HPM通訊

第十卷 第十一期 目錄（2007年11月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

歐幾里得及其輾轉相除法

台北市興雅國中 林壽福老師
鄭勝鴻老師

一、前言

古希臘的歐幾里得之活躍時期，大約是在公元前 300 年前後。

他的《幾何原本》是有史以來流傳最廣的一本著作，影響之大，只有基督教的聖經可以比擬，尤其公理化的呈現方式，更是深深影響了數學的發展。據說歐幾里得爲人誠實，謙遜和仁慈，從不掠人之美，譬如說吧，他從未聲稱《幾何原本》哪些部分是自己的獨創。

歷史上不乏叱吒風雲、赫赫有名的人物，例如拿破崙、亞歷山大大帝和馬丁路德，他們生前的聲望都遠遠超過歐幾里得，但沒有誰能夠像這位希臘幾何學家一樣，長期聲譽歷久不衰！

儘管我們對他的生平事蹟所知不多，然而，歐幾里得留下不少的遺聞軼事，對後人頗具啓發性。

普羅克洛斯的《概要》 記述說，托勒密王（Ptolemy）發現幾何難學，有一次就問歐幾里得說：「學習幾何學，是否有比研讀《幾何原本》更為便捷的途徑？」 歐幾里得答道：「啊！國王！在現實世界中有兩種路，一種是普通人走的，另一種專為國王準備的。但是，在幾何學中，不存在王者之路！」這句話被後人引伸其義爲「求知無坦途」，成爲傳誦千古的箴言！

斯托比亞斯（Stobaeus，約公元 500 年）所編的選集記載，說有一個學生跟歐幾里得學習幾何，學了第一個命題後，便問歐幾里得學這個命題有什麼用，歐幾里得說：「給他三個錢幣，因為他想在學習中獲取實利。」由此瞭解到他主張學習必須按部就班、努力鑽研，不贊成投機取巧的作風，也反對狹隘的功利主義。今天若從另一個觀點來詮釋這個故事的話，作者擬延伸註解如下：一個命題就是知識的進一步延拓，而不是一個命題值三個錢幣；另一方面從教育心裡學的觀點來看，也未嘗不可以「先予欲勾牽，再令入幾何之門」，就是在圓滿成就學習的途中，如果先以善巧方便來引發學習動機，等到學生上癮之後，再以更高的挑戰、發現的樂趣來滿足其成就感，這樣的歷程就足以和畢達哥拉斯的傳說故事相互輝映，而有異曲同工之妙了。

事實上，歷史上有很多傑出人物，都受到《幾何原本》的影響，比如說吧，發明座標幾何的哲學家笛卡兒最強調方法論（methodology），主要是受到歐幾里得的啓發；愛因斯

坦也說：「如果歐幾里得無法點燃你年輕的熱情，那麼你生來就不是一位科學思想家。」甚至美國女詩人米蕾（Millay）頌揚歐幾里得也稱讚：「只有歐幾里得動見過赤裸裸的美」（Euclid alone has looked on beauty bare.）。

歐幾里得誠然是最偉大的教師之一，是第一流的數學寫作專家，他的曠世名作《幾何原本》，蒐集了畢達哥拉斯年代與柏拉圖年代的偉大數學成果，並且寫成十三冊，流傳於後世已達兩千多年。

二、輾轉相除法

一般老師在介紹輾轉相除法（常見的直式算則）的操作運算，學生照程序依樣畫葫蘆地執行一下，通常沒有什麼問題，但要讓國、高中生瞭解其中的運作原理，就不是那麼容易了。即使連受過大學教育的成人，回顧自己已往所學知識時，也多數會對隱藏其中的道理不甚了了。

流傳兩千多年的歐基里得輾轉相除法，其操作原理和證明常因為詮釋者所使用表徵語言的不同，有時對認知發展還未成熟的學生而言，真的是抽象難懂！但實際檢視《幾何原本》的方法，其應用線段拼砌的度量方法，其實提供了可以具體操作的演譯過程，如果去除「歸謬證法」（reduction to absurdity）的論理部分，另加以現代語言的說明和圖示，可能連小四學生都能理解。

輾轉相除法又名歐幾里得算則（Euclidean algorithm），在求兩個正整數之最大公因數。它是目前已知最古老的算則，年代可追溯至公元前 300 年左右，首次出現於歐幾里得的《幾何原本》（第 VII 卷，命題 1 和 2）中，在中國則可以追溯至西漢（公元前 186 年）的《筭數書》。不過，由於現傳幾何原本之版本頂多只能追溯到公元第十世紀，所以，目前可以確定的最早版本非中國的《筭數書》莫屬！

一般高中課本所介紹之輾轉相除法，通常會先以具體數字進行直式運算，再輔以橫式說明，例如以求 2183 與 2419 之最大公因數為例：

q_2 ………… 9	2183	2419	1…………q_1
	2124	2183	
r_2 ………………	59	236	4…………q_3
		236	

$\boxed{\text{說明}}$：$2419=2183\times1+236$，$(2419,2183)=(2183,236)$
$2183=236\times9+59$，$(2183,236)=(236,59)$
$236=59\times4$，$(236,59)=59$

以上算則成立的理由，關鍵在於如果 $a=bq+r$，則 a、b 的全體公因數和 b、r 全體的公因數是一致的，特別是 $(a,b)=(b,r)$。一般課本證明如下：

$\boxed{\text{證明}}$：設 t 是 a，b 的一個公因數，則 $t\mid a$， $t\mid b$；而 $t\mid bq$，由已知 $a=bq+r$，
得 $a-bq=r$，
$\because t\mid(a-bq)$，即 $t\mid r$，
$\therefore t$ 也是 b，r 的一個公因數。

