HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十卷 第十二期 目錄（2007年12月）

十一月的數學史盛會

台師大數學系　洪萬生教授

2007 年 11 月 10 日（星期六）、11 日（星期日），中央研究院數學所舉辦「利瑪竇與徐光啓合譯《幾何原本》四百週年紀念研討會」(A Symposium for the Memory of Quarter-Centenary of the Chinese Translation of *Elements* by Matteo Ricci and Xu Guangqi)，HPM 團隊共提出六篇有關《幾何原本》在中國明清時期之流傳，請參考如下：

彭良禎：艾儒略 (Giulio Aleni)《幾何要法》(1631) 之研究
鍾秀瓏：陳藎謨《度測》之研究 (明末）
程和欽：杜知耕《數學鑰》之研究（清初）
廖淑芳：梅氏家學中的《幾何原本》：以勾股術為例 (清中葉）
陳彥宏：安清翹 (1756-1829)《矩線原本》之研究
王鼎勳：《幾何原本》第十卷與東學西漸下的《無比例線新解》(1906)

爲此，我還特別補上一篇〈華蘅芳與《幾何原本》〉，以便讓這些歷史事件的時間順序上有一點連慣性，這是因爲華蘅芳 (1833-1902) 比起撰寫《無比例線新解》的吳起潛，大約早一個世代。

另一方面，應籌備委員李國偉教授的邀請，我們還提出兩篇有關 HPM 論文：

蘇惠玉：HPM 與高中幾何教學：以圓錐曲線的正焦弦為例
陳玉芬：從 HPM 觀點看九年一貫國中數學幾何教材：以「尺規作圖」為例

顯然，這在以數學史爲主的研討會中，是比較獨特的規劃。不過，由於《幾何原本》兩千多年來一直都是數學教科書取材的圭臬，因此，我們結合它來進行 HPM 的研究，看起來相當理所當然。

本次研討會由於李國偉的力邀，多位國際學者如蕭文強、韓琦、詹嘉玲 (Catherine Jami)、劉鈍、齊藤憲 (Ken Saito)、城地茂 (Shigeru Jochi) ，以及琅元 (Alexei Volkov) 等，都欣然參加此一盛會。藉此機會，清華大學歷史所也邀請其中幾位參加該所之工作坊。

由於此一機會確實難得，所以，在 11 月 15 日下午我特別在本系舉辦「數學史書報討

論」，除了邀請前述琅元教授、中國科學院自然科學史研究所劉鈍、韓琦教授參加，計有本校物理系姚珩教授、及本系、物理系博、碩班十幾位研究生參加。這是一個難得的數學史午後聚會，賓主相談甚歡，留下美好的回憶！

最後，我們除了特別感謝李國偉教授的邀約之外，我們團隊成員彭良禎熱心與積極地幫忙催稿，也是這次 HPM 團隊成功展現實力的最佳功臣之一。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南市：林倉億（家齊女中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

陳藎謨《度測》之研究

桃園縣東安國中 鍾秀瓏老師

摘要

本研究主要分析明末清初學者陳藎謨所撰《度測》成書的時代及各卷的內容，期望透過此一文本的探討，有助於掌握明末清初的數學發展及其歷史脈絡。《度測》一書分爲卷上、卷中、卷下三部分，書末附有〈開方說〉兩卷、〈度算解〉一卷。在《度測》的卷中及卷下，均只針對《周髀算經》的內容舉例說明，但卷上卻分爲六個小節—〈詮經〉、〈詮理〉、〈詮器〉、〈詮法〉、〈詮算〉和〈詮原〉。這種安排不同於中國古代算書的體例，而和《崇禎曆書》的體例十分類似，足見在《度測》一書中，陳藎謨把《周髀算經》與西方測量術進行了綜合和會通。他利用《崇禎曆書》的體例，企圖去詮釋《周髀算經》和進行「勾股測望」，這正是傳統中國人一直強調的「中學爲體，西學爲用」的思想。此外，陳藎謨以《測量法義》和《勾股義》爲藍圖，解說測量的原理及方法，可知《度測》一書必然受到《幾何原本》一定程度的影響。透過《度測》的內容分析，得以窺見一位次要的數學工作者，在《幾何原本》等西學輸入中國之際，如何將西方傳入的學理及工具巧妙地融入中國傳統數學中，致力於中西數學的會通工作。

關鍵字：陳藎謨、度測

Abstract

The study is to analyze the book *Dou Ce* edited by Chen Jinmo, a Chinese scholar flourished in the late Ming and early Qing period. My aim is to illustrate the Chinese mathematical in the historical context. The *Dou ce* is divided into three major parts: Volumes 1, 2 and 3. To the end there are appendices of the *Kai Fang Shu* and *Dou Suan Jei*. Unlike Volumes 2 and 3 in which the author explains the contents and examples from *Zhoubi suanjing*, Volume 1 has six sections, namely, “Chuan Jing”, “Chuan Li”, “Chuan Chi”, “Chuan Fa”, “Chuan Suan” and “Chuan Yuan”. Format of the volume was different from that of traditional Chinese mathematics texts, but instead very similar to that of *Chong Zhen Calendar Book*. Chen summarized and integrated the *Zhoubi suanjing* with Western surveying principles. That Chen utilized the format of the *Chong Zhen Calendar Book* to dictate *Zhoubi suanjing* and processed “Gougu measurement” reflected his primary concern with the ideology that “Chinese remains the essence while western science is only for practice”. In addition, Chen used *Celiang fayi* and *Gougu yi* as blueprints to explain surveying principles and methodologies. In this connection, the *Dou Ce* was significantly influenced by the *Ji He Yuan Ben* (1607 Chinese version of *Euclid’s Elements*).

Keywords: Chen Jinmo, *Dou ce*

一、緒論

相較於宋元數學高度發展的成就，一般總認爲明代數學呈現停頓、衰退的情形，對明代數學的評價，大都不高。明代除了蓬勃的商業活動帶動了商用數學的發展，統治階層對曆算的漠視和壓制，使得明代數學整體上處於一種落後狀態。在當時數學成就乏善可陳的情況下，明末清初耶穌會士利瑪竇等人來華，爲了取得中國封建統治者和學者們的信任，他們根據當時修改曆法的迫切需要，帶來一批天文學與數學的著作。在這種背景下，西方初等數學開始輸入中國。

在傳入的數學之中，徐光啓與利瑪竇合譯的《幾何原本》前六卷（1607 年）影響最大。[1]由於利瑪竇的宣傳，加上明代數學處於落後狀態，徐光啓如獲至寶。他受了《幾何原本》的啓迪，在編譯《崇禎曆書》和《農政全書》時十分重視數學理論。此外，他著有《測量法義》、《測量異同》和《勾股義》，用《幾何原本》的邏輯推理方法來分析東西測量方法的異同和論證中國古代的勾股方法。《測量法義》是徐光啓與利瑪竇合譯《幾何原本》前六卷後，認識到《幾何原本》是「度數之宗」、「眾用所基」，因而以《幾何原本》的公理體系和演繹推理對「西泰子之譯測量諸法」、「系之義也」的首次嘗試。徐光啓認爲：「西方測量術就『法』而論，與中國古代《周髀算經》、《九章算術》的勾股測量術是『不異』的，然而西方測量術有《幾何原本》作理論依據，故『貴其義』。」[2]

受徐光啓的影響，明末研究西方數學並有著作的學者不少，陳藎謨的《度測》即爲其一。陳藎謨承續徐光啓的議論，進一步提出「西學中源」的看法。在《度測》一書中，陳藎謨把《周髀算經》與西方測量術進行了綜合和會通。不同於徐光啓的看法，陳藎謨提出《測量法義》是爲了詮釋《周髀算經》的論點。他著作《度測》的用意是爲了使《周髀算經》和《測量法義》的內容更清楚，更易於學習。

