過這種區分，布爾扎諾說明了連續無限具有「一對一對應」(one-to-one correspondence) 與部份—整體關係 (part-whole relationship) 的雙重性格。而這也解決了伽利略 (Galileo Galilei) 悖論所造成的困擾。他甚至定義了所謂的高階無限量 (infinite quantities of higher order)，用以區分無限的大小。這些創見咸認對於集合論的創始人康托爾 (Georg Cantor) 處理無限的手法，產生相當深遠的影響。只是十年寒窗無聞問，後世評價有誰知？布爾扎諾的大部分著作，如今仍靜謐地塵封在奧地利科學院之中。如果當時著作不被限制出版，他的思想對於往後數學與哲學的發展會有什麼樣的影響，恐怕與他的主任職務爲何被撤職的謎題一樣永遠無解。

爲了感謝布爾扎諾所帶給我在研究上的樂趣與教學上的啓發，會議的最後一天上飛機前，決定再度前往他舊城廣場旁的故居做臨別前的緬懷。當心願完成後仰頭環視舊城廣場的天空時，一個畫面匆匆映入眼簾……在一間店面的門牆上竟鑲嵌著一幅愛因斯坦的鑄像。鑄像下方寫著：

> 就在這間 Berta Fanta 先生的沙龍內，亞爾伯愛因斯坦，1911 年至 1912 年布拉格大學教授，相對論創立人，諾貝爾獎得主，曾演奏著他的小提琴並和他的好朋友，著名的文學家麥克斯布洛德和法蘭茲卡夫卡聚會。

讀到這段文字，有些懊悔自己的無知與怠惰，事前沒做好功課，竟然不知愛因斯坦也曾是

布拉格查爾斯大學的教授，而和卡夫卡也曾擦撞出一串科學與人文交織的火花靈光。只是時間不允許我再去一探究竟，只得匆匆離去。而此刻腳下踩著舊城廣場的百年石板路，耳邊響著雷恩教堂渾亮的鐘聲，而腦中迴盪著的則是第谷、克卜勒、布爾扎諾、愛因斯坦、卡夫卡等人的無限智慧。至於會議的內容……別問我，早已不復記憶。

通往數學聖殿 講座公告

主講人： 李恭晴教授
（臺灣師範大學數學系）

講　題： 複數的概念與應用

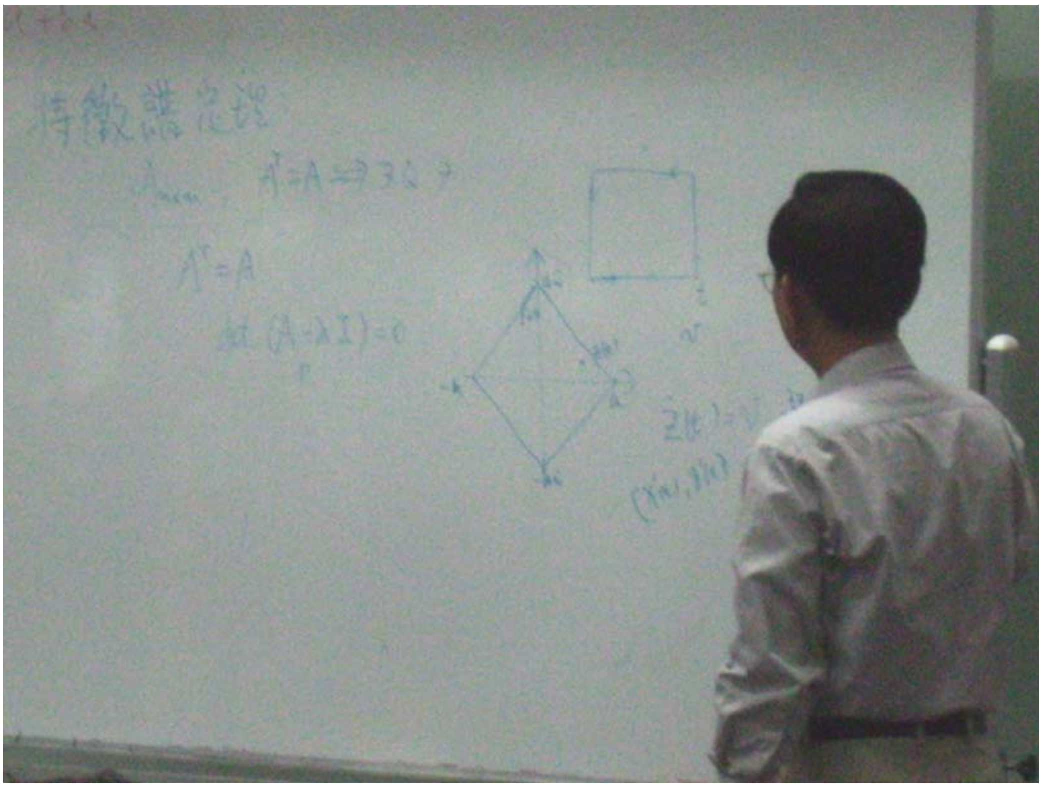
摘　要： 1.什麼是複數？複數真的存在嗎？為什麼複數會有用？ 2.為什麼要用極式表示複數？ 棣美弗定理、n次方根、三次方程式的公式解。 3.複數應用的一些例子： 複數幾何、平面上的鏡射與旋轉、電磁學、四狗追逐與星球運行的軌跡。 4.複變數函數： 代數的基本定理、(n=1~infinity)sigma(1/n^2)=(pi^2)/6、流體軌跡與等位線(等高線、等壓線、等溫線...)