反之，設 s 是 b，r 的一個公因數，則 $s \mid b$，$s \mid r$，

$\because s \mid bq+r$，即 $s \mid a$，$\therefore s$ 也是 a，b 的公因數。

故 a、b 的全體公因數和 b、r 全體的公因數是一致的，當然它們也會有相同的最大公因數，即 $(a,b)=(b,r)$。 （二）

接著，歐幾里得《幾何原本》的方法會被表述爲底下的現代算術語言：

設有不同時爲 0 的任意整數 a 和 b，且設 b≠0，則

$$a = bq_1 + r_1 (0 < r_1 < b)$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 (0 < r_2 < r_1)$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 (0 < r_3 < r_2)$$
$$r_2 = r_3 q_4 + r_4 (0 < r_4 < r_3)$$
$$\ldots\ldots$$

如果餘數 $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots$ 都不爲 0，則這些餘數構成一個遞減的正整數序列。

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots\cdots > 0$$

因此，至多在 b 步之後，必然出現餘數等於 0 的情況，即

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n (0 < r_n < r_{n-1})$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 \qquad （三）$$

故 $(a,b)=(b,r_1),(b,r_1)=(r_1,r_2)=(r_2,r_3)=\cdots\cdots=(r_{n-1},r_n)=(r_n,0)=r_n$

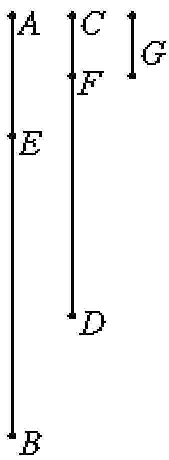
以上方法比較簡潔，也比較多人使用，但這樣的算式表徵和證明方法要傳達給初學數論的高中生並不容易，何況是學齡較淺的國中生，所以作適當的轉化或許可以獲得更好的教學成效。

三、《幾何原本》的輾轉相除法

如果回頭實際檢視《幾何原本》的內容，歐基里得是用線段長度表示數的大小，然後運用輾轉度量（相減）的方式，求出兩數的最大公因數，在第 VII 卷命題 i 作這樣的描述：

設有不相等的二數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直作下去，若餘數總是量不盡其前個數，直到最後的餘數為一個單位，則該二數互質。

當某數能量盡它前面的數時，歐基理得在第 VII 卷命題 ii 中利用線段拼量的方法，證明了這數就是開始兩個數的最大公因數。



已知兩個不互質的數，求它們的最大公度數（公因數）。

〔證明〕

設 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 是不互質的兩數，求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的最大公度數。

1. 若 $\overline{CD}$ 量盡 $\overline{AB}$ ，而 $\overline{CD}$ 也量盡 $\overline{CD}$ ，則 $\overline{CD}$ 就是 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AB}$ 的一個公度數。

且顯然 $\overline{CD}$ 也是最大公度數，$\because$ 沒有比 $\overline{CD}$ 大的數能量盡 $\overline{CD}$ 。

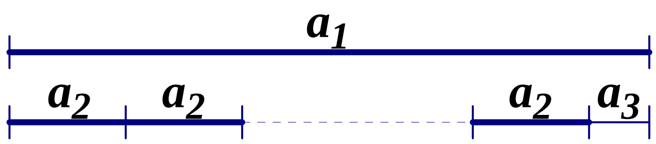
2. 若 $\overline{CD}$ 量不盡 $\overline{AB}$ ，則就用餘數去量 $\overline{CD}$ ，如果量不盡，再用後面的

餘數量前面的餘數，直到最後的餘數能量盡它前面的數。

這最後的餘數不會是一個單位，否則$\overline{AB}$、$\overline{\mathrm{CD}}$就是互質，將與假設矛盾。（VII.i）

3. 設$\overline{\mathrm{CD}}$量$\overline{AB}$得$\overline{BE}$，餘數$\overline{EA}$小於$\overline{\mathrm{CD}}$，設$\overline{EA}$量$\overline{\mathrm{CD}}$得$\overline{DF}$，餘數$\overline{FC}$小於$\overline{EA}$，又設$\overline{CF}$量盡$\overline{AE}$。這樣，因爲$\overline{CF}$量盡$\overline{AE}$，以及$\overline{AE}$量盡$\overline{DF}$，所以$\overline{CF}$也量盡$\overline{DF}$。
4. 但是$\overline{CF}$也量盡它自己，所以它量盡整體$\overline{\mathrm{CD}}$。然而$\overline{\mathrm{CD}}$量盡$\overline{BE}$，所以$\overline{CF}$也量盡$\overline{BE}$。但是$\overline{CF}$也量盡$\overline{EA}$，所以它也量盡整體$\overline{BA}$。然而它也量盡$\overline{\mathrm{CD}}$，所以$\overline{CF}$量盡$\overline{AB}$、$\overline{\mathrm{CD}}$。所以$\overline{CF}$是$\overline{AB}$，$\overline{\mathrm{CD}}$的一個公度數。其次可以證明它也是最大公度數。
5. 若$\overline{CF}$不是$\overline{AB}$、$\overline{\mathrm{CD}}$的最大公度數，那麼必有大於$\overline{CF}$的某數將量盡$\overline{AB}$、$\overline{\mathrm{CD}}$。設量盡它們的數爲 G。
6. ∵G 量盡$\overline{\mathrm{CD}}$，而$\overline{\mathrm{CD}}$量盡$\overline{BE}$，那麼 G 也量盡$\overline{BE}$。但是 G 也量盡整體$\overline{BA}$，所以它也量盡餘數$\overline{AE}$。但是$\overline{AE}$量盡$\overline{DF}$，所以 G 量盡$\overline{DF}$。然而 G 也量盡整體$\overline{\mathrm{DC}}$，所以它也量盡餘數$\overline{CF}$，即較大的數量盡較小的數：這是不可能的。所以，沒有大於$\overline{CF}$的數能量盡$\overline{AB}$、$\overline{\mathrm{CD}}$。因而$\overline{CF}$是$\overline{AB}$、$\overline{\mathrm{CD}}$最大公度數。