在本文中，筆者嘗試透過陳藎謨及其著作《度測》的相關研究，說明一位次要的數學工作者，在《幾何原本》等西學輸入中國之際，如何致力於中西數學的會通工作，使得中國傳統數學呈現新的風貌。

二、陳藎謨的生平及著作

陳藎謨，字獻可，號䃤庵，晚號澂真子，浙江檇李（今嘉興）人，爲明末諸生，[3]曾拜師於黃道周（1585-1646）門下，[4]撰有《皇極圖韻》一卷、《䃤庵槧》一卷、《元音統韻》二十二卷、《易傳》、《樂律希聲》、《孝經疏義》、《祥異編年》、《參同契注》、《象林》二卷，以及《度測》三卷等著作。其中，《皇極圖韻》、《元音統韻》、《易傳》、《樂律希聲》、《孝經疏義》爲國學和聲韻學方面的著作，而《䃤庵槧》則是陳藎謨和他

---

[1] 《幾何原本》前六卷譯自德國耶穌會士兼數學家克拉維斯（C. Clavius, 1537~1612 年）的十五卷拉丁文評註本《幾何原本》，卷首題「利瑪竇口譯，徐光啟筆受」。

[2] 參見王渝生，〈《測量法義》提要〉，《測量法義》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，頁 2~3。

[3] 諸生是各種官學生的統稱，比如考中秀才的可以做州縣學生，鄉試中舉的可以入國學做監生，此外貢生、捐生、等都是諸生。諸生是有身份的人，吃官糧，穿襤衫，（即「諸生服」），監生能直接入仕，其他的也可透過科舉做官。

的老師黃道周之間的書信往來。雖然中國文化大學中國文學研究所碩士鄭雅方認為陳藎謨象數學著作多於聲韻學著作，[5]但筆者認為陳氏的著作仍以國學和聲韻學較多，影響也較為深遠。由於他擅長象數之學，精於「步算」、「占驗」之術，明末清初的大數學家梅文鼎也對他頗為讚賞。[6]

三、《度測》之部分內容

《度測》分為卷上、卷中及卷下三部分，本文僅就和《幾何原本》比較有關的卷上和卷中部分稍加說明。

（一）卷上

在《度測》的卷中及卷下，均只針對《周髀算經》的內容舉例說明，[7]但卷上卻分為六個小節—〈詮經〉、〈詮理〉、〈詮器〉、〈詮法〉、〈詮算〉、〈詮原〉，這種安排不同於中國古代算書的體例，而和《崇禎曆書》的體例十分類似，[8]足見在《度測》一書中，陳藎謨把《周髀算經》與西方測量術進行了綜合和會通。他在〈《度測》自敘〉中提及：「徐玄扈先生有《測量法義》、《句股義》。是《周髀》者，句股之經；《法義》者，句股之疏傳也。」[9]他更進一步說明：「首詮算經，次臚諸法，合今古而淺言之，出以己意，發凡繪圖，庶幾《周髀算經》大彰，法義彌著，以便有志經濟之、習之者。」[10]陳氏也有近似「西學中源」的說法：「謨按九章參伍錯綜，周無窮之變，而句股尤奇奧。其法肇見《周髀》，周公受之於商高，以度天地、推日月。」[11]另外，在《度測》卷上〈詮器〉一節中，他認為：「泰西之有《測量法義》也，實本《周髀》算術而加詳焉。」[12]雖然他沒有就這個論題展開論述，然而清初學者的「西學中源」論正是由此而來。[13]本部分針對《度測》卷上的六個小節進行討論。

1.詮經

在《度測》卷上〈詮器〉一節的最後一段中，陳藎謨明確地指出：

右《周髀算經》首章，徐玄扈先生曰：「凡《九章》勾股之鼻祖。甄鸞李淳風為之重

---

[4] 黃道周字幼玄，福建漳浦人，是理學名家而兼通西法，善於天文曆數皇極之學。

[5] 參見鄭雅方，《《元音統韻》音系研究》，頁 20。

[6] 參見吳仰賢等纂、許瑤光等修，《嘉興府志》〈五〉，收入《中國方志叢書》華中地區第五十三號；盛楓，《嘉禾徵獻錄》收入《四庫全書存目叢書》史部 傳記類 125，頁 612。

[7] 《周髀算經》原名《周髀》，全書分上下兩卷，撰者不詳，一般認為約成於公元前一世紀，它是中國現存最早的天文數學著作。在天文學方面，《周髀算經》主要闡述了當時的蓋天說和四分曆法。以數學的角度來看，《周髀算經》講述了算學的方法、用勾股來測量天體以及複雜的分數計算等等。

[8] 《崇禎曆書》由徐光啓主持編譯。全書共有一百三十七卷，主要內容是介紹當時歐洲天文學家第谷（Tycho Brahe）的地心學說。全書分為節次六目和基本五目，節次六目視將曆法分成六個部分，包括日躔、恆星、月離、日月交會、五緯星、五星交會等；基本五目是指法原、法數、法算、法器、會通等。法原部份進呈的節共有四十卷，約占全部進呈書的 30%，其中數學理論著作就是屬於這一部分的。在法數中屬於數學部分的有三角函數表。在法器中介紹儀器及計算工具。

[9] 引自陳藎謨，〈《度測》自敘〉，《度測》，頁 292。

[10] 同上註。

[11] 同上註，頁 291。

[12] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 331。

[13] 參見王揚宗，〈「西學中源」說在明清之際的由來及其演變〉，《大陸雜誌》第九十卷第六期（台北：大陸雜誌社，1995 年 6 月 15 日）。

釋，頗明悉，實為算書中古文第一。」愚按甄、李重釋，止趙君卿句股方圓圖而不及，經俱爭析其流耳，原本在此不在彼也。又曰：「至于商高問答之後，所謂榮方問于陳子者，言日月天地之數，則千古大愚也。而亦有近理者數十語，絕勝渾天家。」愚故揭首章及趙注銓之，使學者溯矩度之本其來有自，以證泰西立法之可據焉。[14]

由上述引文，可明瞭陳藎謨撰《度測》一書的動機，是爲了說明西方傳入的「矩度測量」方法，其原理源自中國之《周髀算經》，這正是「西學中源」論的開端之一。同時，也解釋了《度測》一書中爲何只收入《周髀算經》首章、但卻未收入其中趙君卿的「句股方圓圖」之緣由。

在〈詮經〉中，陳藎謨的寫作方式和大部分銓經者相近，先引用《周髀算經》的原文及趙君卿注，[15]然後，再附上自己所撰的詮文。在銓文中，陳藎謨除了針對經文及注文作詳盡的詮釋外，他也依自己對經文的理解，對注文作出嚴正的評論。

雖然陳藎謨參考了徐光啓的〈《句股義》序〉作爲〈銓經〉的總結，但他並未直接引述〈《句股義》序〉中所引用的《周髀算經》經文及趙君卿的注文。由他引用的第一段經文及注文後均加上「唐寅曰」來看，陳盡謨引用明朝萬曆年間（1573-1619）胡震亨刻《祕冊匯函》叢書時所收錄《周髀算經》的可能性較高。

2. 詮理

在《度測》卷上〈詮理〉中，陳藎謨再次重申勾股定理始自《周髀算經》的主張：

萬形繁，出圓以方，圓斯縱、橫、斜三體定，所謂：「折矩以為句廣三，股修四，徑隅五者」，商高溯庖犧而立義也。句股求弦，句弦求股，股弦求句，明兩則得一。句求股弦，股求句弦，弦求句股，明一不能以得兩。古法立表以通其窮，今用矩度以代立表。表矩者攝小句股之形象，成大句股之比例也。若遇高深廣遠，目力能收，足不可及，則三者無一可知，而立表法又窮，古法用重表，今法用重矩，而景較、距較生焉。景較以見縱，距較以見橫，兩較者，亦攝小句股之形象，成大句股之比例也，句股大端盡于此。句股之數曰：「縱、橫、斜」，句股之理曰：「圓與方」。互換通分，其在心目。「大哉言數！」周公豈欺我哉？[16]