時　間： 2007-10-16 19:00 (星期二)

地　點： 理學院大樓 B101

講　稿： 1190769072.pdf　請至http://www.math.ntnu.edu.tw/admin/mathtalk/ 下載

其　它： 歡迎全校大學部學生到場聆聽. 數學系學生到場者可於學習護照上核章, 一學期參加五次以上的同學系上將贈送精美小禮物. 整學期參加人數最多的數學系班級另有班級的獎勵!



向量和三角形的五心

台北市立成功高中 游經祥、劉國莉老師

壹、前言：

在本校自然資優班的一次數學課堂中，筆者講到以下的性質：

在ΔABC中，若點G爲ΔABC的重心，則$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$，其中點$O$爲任一點。

下課後，有位許同學便到辦公室提出以下的問題：

（1）在ΔABC中，點G爲ΔABC的重心，可得到$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$的結果；那麼反過來，若有一點$G$，滿足$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$，是否保證點$G$爲$\Delta ABC$的重心呢？

（2）在ΔABC中，另外的四心，即內心、垂心、外心、傍心，是否也有類似充要條件的性質呢？

當時筆者告訴許同學，重心、內心、傍心有類似性質，其中重心的性質是充要條件沒錯；至於內心、傍心的性質是否爲充要，還須再證明看看；而垂心、外心的向量充要性質老師還沒看過，容老師再思考一些時間。

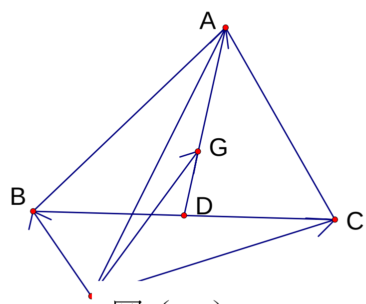
接到許同學的問題後，筆者便與劉國莉老師一起討論，經過仔細探討之後，我們得到以下的結果：

1. 重心向量性質的充要條件與證明。
2. 內心向量性質的充要條件與證明。
3. 傍心向量性質的充要條件與證明。
4. 外心向量性質的充要條件與證明。
5. 垂心向量性質的充要條件與證明。

貳、重心的向量性質：

我們將三角形重心與向量性質的充要條件寫成$\boxed{\text{定理 1}}$如下：

$\boxed{\text{定理 1}}$：如圖（一），在ΔABC中，則點G爲ΔABC的重心的充要條件爲$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$（其中點$O$爲任一點）



圖（一）

證明：設點G爲ΔABC的重心，延長$\overline{AG}$交$\overline{BC}$於點D，則

$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，$\overline{BD}:\overline{DC}=1:1$。因此，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