從以上證明，可以看出歐基里得的輾轉相除法係透過實物操作的具體對應，來作論證，這爲我們開啓了能明晰轉化的靈感。如果將圖示拼砌得更清楚一些，甚至可以讓還沒有學過質數和質因數分解的小四學生都能懂。首先設兩個正整數$a_1, a_2\,(a_1 > a_2)$，如下圖所示，用線段a_2去量線段a_1，設餘下空隙（餘數）$a_3\ (a_2 > a_3)$。

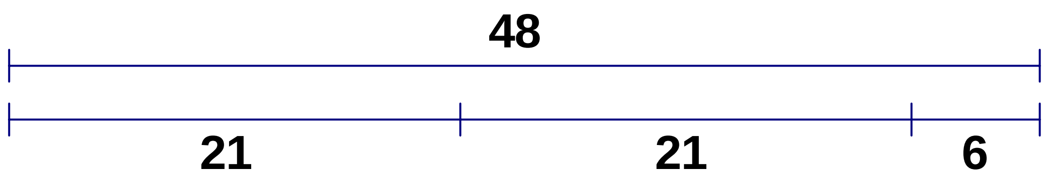


顯然，從圖示中看得出，能同時量盡a_1及a_2的線段都能量盡a_2及a_3，反之亦然。因此，a_1, a_2的公因數完全與a_2, a_3的公因數相同。所以，a_1, a_2的最大公因數等於a_2, a_3的最大公因數，即$(a_1, a_2) = (a_2, a_3)$。

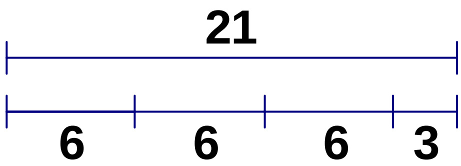
底下舉例說明如何通過遞迴算法具體舉例，求出兩數的最大公因數。

例一：求 48 和 21 的最大公因數。

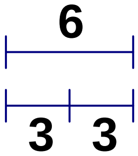
第一步：48 除以 21 的餘數是 6，∴ $(48,21) = (21,6)$。



第二步：轉化爲求 21 和 6 的最大公因數，21 除以 6 的餘數是 3，∴$(21,6) = (6,3)$。



第三步：轉化爲求 6 和 3 的最大公因數，3 能整除 6，$\therefore (6,3)=(0,3)$。



總之， $(48,21)=(21,6)=(6,3)=(0,3)=3$ ，故 48 和 21 的最大公因數是 3。

一般而言，拓展一個遞迴算法，$(a_1,a_2)=(a_2,a_3)=\cdots\cdots=(a_n,a_{n+1})$，是只要找到 a_{n+1} 能量盡 a_n（即 $(a_n,a_{n+1})=a_{n+1}$），就知道能同時量盡 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{n+1}$，各線段中最長的便是 a_{n+1}。又因爲 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{n+1}$ 構成一個嚴格的遞減正整數序列，下限爲 1，因此輾轉拼量的步驟必在有限步內停止。

四、結語

雖然現存的史料稀少，我們無法對歐幾里得生平事蹟有更多認識（參見附錄 I），但從他留下的曠世巨作《原本》，還是可以感受其偉大之處，尤其《原本》對歷代數學家和科學家們的影響相當深遠，歷史上還沒有任何一本書能超越它，因此歷經兩千多年恆久芬芳。

在解讀原始的文本中不僅有知識的結論，更記錄了知識形成的思維過程，這樣才能對我們所教的內容有更深刻的理解乃至欣賞，從而領悟問題的本質。模仿數學家的心智活動歷程，用心體會和領悟教材，雖然只是分析一個小小的數學概念，卻往往可以促進我們的教學成效。著名的數學與數學教育家波利亞（G. Polya）指出：「只有理解人類如何獲得某些事實或概念的知識，我們才能對人類的孩子應該如何獲得這樣的知識作出更好的判斷。」荷蘭著名數學教育家弗賴登塔爾（H. Freudenthal）也說：「年輕的學習者重蹈人類的學習過程，儘管方式改變了。」一些美國學者更堅信，指導個體認知發展的最佳方法是讓他回溯人類的認知發展。因此，歷史的順序是數學教學的指南之一。

從汲取歐幾里得的智慧中，也印證了數學教師的 PCK 素養的重要性，換句話說，數學教師要如何將自己所學習的數學知識，轉化成教學現場學生可以學習的知識，才是數學教師們最該關切的重點。

最後，就以數學史家洪萬生的話作結語，他說：「當教師要告訴學生一個方法有效時，不見得要提供一個證明，老師也可以提供一個『說明』，提供一個學生可以理解的『說明』，或許更有意義！」

參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

藍紀正、朱恩寬譯（2002 年）《歐幾里得˙幾何原本》，台北市：九章出版社。

洪萬生等（2006 年）《數之起源》，台北市：台灣商務印書館。

洪萬生（2006 年）《此零非彼 0》，台北市：台灣商務印書館。

吳文俊主編（2003 年）《世界著名數學家傳記》（上集），中國北京：科學出版社。

梁宗亘（1995 年）《數學歷史典故》，台北市：九章出版社。
李繼閔（1998 年）《九章算術 導讀與譯注》，中國西安：陝西科學技術出版社。
葉嘉慧˙馮振業（2003 年）〈最大公因數和最小公倍數：以線段表示開創教學空間〉，《數學教育》第十七期。香港：香港數學教育學會出版。
袁小明主編（1999 年）《數學伴教——名師授課手記》，台北市：九章出版社。
歐陽絳編著（2002 年）《數學軼事》，台北市：九章出版社。
蔡聰明（2000 年）《數學的發現趣談》，台北市：三民書局。
余文卿主編（2003 年）《數學 1》92 學年度樣書，台北縣：龍騰文化。