陳藎謨認爲利用勾股運算可以測高、測深、測廣、測遠。利用勾值和股值可以求出弦值，利用勾值和弦值可以求出股值，利用股值和弦值可以求出勾值。陳藎謨在《度測》中除利用西洋新法之「矩度測量」外，兼採古法「立表測量」。無論是「立表測量」或「矩度測量」，都是利用勾股運算及相似三角形三邊成比例進行測量，而勾股的原理則可溯自《周髀算經》。

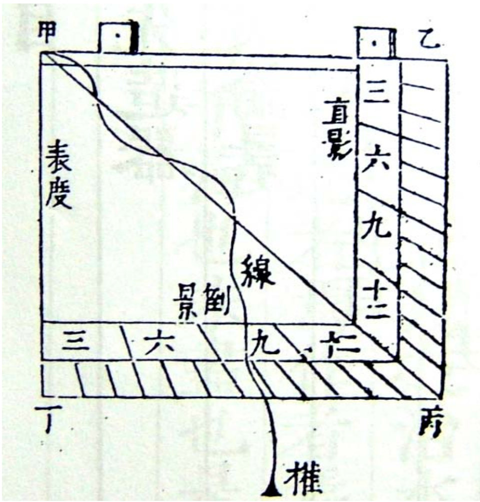
3. 詮器

在「詮器」一開始，陳藎謨便再次重申「西學中源」的主張：「泰西之有《測量法義》也，實本《周髀》舊術而詳焉。」[17]並介紹測量的儀器 —「矩度」。

---

[14] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 329~330。
[15] 趙爽，字君卿，大約是魏晉（公元三至四世紀）時期的人。他在數學方面的成就，主要保存在〈《周髀算經》注〉之內，其中對後世影響最大的是〈勾股圓方圖注〉。
[16] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 330~331。
[17] 同上註，頁 332。

在《測量法義》中，[18]對於西方的測望之器—「矩度」的製造及使用方式有詳細說明：



[19]

圖一 泰西矩度圖

測量者，以測望之山岳樓台之高、井谷之深、土田道里之遠近也。其法先造一測望之器，名曰「矩度」。造矩度法，用堅木版或銅版作甲乙丙丁直角三角形，以甲角為矩極，作甲丙對角線，次依乙丙、丙丁兩邊，各作相近兩平行線，次以乙丙、丙丁兩邊，各任若干平分之。從甲向各分各作虛直線，而兩邊之各外兩平行線間，則作實線。如上圖，即外兩線間為宗矩極之十二平分度也。其各內兩平行線間，則於三、六、九度亦作實線，以便別識。若以十二度更細分之，或每度分三、分五、分六、分十二，視矩大小作分，分愈細，即法愈詳密矣。次于甲乙邊上作兩耳相等，耳各有通光竅。通光者，或取日光相射，或取目光透照也。或植兩小耳代耳，亦可。其耳竅表末，須與甲乙平行，末從甲點置一線，線末垂一權，其線稍長於甲丙對角線，用時任其垂下，審定度分。既設表度十二，下方係依此論。若有成器欲驗已如式否，亦同上法。其用法如下方諸題。[20]

陳藎謨在《度測》卷上〈詮器〉中提及：

然十二為乘，十二為分，不若十乘十，十分十之便捷也。古今法以十為度，積矩之度百，積矩之分千，積矩之細分萬，以至十萬、百萬，詳密至矣。[21]

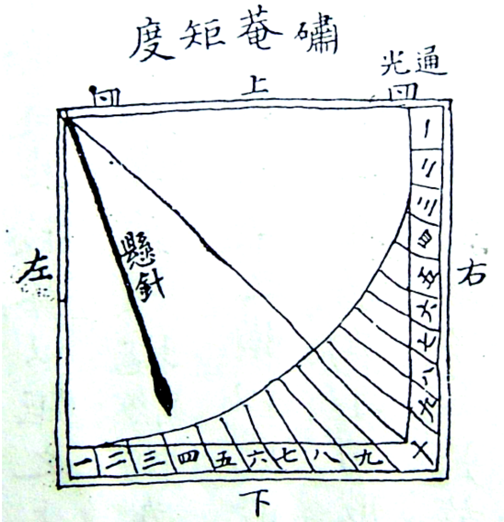
所以，他自創「礵菴矩度」，如下圖。

[18] 《測量法義》由利瑪竇口述，徐光啓筆錄，刊於明萬曆三十五年丁未~三十七年己酉（1607~1609），主要爲介紹歐洲應用歐氏幾何原理進行具體測量的方法。徐光啓翻譯此書的用意在於「法而系之義」，也就是根據所學到的平面幾何原理，來說明實測的具體方法，並在題記中強調這種方法同《周髀算經》、《九章算術》所載的傳統方法在原理上是一致的，可見他早已注意中西科學技術的結合問題。

[19] 引自徐光啓，《測量法義》，收入《徐光啓著譯集》上函之八，頁 1。

[20] 同上註。

[21] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 332。



[22]

圖二 荼礵菴矩度圖

筆者十分欣賞陳藎謨在「詮器」方面的創見和發明。將矩度分為十個刻度，應能使計算更為便捷，也更適用於「十進位值」制的特性。可惜，《度測》一書當時並未印行傳世，「礵菴矩度」因而也未能廣為流傳。

4. 詮法

在《度測》卷上〈詮法〉中，陳藎謨針對勾股測望的方法詳加說明。他認為西法用天干、地支定出矩度及進行解釋，並未利用文字多作解說，所以，一般人如果不參考解說，很難看得懂圖；如果只參考解說而沒有對照圖形，往往也無法明瞭解說的內容。所以，他在進行解說時省略天干地支的符號，而用「上、下、左、右、大句、小句、大股、小股、大弦、小弦」加以說明。陳藎謨在《度測》中以「五尺」取代中國舊法之「步」，以「三百六十步」表示中國古法中所謂的「里」。

陳藎謨認為中國古法「立表測量」與西方傳入的「矩度測量」方法雷同，但「矩度測量」較便捷。且「立表測量」不易精確，攜帶標竿（即「表」）十分費力，且「立表測量」不及「矩度測量」快速和省時省力，所以「矩度測量」較佳。然而，當「矩度」來不及製作或來不及取用時，標竿卻是隨時可找到的，而且有時「矩度測量」也要借助「立表測量」。所以，他在討論測量問題，同時用「立表測量」與「矩度測量」兩種方法說明。

雖然中國古法「立表測量」中所用的標竿長度並無統一規定，但陳藎謨在《度測》中，將標竿的長度稱為「立表」定為「十尺」，目高及矩度懸掛的高度稱為「窺表」定為「四尺」，「立表」扣掉「窺表」所餘的長度「六尺」稱為「餘表」。他在《度測》中的討論，都以「立表」、「窺表」和「餘表」等名詞，而不直接標明「十尺」、「六尺」和「四尺」等數據。

陳藎謨直接引用《周髀算經》中商高回答周公的話語：「平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠，環矩以為圓，合矩以為方」，[23]作為測量的方法，《度測》全書

---

[22] 同上註，頁 333。

[23] 引自《周髀算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一，頁 15。

即針對這六句話進行測量問題的探討。

5. 詮算

在《度測》卷上〈詮算〉中，陳藎謨指出西法「矩度測量」和中國古法「立表測量」採用的計算方式並不相同：

舊術句股，或立一表，或立重表，參望既直，開方命之。今用矩度，命三率法，以待開方，得其四率。[24]