設點O爲任一點，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$。

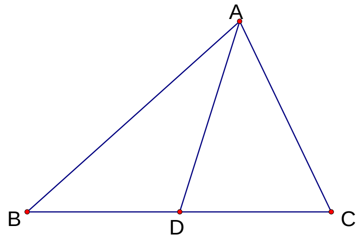
另一方面，已知$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，其中點$O$爲任一點，令$O=A$代入得$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。延長$\overline{AG}$交$\overline{BC}$於點$D$，設$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AG}=t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{t}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{AC}$，$\because B,D,C$共線，$\therefore \frac{t}{3}+\frac{t}{3}=1$，得$t=\frac{3}{2}$。因此，$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，故$\overline{AD}$爲$\overline{BC}$邊上的中線。同理可證：延長$\overline{BG}$交$\overline{AC}$於點$E$，則$\overline{BE}$爲$\overline{AC}$邊上的中線，故點$G$爲$\Delta ABC$的重心。

參、內心的向量性質：

我們先證明三角形的內分比性質的充要條件，再進一步證明三角形內心與向量性質的充要條件，分別寫成$\boxed{\text{性質 1}}$及$\boxed{\text{定理 2}}$如下：

$\boxed{\text{性質 1}}$：

如圖（二），在ΔABC中，點D爲$\overline{BC}$上的一點，則$\overline{AD}$爲$\angle A$的角平分線的充要條件爲$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

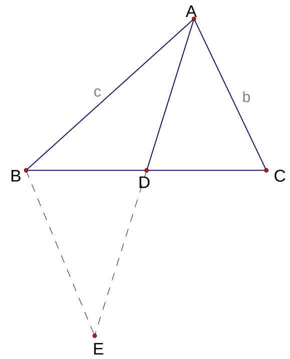


圖（二）

證明：

$(\Rightarrow)$證明省略。

$(\Leftarrow)$如圖（三），設ΔABC中，，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，因$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$，設$\overline{BD}=kc$，$\overline{CD}=kb$，$k$爲正數。作$\overline{BE}\,//\,\overline{AC}$交$\overline{AD}$的延長線於點$E$，則$\Delta ADC\sim\Delta EDB\Rightarrow\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}\Rightarrow\frac{kb}{b}=\frac{kc}{\overline{BE}}\Rightarrow\overline{BE}=c$。可知$\overline{AB}=\overline{BE}\Rightarrow\angle BAD=\angle BED$，又$\angle BED=\angle CAD$，得$\angle BAD=\angle CAD\Rightarrow\overline{AD}$爲$\angle A$的角平分線。

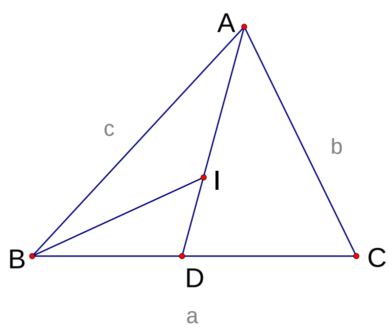


圖（三）

$\boxed{\text{定理 2}}$：如圖（四），在ΔABC中，點O爲任一點，則點I爲ΔABC的內心的充要條件爲

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

證明：$(\Rightarrow)$已知點I爲ΔABC的內心，延長$\overline{AI}$交$\overline{BC}$於點D，



圖（四）

則$\overline{BD}:\overline{DC}=c:b$，$\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AC}:\overline{BD}$ $=c:\dfrac{c}{b+c}\times a=(b+c):a$。因此，$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{b+c}{a+b+c}\left(\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right)$ $=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$。

設點O為任一點，

$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}$ $=\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\dfrac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$。

$(\Leftarrow)$已知$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$，其中點$O$為任一點，可取點$O$等於點$A$代入，得$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$。

延長$\overline{AI}$交$\overline{BC}$於點D，設$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AI}$ $=t\left(\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\right)$，因$B,D,C$共線

$\Rightarrow t\left(\dfrac{b+c}{a+b+c}\right)=1\Rightarrow t=\dfrac{a+b+c}{b+c}$。$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=c:b=\overline{AB}:\overline{AC}$，