附錄 I：有關歐幾里得的生平

歐幾里得是托勒密一世（Ptolemy Stoer，約 367-282 B.C.）時代的人，早年留學雅典，受到柏拉圖學派的影響，他的《幾何原本》中引用了學派中許多前人的成果，例如歐多克索斯（Eudoxus）、泰特托斯（Theatetus）等，一般推斷他可能也是這個學派的成員。又因爲阿基米德（Archimedes）的書引用過《原本》中的命題，可見他早於阿基米德，也早於埃拉托塞尼（Eratosthenes）。（參引書 5，pp. 59-60）有關歐幾里得的生卒年代，由於留下的文獻資料有限，當中細節鮮爲人知。一般是根據下列的記載來確定的，普羅克洛斯（Proclus，約公元 412-485 年）爲《幾何原本》卷 I 作注，所寫的《幾何學發展概要》（以下簡稱《概要》），這是研究希臘幾何學史的兩大重要原始參考資料之一。另一種資料，是帕波斯（Pappus）的《數學匯編》（Mathematical collection）（以下簡稱《匯編》）。

另外一方面，透過亞里士多德的著作，也可以核對歐幾里得的年代，並且知道《原本》中建立設準、公理的體例，顯然是受到亞里士多德邏輯思想的影響。比對他們兩人的著作差異，可以堆斷歐幾里得活動的年代，應該在亞里士多德之後。帕波斯《匯編》中提到阿波羅尼斯（Apolloninus）長期住在亞歷山大，和歐幾里得的學生在一起，這說明歐幾里得在亞歷山大當過老師。

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂**PDF**電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

當輾轉相除法遇上更相減損術

台北市興雅國中 林壽福老師

一、前言

對照歐幾里得的輾轉相除法，中國早期也有解決求最大公因數問題的算則，就是更相減損術。兩者方法在本質上完全相同，數學家兼數學史家 van der Waerden 甚至懷疑兩者搞不好是抄襲同一個版本。嚴格來說，兩者都是輾轉相減法，因爲它們都是利用連續減法來進行說理論證，當然，我們可以說「除法」是「減法」的濃縮。其實，對於不只求兩個數的最大公因數時，更相減損術更顯得優越性。

二、更相減損術

更相減損術記載見於《九章算術》方田章約分術，可以求出一個分數的分子、分母的最大公因數，其步驟如下：

約分術曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。

「更相減損」本來是給分數進行約分的一種方法。翻譯成現代語言爲：

第一步：任意給出的一個分數，判斷分母、分子是否都是偶數？若是，用 2 約簡；若不是，執行第二步。

第二步：將分母、分子分別放置，以較大的數減去較小的數，接著把較小的數與所得的差比較，並以大數減小數。繼續這個操作，直到所得的數相等爲止，然後用這個相等的數對分數約分。其中，這個數（等數）或這個數與約簡的數的乘積就是所求的最大公因數。

具體舉例如下：

$\boxed{\text{例一}}$：對分數 $\frac{126}{98}$ 進行約分。

第一步：**可半者半之**。將分子、分母約去 2，得 $\left(\frac{126}{98}=\frac{63}{49}\right)$；

第二步：**副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。**

$$(63,49)\rightarrow(14,49)\rightarrow(14,35)\rightarrow(14,21)\rightarrow(14,7)\rightarrow(7,7)$$

以等數約之，再將 $\frac{63}{49}$ 分子、分母用 7 約，就可以得到最簡分數 $\frac{9}{7}$，而約去的 2 與 7 的乘積 14，就是分母 98 與分子 126 的最大公因數。

在教學上將「更相減損」加以改進，就可以求兩個數的最大公因數了，也就是把第一步「可半者半之」去掉，計算如下：

$$(126,98)\rightarrow(28,98)\rightarrow(28,70)\rightarrow(28,42)\rightarrow(28,14)\rightarrow(14,14) \tag{一}$$

用 14 對 $\frac{126}{98}$ 進行約分就可以了，14 也就是分母 98 與分子 126 的最大公因數。

列成直式後，再與歐基里得的「輾轉相除法」比較，可以看出兩者方法很類似，除法可以看成連續的減法。

126－98＝28

98－28＝70
70－28＝42
42－28＝14
28－14＝14
14－14＝0　（二）

劉徽在《九章算術注》說：「**其所以相減者，皆等數之重疊。**」相當於揭露了輾轉相除法所運用的原理：

設 a 和 b 都是正整數，且 $a>b$，若 $a=bq+r$，$0<r\leqq b$，則 $(a,b)=(b,r)$。

由於 a 與 b 的最大公因數和 b 與 r（a 與 b 屢次相減後所得餘數）的最大公因數相同（最大公因數彼此重疊），所以可以用相減的辦法，通過減少重疊次數而得到最大公因數。如果往前追溯，中國更早的一套竹簡《算數書》（公元前 186 年，西漢呂后二年），也有大同小異的記載。

通常六、七年級就會學質因數分解法，也因爲最大公因數可以從質因數乘積當中提取，從這個角度出發，我們又可以得到一個如下性質：

若 a，b 兩數的 gcd（最大公因數）為 f，則 f 能整除（$a-b$）。

$\boxed{\text{說明}}$：設 $a>b$,

$$a=f\times(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_i)$$
$$b=f\times(b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_j)$$
$$a-b=f\times(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_i-b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_j)$$

$\therefore$ a，b 的最大公因數能整除（$a-b$）。

這也說明了，我們可以利用「輾轉相減法」求最大公因數。
因爲
$a-b=c$　（則 f 能整除 a，b，c）
$b-c=d$　（則 f 能整除 a，b，c，d）
$c-d=e$
…
$i-j=0$　（則 f 等於 j）