他清楚地說明在「矩度測量」時採用「三率法」進行求值，而中國古法的「立表測量」則採用「開方法進行求值」，兩者計算方式有所不同。

陳藎謨仿照《測量法義》引用了西方傳入的「三率法」，但是，他並未依照《測量法義》的方式加以演繹證明。可知在處理數學的問題上，他仍受限於中國傳統數學的影響。然而，藉由「三率法」的引入，確實大爲簡化了「矩度測量」的計算工作。

6. 詮原

在《度測》卷上〈詮原〉中，陳藎謨指出勾股測量的根本是勾股弦：

句股算，立法多端：相減曰「較」，相併曰「和」。句股相減為「句股較」，句弦相減為「句弦較」，股弦相減為「股弦較」，句與股併為「句股和」，句與弦併為「句弦和」，股與弦併為「股弦和」，弦與句股交併為「弦較和」，[25]弦與句股和併為「弦和和」，弦與句股和相減為「弦和較」，弦與句股較相減為「弦較較」。錯綜為用，更多名義。總以縱、橫、斜三法為原，和較其支也。施于矩度，一以高、深、廣、遠、方、圓收之，去諸名義。然昧其原，莫得矩度之解。故止本三法，□以奇零，以準不齊，以資矩論。[26]

他還在本小節最後面作了一個評論：

論曰：「句股法」必用自乘。何求其方也？必問其方。何問其積也？積則句、股、弦共之。故句有句積，股有股積，弦不別有積也。弦不別有積，故併句股得弦積，以弦積除句得股，除股得句也。萬有不齊之形，方之斯準于齊，矩之斯準于方，準于方斯可以求圓，而天地日月之經緯定。方者為法用，圓者藏于矩，不為法用也。愚故以兩句兩股之謂矩，一句一股，木工曲尺不謂之矩也。句三、股四、弦五，不過取小數以見積，使人易明其理，以通于散漫難收之數。乃陳子答榮方之測日徑者曰：「日益表南，晷日益長，候句六尺」，無論其理尚繁，密測匪屬定論。使必候句六尺，以合于股八、弦十，過此上下，豈不可以測日之徑圍乎？「矩度測量」與「立表測量」運用，雖分得數則，一皆自三法之積實出，通乎斯術，斯可與明矩度之原矣。[27]

根據陳藎謨所作之評論，可知「矩度測量」與「立表測量」都是利用「勾股定理」：$勾^2+股^2=弦^2$，$弦^2-勾^2=股^2$，$弦^2-股^2=勾^2$。只要明白「勾股弦互求」的原理，便可以進行勾股測量了。

（二）卷中

---

[24] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 338。

[25] 「弦與句股交」應爲「弦與句股較」之誤。

[26] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 342。原文中文字缺漏部分，以□表示。

[27] 引自陳藎謨，《度測》卷上，頁 347~348。

《度測》卷中共分爲〈平矩以正繩〉、〈偃矩以望高〉、〈覆矩以測深〉、〈弦矩以見廣〉四小節。在〈平矩以正繩〉這一節中，陳藎謨分別藉由「矩度測量」和「立表測量」解釋「平矩以正繩」的意義。在〈偃矩以望高〉、〈覆矩以測深〉、〈弦矩以見廣〉三小節中，陳氏則分別以數例說明及評論測高、測深、測遠的方法。因測高、測深、測遠的方法和原理均十分類似，筆者僅就〈平矩以正繩〉和〈偃矩以望高〉進行分析與討論。

1. 平矩以正繩

凡用測依繩水之定施于表矩，斯大句股之形正方焉。大句股之形敧，矩度待受之過。故法倚矩于窺表，眂其針無偏，則表體直；又從兩耳衡眂之地無汚隆，則相矩平，于是始運矩。

凡立高測卑，以高處取直為準。如上法在臺，在山皆然。居卑測高，以相距之地取平為準。如木能平，以矩度橫眂之，識其高處起高算。次量所識以下高，併上高淂全高。如所識處不能至或不欲至，則以相距數，用測深法測下高，併之淂全高。測深者以口徑取平為準。

立表測法，必藉窺表。以四尺為則，立表四尺處，亦取小大以窺表，參望取平。立表窺表，以繩取直。[28]

2. 偃矩以望高

《度測》卷中〈偃矩以望高〉一節，共分爲「句股相等」、「以句求股」、「以股求句」、「重矩求高」四個主題。本文中，筆者僅針對「重矩求高」主題列舉一個例題。

【重矩求高】

重矩測量

以矩度測，不知句股之高，先得直景幾何，如在倒景互換互換直景。次退行幾何，再取直景，如在倒景互換直景。次以兩直景相減淂幾何為景較一率，以表度二率與退行距較三率相乘淂積實幾何，景較一率分之淂表上物高四率，加窺表淂全高。即以表上物高作直景立高測遠法，以表度為一率，前距直景為二率，與立高三率相乘得積實幾何，以表度一率分之淂前距四率幾何。互換圖法載後測深篇中。

設有隔溪峭壁，不知其高？臨溪用矩度測得直景六十○分八七，退行一十四尺，[29]測得倒景八十八分四六一五 ，峭壁高幾何？ 溪闊幾何？

法以後距倒景八十八分四六一五互換，淂直景一百一十三分○四三。兩直景相減，淂景較一率五十二分一七三，以表度二率乘距較三率二十四尺，淂積實二百四十尺，景較五十二分一七三分之，淂表上峭壁高四十六尺餘分五萬二千一百七十三之四百二十。加窺表，淂峭壁全高五十尺。即以表上峭壁高四十六尺作三率，以前距直景六十○分八七作二率，相乘淂積實二十八萬○○○二尺，表度分之，淂溪闊二十八尺○○○二。此分積矩為十萬分，

[28] 引自陳藎謨，《度測》卷中，頁 349~351。

[29] 「一十四尺」應爲「二十四尺」之誤

> 蓋直景六十為百位，則○分為千分，八釐為萬分，七毫為十萬分。[30]

今解：

如右圖，$(\overline{B'E''}-\overline{BE}):\overline{AB}=\overline{FK}:\overline{IH}$，

$$\overline{IH}=\frac{\overline{AB}\times\overline{FK}}{\overline{B'E''}-\overline{BE}}$$，

$\overline{IG}=\overline{IH}+\overline{HG}=\overline{IH}+\overline{BF}$。

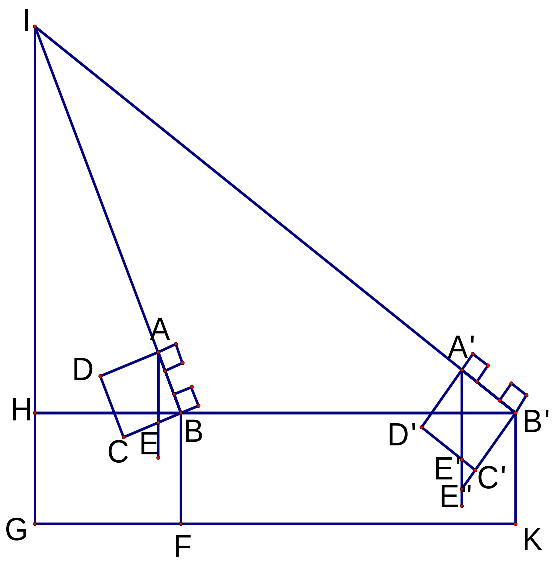
$\overline{IH}:\overline{HB}=\overline{AB}:\overline{BE}$，$\overline{HB}=\dfrac{\overline{IH}\times\overline{BE}}{\overline{AB}}$。

$\overline{BE}=6.087$，$\overline{FK}=24$，$\overline{D'E'}=8.84615$，

$\overline{B'E''}=\dfrac{10\times10}{8.84615}\approx11.3643$，$\overline{B'E''}-\overline{BE}\approx5.2173$，