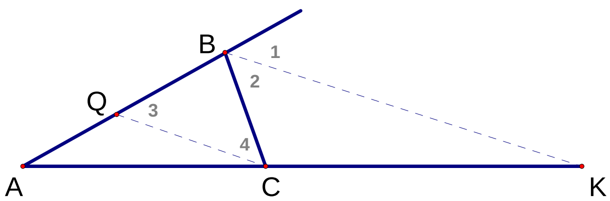
由$\boxed{\text{性質 1}}$可知：$\overline{AD}$為$\angle A$的角平分線。同理，可證$\overline{BI}$為$\angle B$的角平分線，因此點I為ΔABC的內心。

肆、傍心的向量性質：

我們先證明三角形的外分比性質的充要條件，再進一步證明三角形傍心與向量性質的充要條件，分別寫成$\boxed{\text{性質 2}}$及$\boxed{\text{定理 3}}$如下：

$\boxed{\text{性質 2}}$：

如圖（五），在ΔABC中，則$\overline{BK}$為$\angle B$的外角平分線（點K在$\overline{AC}$的延長線上）的充要條件為$\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AK}:\overline{CK}$。



圖（五）

證明：

$(\Rightarrow)$已知$\overline{BK}$為$\angle B$的外角平分線，作$\overline{CQ}$平行$\overline{BK}$交$\overline{AB}$於點$Q\Rightarrow\angle 1=\angle 2$；又$\overline{CQ}$平行$\overline{BK}\Rightarrow\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，即得$\angle 3=\angle 4\Rightarrow\overline{BQ}=\overline{BC}$。由$\overline{CQ}$平行$\overline{BK}$可得

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{QB}=\overline{AK}:\overline{CK}$ 。

$(\Leftarrow)$已知$\overline{BA}:\overline{BC}=\overline{AK}:\overline{CK}$ ，作$\overline{CQ}//\overline{BK}$交$\overline{AB}$於點$Q$ ，$\overline{AB}:\overline{BQ}=\overline{AK}:\overline{CK}=\overline{BA}:\overline{BC}$

$\Rightarrow\overline{BQ}=\overline{BC}\Rightarrow\angle 3=\angle 4$ 。$\because\overline{CQ}//\overline{BK}\Rightarrow\angle 1=\angle 3$ ，$\angle 2=\angle 4$ 。因此$\angle 1=\angle 2\Rightarrow\overline{BK}$爲$\angle B$的外角平分線。

$\boxed{\text{定理 3}}$：如圖（六），在ΔABC中，點O爲任一點，則

（1）點I_a爲$\angle A$所對之傍心的充要條件爲

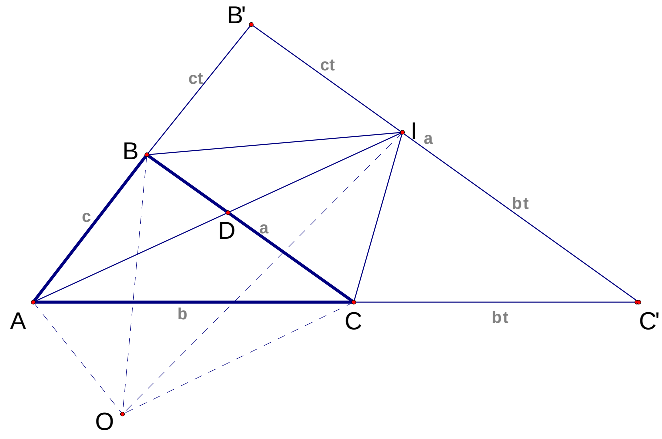
$$\overrightarrow{OI_a}=\frac{-a}{b+c-a}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{b+c-a}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{OC}\text{ 。}$$

（2）點I_b爲$\angle A$所對之傍心的充要條件爲

$$\overrightarrow{OI_b}=\frac{a}{a+c-b}\overrightarrow{OA}+\frac{-b}{a+c-b}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+c-b}\overrightarrow{OC}$$

（3）點I_c爲$\angle A$所對之傍心的充要條件爲

$$\overrightarrow{OI_c}=\frac{a}{a+b-c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b-c}\overrightarrow{OB}+\frac{-c}{a+b-c}\overrightarrow{OC}$$