藉助這個性質，更進一步，我們再與更相減損術相結合，舉例說明如下：

$\boxed{\text{例二}}$：求 437 和 322 的 gcd（最大公因數）。
設兩數的 gcd 爲 f，則：
437－322＝115　f 必能整除 115
322－115＝207　f 必能整除 207
207－115＝92　f 必能整除 92
115－92＝23　f 必能整除 23
92－23＝69　f 必能整除 69
69－23＝46　f 必能整除 46

46－23＝23　　　　f 必能整除 23
23－23＝0
∴ 437 和 322 的 gcd 為 23。
其中步驟可以簡化為：
437－322＝115
322－115＝207
207－115＝92
115－92＝23　　（23 是 115 和 92 的 gcd，不用再算下去。）

例三：求 210 和 182 的 gcd。
設兩數的 gcd 為 f，則：
210－182＝28　　f 必能整除 28
182－28＝154　　f 必能整除 154
154－28＝126　　f 必能整除 126
126－28＝98　　f 必能整除 98
98－28＝70　　f 必能整除 70
70－28＝42　　f 必能整除 42
42－28＝14　　f 必能整除 14
28－14＝14　　f 必能整除 14
14－14＝0
∴ 210 和 182 的 gcd 是 14。
其中步驟可以簡化為：
210－182＝28
182－28×6＝14　　（14 是 182 和 82 的 gcd，不用再算下去。）

上述方法雖然有一點繁瑣，尤其數字變大了之後，需要的步驟更多，但對於初學輾轉相除法的國、高中學生而言，會比較容易接受些。畢竟整體過程是，由淺而深，由具體到抽象，多了教學上的引導，學生可以逐步拾級而上。

中國晚清一代疇人李善蘭精通中國傳統數學，他將歐幾里得的方法直接了當地譯為「求等數法」，正確指出了歐氏方法和中國更相減損術的一致性。

三、輾轉相除法與更相減損術之比較

對比輾轉相除法與更相減損，我們可以發現如下之特性：

- 兩者都可以求得最大公因數。計算方面兩者本質上運用輾轉相減法，具有相當的一致性。但歐氏的方法通常被詮釋為除法，是因為用小數度量大數，這種除法其實就是濃縮的減法，所以感覺上計算次數相對較少，特別當兩個數字大小區別較大時，計算次數的區別比較明顯。
- 從結果形式來看，輾轉相除法的結果是以相除餘數為 0 而得到，更相減損術則以減數與差相等而得到。
- 就論證形式觀之，輾轉相除法具備了命題論證的「推演關係」，而劉徽對更相減損術所作注，則是掌握了論述句間的「核證關係」。
- 值得一提的是，對於求不只兩個數的最大公因數，古代中國的更相減損術就更顯示出它的優越性。說明如下例四。

$\boxed{\text{例四}}$：求 623、1424、801、1513 四個數的最大公因數。

更相減損術可以不顧次序挑選最方便的，從較大的數中減去較小的數，求其等數即可：

$$
\begin{aligned}
&(623,1424,801,1513)\\
&=(623,1424-801,801-623,1513-1424)\\
&=(623,623,178,89)\\
&=(623-6\times 89,623-6\times 89,178-89,89)\\
&=(89,89,89,89)\\
&=89
\end{aligned}
$$

四、結語

通常教師引進輾轉相除法的時機，是遇到數字比較大且不容易作質因數分解的例子，此時，透過直式算則可以很方便求得兩數的最大公因數，相對於更相減損術其所使用的步驟數也比較少。但碰到求解多個數的 gcd 時，就必須連續調用該程序，非常繁瑣，而此時若利用更相減損術則可以不顧順序，一舉求出任意多個數的最大公因數，效率高出很多。

比對中西方不同文本內容，讓我們截長補短地汲取各方的長處和智慧，這對於教師教學與學生學習都有莫大的幫助。針對此篇短文，教師參酌後，若能配合學生的認知發展，作適性的引導，將可以提升教學成效，並有助於學生情意的陶冶；學生在充分瞭解之後，則能感受到一題多解的妙趣、古人的深奧智慧，並拓展學習的觸角，因此，習得的將不僅是數學知識而已，還有解題的策略與方法，更有文化薰習的內涵。

參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

藍紀正、朱恩寬譯（2002 年）《歐幾里得˙幾何原本》，台北市：九章出版社。

洪萬生等著（2006 年）《數之起源》，台北市：台灣商務印書館。

洪萬生（2006 年）《此零非彼 0》，台北市：台灣商務印書館。

李繼閔（1998 年）《九章算術 導讀與譯注》，中國西安：陝西科學技術出版社。

袁小明主編（1999 年）《數學伴教——名師授課手記》，台北市：九章出版社。

從複數到四元數

台師大數學系碩士班研究生 黃俊瑋

一、前言

過去，數學家為了解諸如$x^2+1=0$ 實係數代數方程式，從而引入了所謂的複數$a+ib$，由代數基本定理，我們可知每個實係數方程式在複數體之中都有解。從解方程式的觀點看來，拓展至此，現有的數系已經足夠，我們不需要再拓展其它的數，來確保方程式的解存在。

然而，在幾何上，相關的研究發展則尚未完成。一般而言，複數可用來表示二維平面上的位移或向量，而當我們將某一向量乘上一個單位長複數，可表示二維空間中向量的旋轉。同時，我們也知道，當數學家把複數化為極式後，即為複數的乘除、複數的 n 次方與開 n 次方根等運算上，帶來了極大的便利。因此，數學家轉而嘗當試尋找出三維空間中的類似結構。

在應用數學的領域中，數學與物學家希望能找到方法，有效地處理三維物理空間中的位移與向量，因此，能否定義二維以上空間中的超複數，藉以表示該空間中的位移與旋轉，即成為令數學家和物理學家們感興趣且重要的問題。數學家們希望透過發現新的超複數，用來表示三維中的向量，並且，使得當我們乘上該超複數時，等價於在三維空間中的旋轉。如此一來，對於許多一般空間當中之物理定律的公式化，將變得非常有用。最後，數學家也希望能再進一步地將複數的結構，推廣至任意維度空間之中。