$\overline{IH}=\dfrac{10\times24}{5.2173}=46\dfrac{420}{52173}$，$\overline{IG}\approx46+4=50$。

$\overline{HB}=\dfrac{46\times6.087}{10}\approx28.0002$。



圖三 重矩求高圖

重表測量

法曰：以立表求不知句股之高，先立表退行，以窺表參相直。又從前表退行幾何，立表又退行，以窺表參相直，以餘表乘兩立表距較為積實，以兩窺表距立表數相減餘為景較，以景較除積實淂立表上高。加立表淂全高。再置表上高乘前表距窺表數為積實，仍以餘表除積實，淂前表距物高相遠數。又法再置距較乘前表距窺表數為積實，仍以上景較除積實，亦淂前表距物高相遠數。又總法既淂前距併後距為後表間相距數，以餘表乘之為積實，以後表退行數分之，淂表上立高，加立表淂全高。

設有隔溪峭壁，不知其高。臨溪立表退行二尺四寸，[31]以窺表參相直。又距前表十七尺二寸一八，立表退行六尺七寸八二，以窺表參相直，峭壁高幾何？溪闊幾何？法以餘表乘兩立表距較十七尺二十一八，淂一百○三尺三寸○八為積實，兩窺表距兩立表數相減餘二尺五寸八二為景較，以景較二尺五寸八二除積實，淂立表上高四十尺餘分二萬五千八百二十之二十八，[32]加立表，淂全高五十尺。再置表上高四十尺，以乘前表距窺表四尺二寸，淂積

[30] 引自陳藎謨，《度測》卷中，頁 361~363。
[31] 「二尺四寸」應爲「四尺二寸」之誤。
[32] 「二萬五千八百二十之二十八」應爲「二千五百八十二之二十八」之誤。

實一百六十八尺，餘表分之，浔溪闊二十八尺。[33]

今解：

如右圖，$\overline{AM}=\dfrac{\overline{KF}\times\overline{JK}}{\overline{DF}-\overline{KH}}$，

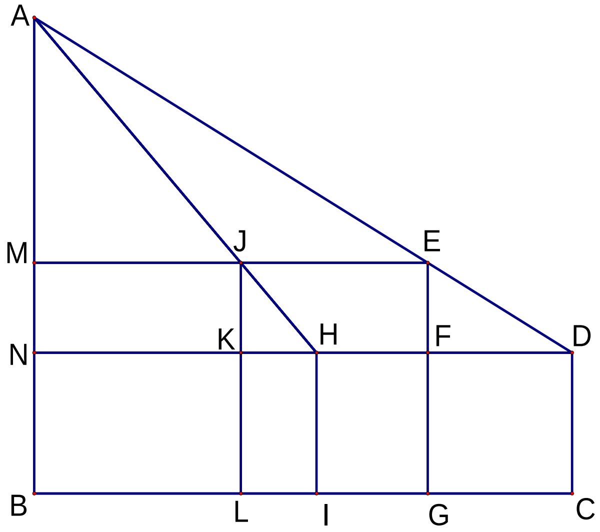
$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AM}+\overline{JL}$。

$\overline{BL}:\overline{AM}=\overline{KH}:\overline{JK}$，$\overline{BL}=\dfrac{\overline{AM}\times\overline{KH}}{\overline{JK}}$。

$\overline{KF}=17.218$，$\overline{KH}=4.2$，$\overline{FD}=6.782$，

$\overline{AM}=\dfrac{17.218\times 6}{6.782-4.2}=\dfrac{103.308}{2.582}=40\dfrac{28}{2582}\approx 40$，

$\overline{AB}\approx 40+10=50$，$\overline{BL}=\dfrac{40\times 4.2}{6}\approx 28$。



圖四　重表求高圖

陳藎謨在進行「矩度測量」時，採用的寫作方式爲先說明法則（法曰），次舉例計算（設），最後，才進行評論（論曰）。除了「重表測量」外，「立表測量」則均直接進行解題，並未先說明方法。

如同陳藎謨在卷上〈詮法〉中的評論，他認爲西法以天干地支說明並不妥，所以，他不用天干地支作說明，而用「上、下、左、右、大句、小句、大股、小股、大弦、小弦」加以說明。對於整個「矩度測量」，則一律用三率法及相似三角形來解釋。

四、結論

明末清初耶穌會傳教士們到東方傳教，企圖開闢新的據點。爲了取得中國統治者和學者們的信任，他們根據當時修改曆法的迫切需要，帶來一批天文學與數學的著作。在這種背景下，西方初等數學開始輸入中國。

在傳入的數學中，影響最大的是《幾何原本》。由於利瑪竇的宣傳，加上明代數學處於停滯狀態，徐光啓如獲至寶。他受了《幾何原本》的啓迪，在編譯《崇禎曆書》和《農政全書》時十分重視數學理論。此外，他著有《測量法義》、《測量異同》和《勾股義》，利用《幾何原本》的邏輯推理方法來分析東西測量方法的異同和論證中國古代的勾股方法。徐光啓認爲《測量法義》是用來詮釋《幾何原本》，然而，《測量法義》中舉出的測量方法，和《周髀算經》和《九章算術》中的「勾股測望法」相同。受徐光啓的影響，明末研究西方數學並有著作的不少，陳藎謨的《度測》即爲其一。

《度測》之名，來自「矩度測量」之意。受到徐光啓的影響，陳藎謨不單單贊同《測量法義》中的『矩度測量』和中國傳統算經『勾股測望』的原理相同，他更進一步在〈《度測》自敘〉中評論：

謨按九章參伍錯綜，周無窮之變，而句股尤奇奧。其法肇見《周髀》，周公受之於商高，以度天地、推日月。其法肇見周公，周公受之商高，以度天地、推日月。且曰：

[33] 引自陳藎謨，《度測》卷中，頁 365~367。

禹之所以治天下者，此數之所生也。唐設算學博士，督課試舉，而《周髀》算有程。國初制科尚試算數，後寖厭薄焉，握算不知縱橫必歸，儒者悉問句股哉？泰西來賓，斯學始倫，大方家多傳之。徐玄扈先生有《測量法義》、《句股義》。是《周髀》者，句股之經；《法義》者，句股之疏傳也。然《周髀》篇首，包舉道法，趙注不能盡其微。次段推測，後世解經疏大，難以合于用。泰西以支干名號為圖為文，亦既詳顯；而不耐讀者心以目迷，掩卷度閣，以故通斯學者仍尠焉。謨爰撰茲編，首詮算經，次臚諸法，合古今而淺言之，出以己意，發九繪圖。庶幾周髀大彰，法義彌著，以便有志經濟之、習之者。[34]

爲了說明「西學源自中國」的論點，也爲了使後人對《周髀算經》中的「勾股測望」問題有更深層的了解，陳藎謨於是撰寫了《度測》一書。

《度測》一書是以《測量法義》、《勾股義》爲藍圖完成的，但陳藎謨在《測量法義》立論的基礎上也有許多不同的想法。徐光啓僅將《測量法義》視作詮《幾何原本》，而其原理方法同於《周髀算經》、《九章算術》；陳藎謨則進一步將《測量法義》視作詮《周髀算經》。此外，在《勾股義》中，處處可見《幾何原本》公理化的演繹證明方式，但在《度測》中，則少見此種論證。

雖然陳藎謨仿照《測量法義》引用了西方傳入的「三率法」處理測量問題，但是他並未依照《測量法義》的方式加以演繹證明，可知在處理數學的問題上，他仍受限於中國傳統數學的影響，並未採用《幾何原本》的邏輯推理的論證方式。然而，藉由「三率法」的導入，確實大爲簡化了測量的計算工作。