圖（六）

證明：$(\Rightarrow)$只證明（1），而（2）與（3）同理，故省略。如圖（六），點I_a爲ΔABC ，$\angle A$所對之傍心。過點I_a作$\overline{B'C'}$平行$\overline{BC}$分別交$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$的延長線於B' 、C' 。由$\boxed{\text{性質 1}}$，可設$\overline{B'I_a}=ct$ ，$\overline{C'I_a}=bt$ ，又$\overline{B'I_a}=\overline{BB'}$且$\overline{C'I_a}=\overline{CC'}$ ，由

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}}\Rightarrow\frac{b}{b+bt}=\frac{a}{bt+ct}\Rightarrow\frac{1}{1+t}=\frac{a}{(b+c)t}\Rightarrow t=\frac{a}{b+c-a}$$ 。所以

$$\overrightarrow{AI_a}=\frac{bt}{bt+ct}\overrightarrow{AB'}+\frac{ct}{bt+ct}\overrightarrow{AC'}\quad=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB'}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC'}=\frac{b}{b+c}\left(\frac{c+ct}{c}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{c}{b+c}\left(\frac{b+bt}{b}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{b}{b+c}\left((1+t)\overrightarrow{AB}\right)+\frac{c}{b+c}\left((1+t)\overrightarrow{AC}\right)=\frac{b}{b+c}\left(\frac{b+c}{b+c-a}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{c}{b+c}\left(\frac{b+c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{b}{b+c-a}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}\text{ 。}$$

設O爲任一點，$\overrightarrow{OI_a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI_a}=\overrightarrow{OA}+\left(\frac{b}{b+c-a}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}\right)$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{b}{b+c-a}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\frac{c}{b+c-a}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{-a}{b+c-a}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{b+c-a}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{OC}\text{ 。}$$

$(\Leftarrow)$已知$\overrightarrow{OI_a}=\dfrac{-a}{b+c-a}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{b+c-a}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{b+c-a}\overrightarrow{OC}$，令點$O$爲點$A$代入，得

$\overrightarrow{AI_a}=\dfrac{b}{b+c-a}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}$。

設$\overline{AI_a}$交$\overline{BC}$於點D，可設$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AI_a}=t\left(\dfrac{b}{b+c-a}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}\right)$，因$B,D,C$共線

$\Rightarrow t\left(\dfrac{b}{b+c-a}+\dfrac{c}{b+c-a}\right)=1 \quad \Rightarrow t=\dfrac{b+c-a}{b+c}$。

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=c:b=\overline{AB}:\overline{AC}$，由$\boxed{\text{性質 1}}$知：$\overline{AI_a}$爲$\angle A$的內角平分線。

另一方面，令點O爲點B代入，得$\overrightarrow{BI_a}=\dfrac{-a}{b+c-a}\overrightarrow{BA}+\dfrac{c}{b+c-a}\overrightarrow{BC}$，$\because \overline{BD}:\overline{CD}=c:b$，

$\Rightarrow \overrightarrow{BI_a}=\dfrac{-a}{b+c-a}\overrightarrow{BA}+\dfrac{c}{b+c-a}\left(\dfrac{b+c}{c}\overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{-a}{b+c-a}\overrightarrow{BA}+\dfrac{b+c}{b+c-a}\overrightarrow{BD}\Rightarrow$

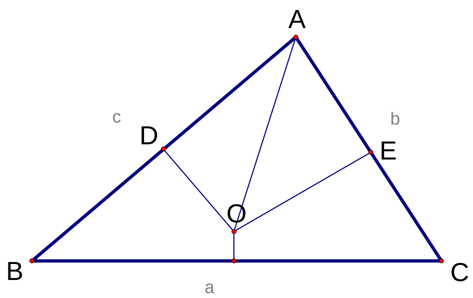
$\dfrac{b+c}{b+c-a}\overrightarrow{BD}=\dfrac{a}{b+c-a}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BI_a}\Rightarrow \overrightarrow{BD}=\dfrac{a}{b+c}\overrightarrow{BA}+\dfrac{b+c-a}{b+c}\overrightarrow{BI_a}$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{DI_a}=(b+c-a):a\Rightarrow \overline{AI_a}:\overline{DI_a}=(b+c):a$。又$\overline{AI_a}$爲$\angle A$的內角平分線