然而，上述問題的答案，遠比數學家們想像中來得因難，對於複數在二維平面上的幾何表徵，已在十九世紀早期有了許多重大的結果與發展，接著，許多數學家開始著手進行推廣、一般化至三維與多維空間的工作。其中，最關鍵的進展由 Hamilton (1805-1865)首先取得。Hamilton 作為傑出的數學與物理學家，在數學與物理上的許多領域皆有很傑出的貢獻，他在 1833 年的論文裡，首次將複數視作為(a,b)的形式，而加法與乘法分別滿足如下規則：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

在形式上，複數第一次被視為與有序實數數對 (order real number pair) 等價，同時，這個數對等價於二維的向量，而後，Hamilton 也據此嘗試將其推廣至三維 (a,b,c) 的形式。類比地，在二維中形如 $a+bi$ 的複數，在三維中可改寫為 $a+bi+cj$，其中包含了i與j兩個非實數的單位，就如同複數當中i所扮演的角色與地位，而如此推廣所得到的新複數，可用以表示三維空間中的向量。

首先，在加法運算的定義上，就如同一般我們所熟知的平行四邊形法則：

$$(a+bi+cj)+(a'+b'i+c'j)=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j$$

然而，持續了十年的努力，Hamilton 卻始終無法有效地克服困難，順利地利用類似二維複數的乘法規則來定義三維的運算。直到 1843 年的某一天，Hamilton 才終於領略到這個新複數必需用到 4 個實數，而非原始直觀的想法中的 3 個實數，同時，也必需捨棄了我們習

以爲常的乘法交換律。

二、四元數的誕生

1. 為何 4 非 3？

透過對於幾何的探討，我們可以清楚地爲解爲何需要 4 個實數，而非 3 個。在二維的情形中，我們透過 (1) 旋轉的角度，(2) 向量長度改變的比例，這兩件事來刻畫乘上一個複數所代表的旋轉情形。然而在三維中，當我們乘上一個超複數，使得向量 A 變換爲向量 B (如圖 1)，我們首先必需知道向量 A 所對應的旋轉軸 OO' 的方向。當我們刻劃空間中的方向時，共需要用到兩個數 (例如：經度與緯度角)。再者，我們仍需要一個數來表徵向量 A 對於此旋轉軸的旋轉角，還有另一個數表示向量 A 長度的伸縮變化量。如此而言，我們的新數必須具有 4 個實數，形如 $a+bj+ck+dl$ ，其中 a,b,c,d 皆爲實數，而 j,k,l 則爲新的單位元素，類似於複數中 i 的角色。而 Hamilton 稱呼這類新數爲四元數 (quarternions)。

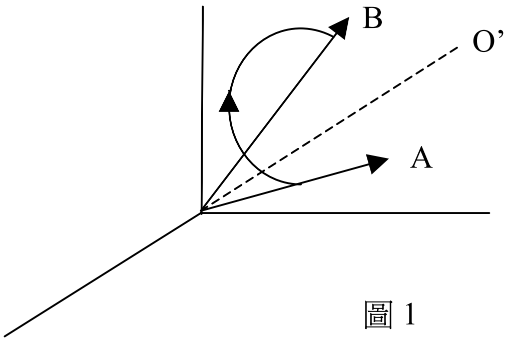


圖 1

2. 如何定義 j,k,l 之間的運算規則呢？

四元數誕生後，數學家的首要任務，即設法定義出 j,k,l (如同複數 $i^2=-1$ 的角色)其相關的運算規則。起初，Hamilton 假設過去我們常用的一般代數的運算規則都成立。而這裡，我們必需注意到，在這個時代之前，人們並不並曾意識到有任何其它的代數運算規則存在著。不久，Hamilton 隨即發現，當他應用一般所熟悉的加法與乘法規則於他所發明的四元數時，竟導致了某些不合理、矛盾之處，因此，他也意識到某種創新的觀點之必要，同時，看來也必須捨棄一般進行「數」的運算的過程中，某些我們習以爲常的規則。

當 Hamilton 著手定義四元數的除法時，一切的工作變得比較明朗。爲了定義除法，首先需要的是，對任意定某個的非 0 的四元數 w 而言，方程式 $ww_1=1$ (1 爲單位四元數 $1+0j+0k+0l$) 應存在唯一的四元數解。我們先來考慮一般的複數的情形，由於 $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$ ，所以，對於每一個非 0 的複數 $a+ib$ 而言，都存在唯一複數 ：

$$(a+ib)^{-1}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=(\frac{a}{a^2+b^2})-i(\frac{b}{a^2+b^2})$$ 。

仿照上例，對於任一個四元數 $w=a+bj+ck+dl$ ，我們必須將 $N(w)=a^2+b^2+c^2+d^2$ 分解爲兩個四元數因子。

我們首先嘗試： $a^2+b^2+c^2+d^2=(a+bj+ck+dl)(a-bj-ck-dl)$ ，其中，可把

$a-bj-ck-dl$ 視爲 $a+bj+ck+dl$ 的共軛四元數，當我們利用原始數的運算規則將等式的左邊展開時，可以得到諸如 $-b^2j^2$ 的項，因此，可顯示我們仍需採用 $j^2=-1$ 的規則，然而，這也出現了 $-2bcjk$ 的交叉項，因此，該分解方式宣告失敗。但是，一旦我們捨去乘法交換律，使得 $jk \neq kj$，那麼，原本的交叉項即可寫成 $-bc(jk+kj)$，如果令 $jk=-kj$，則使得該項可化爲 0。綜合以上，我們可定義：$j^2=k^2=l^2=-1$，$jk=-kj$，$kl=-lk$，$lj=-jl$，使得上述分解式成立。同時，爲保持乘法封閉性，確保任兩個四元數的乘積仍然是四元數，我們必需使得 jk 可表示爲 j,k,l 的線性組合。最終，Hamilton 假設 $jk=-kj=l$，$kl=-lk=j$，$lj=-jl=k$ 成立，如此一來，我們可得到：