透過《度測》的內容分析，我們得以窺見一位次要的數學工作者，在《幾何原本》等西學第一次輸入中國之際，如何將西方傳入的學理及工具巧妙地融入中國傳統數學中，懷抱「中學爲體，西學爲用」的原則，致力於中西數學的會通工作。

參考資料：

一、史料

三國孫吳・趙爽等注，《周髀算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。

明・徐光啓等編；永瑢、紀昀等輯，《新法算書》，收入《景印文淵閣四庫全書》子部 第 787、788 冊，台北：商務印書館，1983 年。

明・徐光啓，《測量法義》，收入《徐光啓著譯集》上函之八，上海：上海古籍出版社，1983 年。

明・徐光啓，《勾股義》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。

明・徐光啓，《測量法義》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。

明・徐光啓等編；湯若望重訂，《西洋新法曆書》，收入薄樹人主編，《中國科學技術典籍通彙》天文卷第八分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。

[34] 引自陳藎謨，〈《度測》自敘〉，《度測》，頁 291~292。

明‧徐光啓等修輯，《崇禎曆書》，收入《故宮珍本叢刊》冊 382，海口：海南出版社，2000 年。
明‧陳藎謨，《度測》，收入《續修四庫全書》子部 天文算法類 1044，上海：上海古籍出版社，1995 年。
明‧陳藎謨、胡邵瑛，《元音統韻》，收入《四庫全書存目叢書》經部 小學類 215，台南：莊嚴出版社，1995 年。
明‧陳藎謨，《皇極圖韻》，收入《四庫全書存目叢書》經部 小學類 214，台南：莊嚴出版社，1997 年。
明‧陳藎謨，《礵庵槧》，收入《四庫全書存目叢書》子部 術數類 214，台南：莊嚴出版社，1997 年。
明‧顧應祥，《勾股筭術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。
明‧顧應祥，《弧矢筭術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。
清‧李善蘭、偉烈亞力編譯，《幾何原本》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第五分冊，鄭州：河南出版社，1993 年。
清‧吳仰賢等纂、許瑤光等修，《嘉興府志》(五) ，收入《中國方志叢書》華中地方 第 53 號 ，台北：文成出版社，1970 年。
清‧梅文鼎，《績學堂文鈔》，收入《四庫全書》集部 別集類 263，台南：莊嚴出版社，1997 年。
清‧盛楓，《嘉禾徵獻錄》，收入《四庫全書存目叢書》史部 傳記類 125，台南：莊嚴出版社，1997 年。
清‧阮元，《疇人傳》，收入楊家駱主編，《疇人傳彙編》上冊，台北：世界書局，1982 年。

二、近人著作

王連發，《勾股算學家—明顧應祥及其著作研究》，台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2002 年。
朱維錚，《利瑪竇中文著譯集》，香港：香港大學出版社，2001 年。
李人言（本名李儼），《中國算學史》，台北：台灣商務出版社，1990 年。
李廸、郭世榮，《清代著名天文數學家梅文鼎》，上海：上海科學技術文獻出版社，1988 年。
李迪，《中國數學通史：明清卷》，南京：江蘇教育出版社，2004 年。
李迪，《梅文鼎評傳》，南京：南京大學出版社，2006 年。
李儼、杜石然，《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社，1992 年。
杜石然主編，《中國古代科學家傳記》上、下集，北京：科學出版社，1992 年。
杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》，瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年。
杜石然，《數學、歷史、社會》，瀋陽：遼寧教育出版社，2003 年。
沈康身，《九章算術導讀》，武漢：湖北教育出版社，1994 年。
吳文俊主編，《世界著名科學家傳記》上、下集，北京：科學出版社，2003 年。
梅榮照主編，《明清數學史論文集》，南京：江蘇教育出版社，1990 年。

梅榮照、李兆華，《算法統宗校釋》，台北：九章出版社，1992 年。
張豈之，《中國歷史：元明清卷》，北京：上海高等教育出版社，2002 年。
黃清揚，《中國 1368~1806 年間的勾股術發展之研究》，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2002 年。
楊玉星，《清代算學家方中通及其算學研究》，台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2003 年。
陳衛平、李春勇著，《徐光啓評傳》，南京：南京大學出版社，2006 年。
郭書春、劉鈍校點，《算經十書》，瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年。
錢寶琮主編，《中國數學史》，北京：科學出版社，1992 年。
鍾秀瓏，《陳藎謨《度測》之內容分析》，台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2007 年。

三、期刊論文

王渝生，〈《勾股義》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 25。
王渝生，〈《測量法義》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1~3。
杜石然，〈明代數學及其背景〉，《數學・歷史・社會》（瀋陽：遼寧教育出版社，2003），頁 316~328。
杜石然，〈徐光啓〉，《中國古代科學家傳記》下集（北京：科學出版社，1993），頁 888~900。
杜石然，〈梅文鼎〉，《中國古代科學家傳記》下集（北京：科學出版社，1993），頁 1030~1040。
馬翔，〈《勾股算術》提要〉，收入郭書春主編。《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 973。
馬翔，〈《弧矢算術》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1079。
徐光啓，〈題《測量法義》〉，《測量法義》，收入《徐光啓著譯集》上函之八（上海：上海古籍出版社，1983），頁 1。
梅榮照、王渝生、劉鈍，〈歐幾里得《原本》的傳入和對我國明清數學的影響〉，收入梅榮照主編，《明清數學史論文集》（南京：江蘇教育出版社，1990），頁 182~218。
梅榮照，〈明清數學概論〉，收入梅榮照主編，《明清數學史論文集》（南京：江蘇教育出版社，1993），頁 1~20。

從 HPM 觀點看九年一貫國中數學幾何教材
——以「尺規作圖」為例

台北縣明德中學 陳玉芬老師

摘要：

本研究試圖從《幾何原本》第一卷與現今國中幾何相關部份的「尺規作圖」做比較研究。研究方法則採用內容分析法，針對《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》中與「尺規作圖」相關的內容來探討 HPM (Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) 可以如何介入國中的數學幾何課程之中。透過《幾何原本》vs. 國中幾何課程相關部份之研究分析，得到結果如下：

1. 國中的九年一貫《課程綱要》的能力指標，對於「尺規作圖」教學之精神未能具體實踐。

2. 各版本幾何內容中，看似充滿豐富的活動，卻落於「有活動無課程」或是「有課程無文化」的窘境。

3. 各版本的教材內容中，對於「尺規作圖」的定位仍止於利用直尺、圓規作出基本的幾何圖形，未能有多元化的思考。

根據以上研究結果，研究者建議：未來在課程綱要的設計方面，應具體呈現有關數學史的能力指標，並提供教師的數學史進修課程以落實數學史的教學；同時，在幾何教材的設計上，應有更多元化的思考，協助學生對幾何知識進行深入思考和廣泛探究，進而強化演繹推演及空間推理的訓練等的能力；此外，在課程設計方面，應培養他們對「數學美」的欣賞，以彰顯課程目標與文化素養。也應注重學生實際生活經驗，激發學生的積極學習，反映當代社會的多元文化。

關鍵詞：HPM、國中幾何教材、尺規作圖、幾何原本、數學美

英文摘要：

Junior High School Mathematics Curriculum and Textbooks in the Nine-year Integrated Structure: An HPM perspective

This study was designed to compare the interrelated geometry in *The Elements* and the related part of the compass and straightedge constructions in junior high school mathematics geometry curriculum by using the content-analysis methodology. The questions we raise in this study is to explore how HPM (Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) intervene in the curriculum, especially its geometrical aspects. My findings are summarized as follows:

(1). What by “compass and straightedge construction” teaching means is not much fulfilled in the competence indicators of Grade 7-9 “Curriculum Guidelines”.

(2). Abundant activities designed in the textbooks under study apparently dominate their

content in which curriculum goal is less emphasized.