$\Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{c}{b+c}\overline{BC}$；因此，$\overline{AB}:\overline{BD}=c:a\times\dfrac{c}{b+c}=(b+c):a$。$\therefore \overline{AI_a}:\overline{DI_a}=\overline{AB}:\overline{BD}$，由$\boxed{\text{性質 2}}$可知：$\overline{BI_a}$爲$\angle B$的外角平分線。同理可證：$\overline{CI_a}$爲$\angle C$的外角平分線。故$I_a$爲$\Delta ABC$中$\angle A$所對之傍心。

伍、外心的向量性質：

我們將三角形外心與向量性質的充要條件寫成$\boxed{\text{定理 4}}$如下：



圖（七）

$\boxed{\text{定理 4}}$：如圖（七），在ΔABC中，點P爲任一點，則點O爲ΔABC的外心的充要條件爲

$$\overrightarrow{PO}=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

$=\dfrac{\cos A}{2\sin B\sin C}\overrightarrow{PA}+\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}\overrightarrow{PB}+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{PC}$，（其中$\Delta$表$\Delta ABC$的面積）

證明：$(\Rightarrow)$如圖（七），已知點O爲ΔABC的外心，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$。設$\overline{OD}\perp\overline{AB}$

於點D，$\overline{OE}\perp\overline{AC}$於點$E$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left(\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\angle OAB\right)=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{1}{2}c^2$。同理，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{2}b^2$。

設$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}c^2=c^2x+bc\cos Ay\\ \frac{1}{2}b^2=bc\cos Ax+b^2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2c^2x+2bc\cos Ay=c^2\\ 2bc\cos Ax+2b^2y=b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2c^2x+\left(b^2+c^2-a^2\right)y=c^2\\ \left(b^2+c^2-a^2\right)x+2b^2y=b^2\end{cases}$ -------（＊），由方程組（＊）可得

$\delta=\begin{vmatrix}2c^2 & 2bc\cos A\\ 2bc\cos A & 2b^2\end{vmatrix}=4b^2c^2\begin{vmatrix}1 & \cos A\\ \cos A & 1\end{vmatrix}=4b^2c^2\left(1-\cos^2 A\right)$

$=4b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)=\left(2bc\right)^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$

$=\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)$。由海龍公式$\Delta=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$，其中$s=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$，可知$\delta=\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)=16\Delta^2$。

由方程組（＊）可得$\delta_x=\begin{vmatrix}c^2 & b^2+c^2-a^2\\ b^2 & 2b^2\end{vmatrix}=2b^2c^2-b^2\left(b^2+c^2-a^2\right)=b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)$，

$\delta_y=\begin{vmatrix}2c^2 & c^2\\ b^2+c^2-a^2 & b^2\end{vmatrix}=c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)$。所以$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$=\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{AC}$。

設平面上任一點P，$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{PA}+x\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\right)+y\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)$

$=\left(1-x-y\right)\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}$

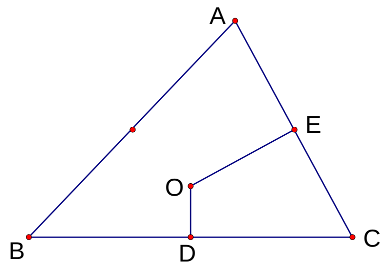
$$=\left(1-\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}-\frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\right)\overrightarrow{PA}+\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

$$=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}\text{ 。}$$

已得到$\overrightarrow{PO}=\dfrac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\dfrac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$，利用面積公式

$\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$，及餘弦定理$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$、$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$ 、 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$代入上式，即可得

$$\overrightarrow{PO}=\frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\overrightarrow{PA}+\frac{\cos B}{2\sin A\sin C}\overrightarrow{PB}+\frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{PC}\text{ 。}$$



圖（八）

$(\Leftarrow)$已知

$$\overrightarrow{PO}=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

，點P為平面上任一點，令點P為點A代入，得

$\overrightarrow{AO}=\dfrac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{AC}$ 。如圖（八），設點D為$\overline{BC}$中點，

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\right)\overrightarrow{AC}$ 。