$(a+bj+ck+dl)^{-1}=\frac{a}{r}-\frac{b}{r}j-\frac{c}{r}k-\frac{d}{r}l$，其中 $r=a^2+b^2+c^2+d^2$。而四元數除了乘法不具交換性之外，滿足了體 (field) 的所有其它公設 (這樣的集合我們通常稱爲斜體 skew field 或 division algebra)。値得注意的是，兩個四元數乘積的賦範 (norm) 等於這兩個四元數各自賦範的乘積，即 $N(w_1w_2)=N(w_1)N(w_2)$。

三、四元數的應用與發展

1. 如何描述三維空間中，向量的旋轉？

在此，我們檢驗四元數如何描述三維空間中向量的旋轉。也許許多人會好奇，爲什麼四元數的乘法運算，所需要的是非交換的規則？而這個問題的答案，主要是因爲當一個三維空間中的向量，連續對不同的轉軸進行兩次旋轉，會形成一個不可交換的過程。舉個例子來說，當我們拿一隻鉛筆，將其一端置於原點，而筆尖朝向正 z 軸。首先，我們將筆對 x 軸旋轉 90 度，此時筆朝向正 y 軸，我們再對 z 軸旋轉 90 度角，此時筆位於 x 軸的正向上。相反地，若我們先對 z 軸旋轉 90 度角，此時筆落在原處，再對 x 軸旋轉 90 度角，筆位於 y 軸的正向上。如此可以很明白地顯示出，四元數乘法所代表的旋轉之間，並不具交換性。

2. 三維空間中，任一向量對於某給定的轉軸與旋轉角 θ 的旋轉公式

我們可利用 $bj+ck+dl$ 來表示三維空間中的向量 (這個四元素又被稱爲純四元數，其實部爲 0)，我們希望這個向量繞著給定的軸，旋轉一個角度 θ，而這個軸的方向由其方向餘弦 (direction cosines) α,β,γ 所決定。而新的向量 $v'=b'j+c'k+d'l$ 可透過如下的四元數乘法獲得：

$$v'=\left\{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}(bj+ck+dl)\right\}\times v\left\{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}(bj+ck+dl)\right\}$$

其中，我們必需決定對於旋轉軸的正弦，同時從旋轉軸的正向觀察，若逆時針轉 θ 爲正，順時針轉則 θ 爲負，如圖 2 所示：

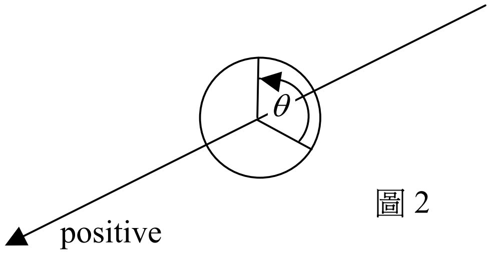


圖 2

在此，我們並不深入探討此公式的來源。但我們仍可以透過前述例子檢驗此公式。首先，假設某一單位向量位於正 z 軸O_z上，則可得$v=l$，當我們將 v 對 x 軸O_x旋轉$+\dfrac{\pi}{2}$，則$\alpha=1,\beta=\gamma=0$，於是，旋轉所得向量爲

$v'=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+j\sin\dfrac{\pi}{4}\right)l\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-j\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}(1+i)(1-j)$，再利用四元數的運算法，則我們可以得到$v'=\dfrac{1}{2}(1+i)(1-j)=\dfrac{1}{2}(l-k-k-l)=-k$。

再來，我們再對 z 軸O_z旋轉$+\dfrac{\pi}{2}$，可得：$v''=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+l\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(-k)\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-l\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}(1+l)k(1-l)=-\dfrac{1}{2}(k-j)(1-l)=-\dfrac{1}{2}(k-j-j-k)=j$，

因此，此向量最後落在 x 軸的正向上。

另一方面，倘若旋轉的次序相反時，先獲得：$\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+l\sin\dfrac{\pi}{4}\right)l\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-l\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=l$，然後得到：

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}\right)l\left(\cos\frac{\pi}{4}-j\sin\frac{\pi}{4}\right)=-k，$$

意即此向量落在 z 軸的負向上。

從上述兩種相反的旋轉順序所造不同的終點位置，除了更明確地了解空間中的旋轉的確不可交換，從而解釋了四元數乘法的非交換性質，同時上述公式，也可以類似地處理三維空間中的各種旋轉的情形。

3. 四元數的發展

Hamilton 本身對於四元數的研究充滿了極大的熱忱，他也爲此付出了往後大半輩子的時光。他認爲發現四元數的重要性，可比擬過去微積分誕生，同時，他也將之視爲處理幾何學與數學物理問題的關鍵。然而，僅有少數的英國科學家與 Hamilton 站在同一陣線。更不幸的是，四元數的概念被那些持續使用笛卡兒座標的物理學家們所忽視。事實上，四元數並不是物理學家真正所需的工具，他們追尋的，是能更直接地表示三維向量的三維笛卡兒座標。甚至對現今的數學家而言，四元數也只不過是眾多特殊代數系統當中的一個例子罷了。