(3). In the content of all teaching materials, the addressing of “compass and straightedge constructions” is limited to the very elementary problems which is difficult to inspire student’s the intellectual need of .the constructions.

Based on the findings, the researcher suggested that the competence indicators of history of mathematics should be presented concretely in the future revised Curriculum Guidelines. In addition, pr oviding teachers with history of mathematics for their professional development is also very beneficial. Meanwhile, geometry materials design should offer more diversified ways of thinking, and help that students can develop deep thinking of geometry knowledge. Still, students’ deductive reasoning and space reasoning ability should also be reinforced and students’ ability of appreciating the beauty of mathematics should be promoted. Concerning activities design, it should focus on students’ authentic experience in order to motivate students to learn actively, and reflect on the various cultures in the society.

Keywords: HPM, Geometry Material, Compass and Straightedge Constructions, *The Elements*, Beauty of Mathematics.

一、前言

國中生為什麼要學「尺規作圖」？如果要學，應該學多少？從現行的數學課程綱要來看，在升入高中之際，平面幾何的學習已經結束，而進入坐標解析幾何。但是除了平面幾何中的一些重要定理，如畢氏定理（商高定理）在升入高中之後仍會一再運用到之外，「尺規作圖」卻從此消聲匿跡了。所以，「尺規作圖」若只是扮演一個階段性的任務，那麼，它的任務究竟是什麼？同時「尺規作圖」在國中的平面幾何課程中，只是其中一個單元中的一小節，所以，學生在學習的過程中，對尺規作圖的瞭解、大多是一知半解，遑論「尺規作圖」背後之數學的知識價值與歷史意義。以「尺規作圖」而言，[35]在希臘時期的數學，即有了非常嚴密的邏輯規範與演繹論證的素養。然而現今的教科書中，儼然將「尺規作圖」視為只是一種作圖的工具，而忽略了所應「附加」的數學知識。

因此，本文將針對尺規作圖的意義與教學上的定位，分三部份來討論：第一部分先從歷史的脈絡中探討「尺規作圖」的限制由來，以及「尺規作圖」在當時脈絡下的教學定位；接著從現今教科書各版本中對「尺規作圖」單元的內容作一分析比較；而最後則說明從古今的對照中，如何找出教學上的另一條進路。

二、「尺規作圖」的限制由來與教學上的定位

從數學歷史的發展來看，我們發現「尺規作圖」的限制源自於希臘的學術風潮。也可以說，從希臘時期的泰勒斯（Thales, 640-546 B.C.）在數學中引入了邏輯證明之後，幾何學逐漸發展成為一門獨立的、演繹的科學（梁宗巨，1998），也就是將數學抽象化思考，進而從實用領域提升到思辯的層次（蘇惠玉，1999）。接著，柏拉圖（Plato, 公元前 427-347）

[35] 所謂的「尺規作圖」，即指平面幾何作圖中，限制只能使用「沒有刻度」而且只能用來畫直線的直尺和圓規作為作圖的工具。

的哲學思想也有著關鍵性的影響，他認爲：幾何觀念是不存在於物質層面的，是超乎經驗而存在的，是以「形式」（form）存在於某一個理想世界中。對他而言，學習數學是一種「再發現」的過程，他想要去掌握或瞭解自然界現象外永恆不變的真理，數學則爲他提供了一條路徑，他在《共和國》(Republic)中，藉由蘇格拉底的話語，道出了他的數學哲學觀點：

> 有一種知識是我們不可或缺的。我們所追求的這種知識有兩種用途，一種是軍事上的，另一種是哲學上的。因為打仗的人必須研究數目，否則便無法整頓隊伍。哲學家們亦然，他們需要在浩瀚多變的知識領域中，尋找真理並緊握它們，所以他必須同時是一個數論家。……我們必須盡力勸勉城邦未來的領袖學習數論，不僅僅是業餘學習，要不停的學習，直到能夠用心靈來體會數目的存在為止。……領袖們必須為軍事用途和自己的靈性研讀數學，也因為這是使他們能辨別真理和存在的捷徑。（轉引自蘇惠玉，1999）。

換言之，柏拉圖認爲，數學家們要確實掌握一些用心靈的眼睛、才能看得清東西。現實世界中的一切，只是理想世界中「形式」或「理形（ideal）」的不完美倒影而已，唯有透過數學嚴謹的訓練，才可能掌握不斷變化的自然現象背後的永恆不變的真理。所以，只要有圓和直線這兩個柏拉圖認爲最簡單、最完美的圖形，應該就足以描繪其他的圖形了，而且，若允許使用其他的機械工具，那麼，感覺成分將多於思考成分，從而就顯得膚淺且幼稚了。而這樣的一個思想，從歐幾里得的《幾何原本》（The Elements）中有了具體的呈現。

首先，歐幾里得利用《幾何原本》第 1 冊的前 3 個設準（postulate)（即以下三則），先說明了「尺規作圖」中一些基本概念的存在性，而這三點可說是承襲亞里斯多德的邏輯演繹推理中的特定性概念（special notions）：[36]

1. 從任一點到任一點可作直線（To draw a straight line from any point to any point）。
2. 有限直線可沿著直線不斷地延長（To produce a finite straight line continuously in a straight line）。
3. 以任意中心與任意距離可作一圓（To describe a circle with any centre and distance）。

也就是說，歐幾里得認爲二點間可用一直尺畫出一條直線，而且，此直線可不斷地重複延長，[37]與給任一點與半徑長度就能畫出一個圓，這些觀念是顯而易見的，於是將它們視爲最根本的概念。而在這最根本的概念中，只需要用圓規和直尺即可完成。所以，「無論從哲學還是從幾何曲線的可作性的認識出發，希臘人是堅決主張作圖必須有尺規限制的」

---

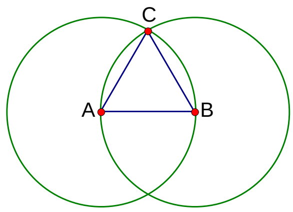
[2] 亞里斯多德認爲一個敘述是由多個概念與關聯組合成的，而一個敘述的引用，它必是來自於其他更早之前已經建立的敘述。而敘述本身必須依次地由先前的證明來獲得，也就是來自於先前的演繹，正因爲我們不可能無止境地持續這樣往回推演過程，因此，必有某些部份是一個起始點，所以有些敘述就必須被視爲是真理而且無需藉由證明來支撐其存性，他將這樣的「真理」分成了二類：一類是「對所有演繹法都視爲基礎的真理」，稱爲「一般概念」(common notions)，另一類是「一種特定的法則的視爲基礎的真理」稱爲「特定概念」(special notions) (Bunt, Jones & Bedient, 1998) 。

[37] 在當時的希臘時期是避談「無限」概念的，歐幾里得也不例外，從上述的設準 2 即可看出端倪，敘述中只說明直線可以不斷地增加，卻未說明此直線是「無限」延長。參考陳玉芬 (2006)。從HPM 觀點看九年一貫國中數學幾何教材。國立台北教育大學數學教育研究所碩士論文。

（蘇惠玉，1999）。這就是希臘的基本精神，它要求基本假定越少越好，而推出的命題則愈多愈好。所以，對於作圖工具，自然也相應地限制到不能再少的條件。

接著，我們將從《幾何原本》中有應用到「尺規作圖」的相關例題，詳細說明「尺規作圖」在歷史中所扮演的角色。

《幾何原本》第 1 冊　命題 1：在一個已知有限直線上作一個等邊三角形。
也就是：AB 爲已知線段，求作在線段 AB 上作一等邊三角形

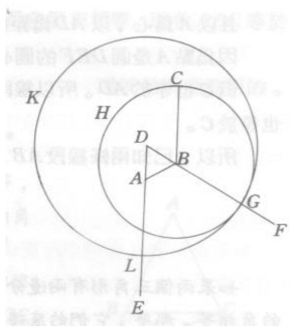


作法：1. 分別畫出二個圓（A, $\overline{AB}$ ）,（B, $\overline{AB}$ ）[38]（設準 3），C為二圓的交點。2. 連接 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$（設準 1）（如右圖）。