因此

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\left(\frac{1}{2}-\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\right)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\frac{8\Delta^2-b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{2}\right)+\frac{8\Delta^2-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{32\Delta^2}\left\{16\Delta^2\left(b^2-c^2\right)+b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)^2-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2\right\}$$

$$=0\text{ 。}$$

所以，直線$\overleftrightarrow{OD}$為$\overline{BC}$的中垂線。同理可證$\overleftrightarrow{OE}$為$\overline{AC}$的中垂線。故點O為ΔABC的外心。

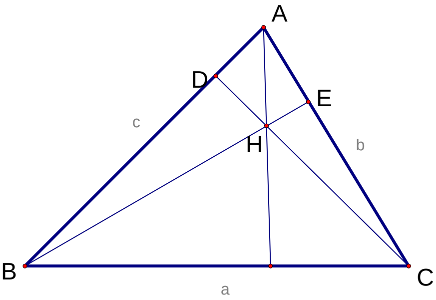
陸、垂心的向量性質：

我們將三角形垂心與向量性質的充要條件寫成 $\boxed{\text{定理 5}}$ 如下：

$\boxed{\text{定理 5}}$：如圖（九），在 ΔABC 中，點 P 為任一點，則點 H 為 ΔABC 的垂心的充要條件為

$$\overrightarrow{PH}=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

$=\cot B\cot C\overrightarrow{PA}+\cot A\cot C\overrightarrow{PB}+\cot A\cot B\overrightarrow{PC}$（其中 Δ 表 ΔABC 的面積）



圖（九）

證明：$(\Rightarrow)$ 如圖（九），ΔABC 中，$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$。

$\overline{CD}\perp\overline{AB}$ 於點 D，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ 於點 E，點 H 為 ΔABC 的垂心。

則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AE}\right|$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|\cos\angle HAB=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|\cos\angle HAC$ 因此，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$。

設 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}c^2x+bc\cos Ay=bc\cos A\\ bc\cos Ax+b^2y=bc\cos A\end{cases}$------（＊＊）。由方程組（＊＊）可得

$$\delta=\begin{vmatrix}c^2 & bc\cos A\\ bc\cos A & b^2\end{vmatrix}=b^2c^2\begin{vmatrix}1 & \cos A\\ \cos A & 1\end{vmatrix}=b^2c^2\left(1-\cos^2A\right)=b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)$$

$$=\frac{(2bc)^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4}=\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{4}=\frac{16\Delta^2}{4}=4\Delta^2\text{。}$$

$$\delta_x=\begin{vmatrix}bc\cos A & bc\cos A\\ bc\cos A & b^2\end{vmatrix}=b^2c\cos A\begin{vmatrix}1 & c\cos A\\ 1 & b\end{vmatrix}=b^2c\cos A\left(b-c\cos A\right)$$

$$=b^2c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\left[b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2-c^2+a^2\right)}{4}\text{，}$$

$$\delta_y=\begin{vmatrix}c^2 & bc\cos A\\ bc\cos A & bc\cos A\end{vmatrix}=bc^2\cos A\begin{vmatrix}c & 1\\ b\cos A & 1\end{vmatrix}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2+a^2\right)}{4}$$ 。

設平面上任一點P ，$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$$=\overrightarrow{PA}+x\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\right)+y\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)=\left(1-x-y\right)\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}$$

$$=\left(1-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\right)\overrightarrow{PA}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}$$

$$+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

接者，將面積公式$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$ ，及餘弦定理 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ 、 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$ 、 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$ 代入

$$\overrightarrow{PH}=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

，即可得$\overrightarrow{PH}=\cot B\cot C\overrightarrow{PA}+\cot A\cot C\overrightarrow{PB}+\cot A\cot B\overrightarrow{PC}$ 。

$(\Leftarrow)$ 如圖（九），已知

$$\overrightarrow{PH}=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PA}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PB}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{PC}$$

，點P為任一點。令點P為點A代入，得

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{AB}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{AC}$$ 。

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16\Delta^2}\frac{\left(b^2-a^2-c^2\right)}{2}+\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16\Delta^2}\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2}$$

$$=\frac{-1}{32\Delta^2}\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)+\frac{1}{32\Delta^2}\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)$$

$=0$ 。因此，直線$\overleftrightarrow{AH}$垂直$\overline{BC}$ 。同理可證，直線$\overleftrightarrow{BH}$垂直$\overline{AC}$ ，故點H為ΔABC的垂心。