隨著四元素的發現，19 世紀後葉，代數上也產生了一些發展，我們也許會感到好奇，是否能夠再發明新的超複數，而再將數的概念，推廣至更高維度？1845 年，Cayley 展示其所發明的八維數 (octonion，由四元數的數對建構而成)，滿足了大多數的體公設，但乘法的結合律與交換律則不成立。同時，所有非 0 的「八維數」都有乘法反元素 (Normed division algebra)。不過，在數學上，Cayley 所發明的這類數，也只不過被視爲數學中的奇珍異玩罷了。更再進一步地，是否仍有其它的非交換代數 (division algebra) 呢？這個問題直到 1958 年 J. F. Adams 等數學家證明，除了 1, 2, 4, 8 維之外，已沒有其它由實數所建構的非交換代數，而最終得到了答案。

在 19 世紀，理解超過 3 維空間的幾何學對於一般數學家而言，是相當奇特且嶄新的挑戰，就如同人們起初面對非歐幾何般地感到懷疑與難以置信。數學家利用新的公設取代傳統而直觀的平行設準，而新代數的運算結構也不再完全遵守一般實數與複數的基本性質。

在四維空間中，我們可以再次利用四元數來處理旋轉的問題，由四個實數所建構而成的四元數 $a+bj+ck+dl$ ，可視爲四維空間中的向量，同時，若將前述所提到三維空間旋轉的相關向量規則進一步推廣，亦可描述了這些向量在四維空間的旋轉。1878 年，W. K. Clifford 將其推廣至一般 n 維向量的旋轉，Clifford 代數也在現代微分拓樸中，扮演著重要的角色，而四維空間的旋轉對於往後相對論的發展而言，亦具有相當的重要性。

當我們定義 n 維向量的代數結構時，首先需要認識該空間中的 n 個單位向量 $e_i(i=1,2,...,n)$ 彼此乘積的「乘法表」(類似四元數當中的 $jk=-kj=l$ 等)，如果我們加上 $(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$ ，則可得到線性結合代數 (linear associate algebra)。而這些代數的一般理論，由美國數學家 Benjamin Peirce 和他的兒子 Charles 於 1860 年代發現，最終，他們共創造出了 162 種不同代數的乘法表。而當我們回顧不久前的 19 世紀初期，數學家眼中還仍只有一種代數規則呢!

隨著數學家自由地發明、創造出屬於各種代數系統獨自的運算規則，在 1850 年代，數學家們在其各自的集合上，賦予了相對於傳統代數操作較少的運算規則，而得到許多相當令人感興趣的數學結構，其中，最基本的即爲大家所熟知的「群」，在群的結構中，該集合的任二個元素僅具有所謂的二元運算 (binary operation)。另外，在現代的數數課程中，當談及乘法非交換性，我們總是會直接聯想到「矩陣」。同樣地，數學家 Cayley 於 1858 年，從幾何線性變換的脈絡之中，最先對矩陣進行有系統的研究工作。特別地，矩陣具有別於一般數的新性質，即使 A 與 B 皆非 0 短陣，AB=0 仍可能成立。

由於矩陣與四元數皆與旋轉有關，我們可能會期待這二者之間具有某些連結關係，事實上，一般的非零四元數與非奇異、並存在反矩陣的二階矩陣是同構 (isomorphic) 的。在四元數中的 j,k,l 正好與下列二階方陣與具有相同的地位：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}，其中 i^2=-1。$$

我們也可透過矩陣乘法規則，輕易地驗證 $\sigma_1{}^2=\sigma_1\times\sigma_1=-I$ 與 $\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=\sigma_3$ 等關係，正如同四元數中 j,k,l 之間的運算。於是，我們可了解非零四元數 $a+bj+ck+dl$ 與 2×2 複數矩陣之間的同構關係，並可定義如下：

$$a+b\sigma_1+c\sigma_2+d\sigma_3=\begin{pmatrix}a-id & c+ib\\ -c+ib & a+id\end{pmatrix}。$$

二階複數方陣與其對應的四元數，皆可用來描述二維空間中的複數向量的旋轉，並且被應用於 1920 年代所提出的電子角動量的相關理論上。至此，四元數在物理上的意義大大地獲得了彰顯。而四元數所帶來的這些重要應用成果，亦是當初 Hamilton 當年所未曾預

知的。

四、反思

「看不見，它卻有用」，或許這是過去人們初探複數時的寫照，當數學家體認到複數對於平面幾何與向量所帶來的便利時，便展現了一貫地處理事物的特質：推廣，並一般化。嘗試以平面複數系為基礎，建立三維空間或者更抽象的高維度空間中，更有力的工具。即使 Hamilton 在推廣的工作上遭遇了挫敗，但憑藉著其熱忱與洞見，卻引發了四元數的誕生，也就此解放了過去人們習以為常的代數運算性質的局限，最終各種新代數因而蓬勃發展。

就如同挑戰平行公設而引發非歐幾何學的誕生，數學家們在代數上的新發明與新思維，亦挑戰著過去人們關於數學學科的舊理念，挑戰了數學真理確定性的地位。而在這十字口上，迫使數學家必需回過頭，謹慎地重新檢驗實數、複數、代數、幾何，甚至是微積分的邏輯基礎。於是，這些新工作在經過長時間的蘊釀加以數學家們的努力，終於促使了分析、算術、代數、幾何學的嚴格化，也促進往後更多數學基礎工作的發展。

由複數以至四元數的發展脈絡當中，我們除了解數學家們在數學上的思維與創造外，更可發現，數學家們如何不滿足於二維的結構，乃至進一步推廣至更高維、抽象空間的過程，即使無法完全類比地進行一般化的工作，數學家也從放棄代數規則的退路中，重新找到新的進路，從而引發更多新問題，新的思維，與新的研究方向。這些不但帶給往後數學發展上的推波助瀾，而且，也豐富了吾人的的數學歷史經驗。

後記：本文根據 Sondheimer, Ernst and Alan Rogerson, Numbers and Infinity: A historical account of mathematical concepts (Cambridge: Cambridge University Press, 1981) 而改寫。

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南市：林倉億（家齊女中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）