柒、結論：

我們在本文的探討研究中，發現學生有時會提出看似平凡而卻容易被遺漏的問題，而這些問題在被提出後，往往是令人覺得深思的問題。平常在教學過程中，看到三角形的重心，便自然想到向量的性質 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ 的口訣，甚至很少特別提出這是三角形重心的充要條件；內心、傍心亦復如是。匆匆歲月，經過學生提問，才激勵我們將三角形五心與向量性質的充要條件，作進一步的整理，並完成五心與向量性質充要條件的證明，實在是感恩學生的提問與智慧。

從探討中我們深深感到教學相長的真實，學生的提問有時會激發老師另一層的深入思考，難怪古人說：「有天才學生，沒有天才老師。」因此，在此提出，千萬不可忽視學生的任何一個問題，好好去思考，一方面可爲學生解決問題；另一方面，可以深入自己的思考視野。雖然內心、傍心、外心、垂心的向量性質的充要條件很煩雜；但可以不必背，而可以純欣賞即可。可見數學是千變萬化，實在美不可言喻。

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎭中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南市：林倉億（家齊女中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

Information

利瑪竇與徐光啓合譯《幾何原本》四百週年紀念研討會

A Symposium for the Memory of Quarter-Centenary of the Chinese Translation of *Elements* by Matteo Ricci and Xu Guangqi

程序表

Program

11 月 **10** 日（星期六）

November 10, Saturday

8:45-9:15	報到 (Registration)
9:15-9:30	開幕 (Openning)
9:30-10:15	蕭文強:「歐先生」來華四百年
10:15-11:00	韓琦：幾何原本研究之歷史回顧
11:00-11:15	休息 (Break)
11:15-12:00	Jami：Studying Euclidean geometry in seventeenth century Europe and in late Ming and early China
12:00-13:30	午餐 (Lunch)
13:30-14:15	Ryden：Matteo Ricci SJ, the mathematical missionary
14:15-15:00	劉鈍：量法與幾何——從清人的幾何觀看學術、政治與文化的交互影響
15:00-15:15	休息 (Break)
15:15-15:45	彭良禎：艾儒略 (Aleni)《幾何要法》之研究
15:45-16:15	程和欽：杜知耕《數學鑰》之研究
16:15-16:30	休息 (Break)
16:30-17:00	廖淑芳：梅氏家學之最後代表：梅沖
17:00-17:30	陳彥宏：安清翹《矩線原本》之研究

11 月 **11** 日（星期日）

November 11, Sunday

9:00-9:45	Saito：Traditions of Euclid's Elements
9:45-10:30	Jochi：日本數學用語的起源——《幾何原本》起源用語與「和算」起源用語的交替
10:30-10:45	休息 (Break)
10:45-11:30	Volkov：Western geometrical objects in China the diagrams of the Chinese translation of the Elements

11:30-12:15	徐光台：西學衝激下徐光啓論月食成因中圖像呈現的歷史來由與意義
12:15-13:45	午餐 (Break)
13:45-14:30	黃一農：徐光啓、薩爾滸之役與西洋火砲
14:30-15:15	洪萬生：華蘅芳與《幾何原本》
15:15-15:30	休息 (Break)
15:30-16:00	鍾秀瓏：陳藎謨《度測》之研究
16:00-16:30	王鼎勳：吳起潛《無比例線新解》之研究
16:30-16:45	休息 (Break)
16:45-17:15	蘇惠玉：HPM 與高中幾何教學：以正焦弦爲例
17:15-17:45	陳玉芬：從 HPM 觀點看九年一貫國中數學幾何教材——以「尺規作圖」爲例
17:45-18:00	閉幕 (Closing)
18:00-20:00	晚宴 (Banquet)


通往數學聖殿 講座公告

主講人： 郭忠勝院長

（臺灣師範大學理學院院長, 數學系教授）

講　題： 應用數學淺談

時　間： 2007-11-06 19:30 (星期二)

地　點： 理學院大樓 B101

其　它： 歡迎全校大學部學生到場聆聽. 數學系學生到場者可於學習護照上核章, 一學期參加五次以上的同學系上將贈送精美小禮物. 整學期參加人數最多的數學系班級另有班級的獎勵!