證明：因為　$\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (定義 15)，$\overline{BC} \cong \overline{AB}$ (定義 15)，所以　$\overline{AC} \cong \overline{BC}$，得 ΔABC 為等邊三角形。

《幾何原本》第 1 冊的命題 2：由一個已知點（作為端點）作一線段等於已知線段。[39]　即：A爲已知點，BC爲已知線段，求作一線段與BC等長。（如下圖，引自Euclid, 2002，頁 5）

作法：1. 連接 $\overline{AB}$（設準 1）；2. 在 AB 上作等邊三角形 DAB（命題 1）3.畫出(B, $\overline{BC}$) 的圓（設準 3）；延長 DA，DB 成直線 AE，BF，(設準 2)畫出(D, $\overline{DG}$)的圓(設準 3)；$\because \overline{BC} = \overline{BG}$；$\overline{DG} \cong \overline{DL}$ 且 $\overline{DA} \cong \overline{DB}$；∴ AL 等於 BC　（公理 3）



證明：$\because \overline{DL} \cong \overline{DG}$（定義 15）；$\overline{DA} \cong \overline{DB}$（由作圖得知）。

$\therefore \overline{AL} \cong \overline{BG}$（公理 3），因此推得　$\overline{AL} \cong \overline{BC}$（公理 1）。

---

[38] 在本節中對於《幾何原本》的文本內容，呈現方式，爲便於閱讀，將以較接近現今的數學符號來表示，因此所轉譯的方式雖有所不同，但不失其文本之本意。在此（A, $\overline{AB}$ ）則表示以A爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑所畫的圓。（B, $\overline{AB}$ ）之意義亦同。

[39] 即A爲已知點，BC爲已知線段，求作一線段AL與BC等長。

由上述的二題證明中，可以看出歐幾里得對於「尺規作圖」在作圖時的「尺」、「規」是有所要求的：

・對於命題 2 中，最後結果 $\overline{AL} \cong \overline{BC}$ 的手段可說是透過「長度的一一對應」，[40]而非用「測量」。因此，對於直尺上的刻度則顯得是個多餘的條件了。

・從上述的二個命題中也可發現，歐幾里得對於畫圓的處理，始終顯得「保守」，[41]舉例來說，歐幾里得之所以並未使用「任意長爲半徑與任一點來作圓」，如：作圓(P，$\overline{AB}$)，正是因爲歐幾里得對於「圓規具有伸縮的特質」有所保留，也就是說，他認爲：圓規的腳一旦離開紙面，那麼將使圓規精準度有所質疑 (Bunt, Jones & Bedient, 1998)。因此，歐幾里得在證完該命題之後，圓規的腳即可離開紙面了。而這也更顯示歐幾里得認爲，即使在作圖，對於幾何演繹的訓練也應具備高度的嚴謹性。

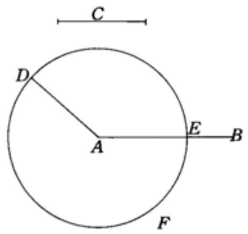
・如此一來，那麼我們是否必須對「設準 3：以任意中心與任意距離可作一圓」的措辭稍作修正？恰恰相反！筆者認爲「設準 3」的內容恰如其分！因爲從歐幾里得的命題安排來看，在命題 1 之後，緊接著命題 2 的內容，可知歐幾里得希望能藉由命題 2 的證明結果來說明可以利用「任何一線段長與任一點」都能做出一個圓。因爲任何一段長度都可以由命題 2 的作圖法獲得，而這也使得「圓規的特質」所造成的誤差在「理論上」可以克服了。

接著，再來看看「尺規作圖」在幾何上的應用。首先是命題 3。

《幾何原本》第 1 冊的命題 3：已知兩條不相等的線段，試由大的上邊截取一條線段使它等於另外一條。（如右圖，引自 Euclid，2002，頁 5）

作法：由點 A 取 AD 等於線段 C (命題 2) 且以 A 為心，以 AD 為距離畫圓 DEF。（設準 3）。

證明：因為點 A 是圓 DEF 的圓心，做 AE 等於 AD. (定義 15) C 也等於 AD，所以線段 AE、C 的每一條都等於 AD。



[40] 首先要說明的是在《幾何原本》中的「全等於（equality）」，相當於現今的 congruent 的符號，而「≅」，指的是「彼此的量是能夠一一對應的」（即公理 4）

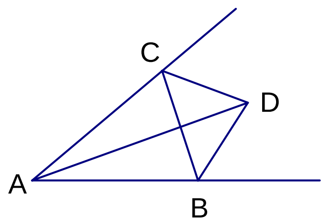
[41] 因爲只要是畫圓，所使用的圓心必是作爲該半徑的線段長的其中一個端點，如：若該圓的半徑長爲 $\overline{AB}$，則圓心必爲端點的A或B。

顯然地，此命題的手法近似於現今教科書中的作法，這表示歐氏明白這樣的事實是存在的，只是他爲了這樣的存在性，運用了更加嚴謹的方式來證明。也便於命題 5 及命題 22 的證明。[42]

在《幾何原本》中相關的作圖題有：第 1 冊中的命題 1、2、3、9、10、11、12、22、23、31、42、44、45 與 46。[43]然其中命題 1、2，3 已如上述，命題 22、42、44、45 與 46 雖然也屬國中課程內容，但並未安排於教科書的「尺規作圖」單元中，故在此不加詳述。

《幾何原本》第 1 冊的命題 9：二等分一個已知角（如下圖）。

作法：1.在角的二邊截取 B,C 二點，使得 $\overline{AC}=\overline{AB}$ (設準 3)；



2. 連接 $\overline{BC}$，並作等邊三角形 BCD (命題 1)；3.連接 $\overline{AD}$（設準 1）

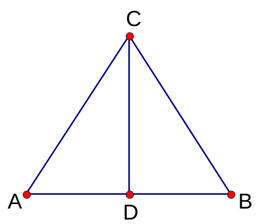
證明：1.因為三邊全等，則三角形 $\Delta ACD \cong \Delta ABD$（命題 8）

2. 則對應角 $\angle CAD \cong \angle BAD$。

《幾何原本》第一冊命題 10：二等分一個直線段（即中點作圖）。如下圖所示。

作法：1.作全等三角形 ABC (命題 1)；2.平分 $\angle ACB$，並交於 $\overline{AB}$ 上的 D 點 (命題 9)；3. D 點即為 $\overline{AB}$ 的平分點。

證明：利用命題 4：若兩對應邊相等且夾角相等，則二個三角形全等（SAS 全等性質），得證 $\overline{AD}=\overline{BD}$，故 D 點即為 $\overline{AB}$ 的平分點。



《幾何原本》第 1 冊的命題 11：由已知直線 l 上的已知點 A 作一直線，使與已知直線成直角（即過線上一點作一垂線），如下圖。

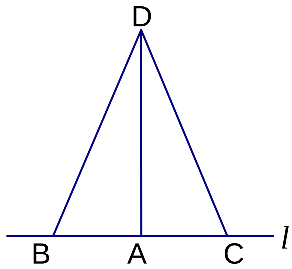
[42] 命題 5：在等腰三角形中，兩底角彼此相等。
命題 22：由已知的三個線段長作一個三角形。

[43] 命題 42：利用已知角作平行四邊形，使其面積等於已知三角形的面積。
命題 44：利用已知線段、已知角作平行四邊形，使其面積等於已知三角形的面積。
命題 45：利用已知的四邊形、已知角作平行四邊形，使其面積等於已知的四邊形面積。
命題 46：在已知線段上作一個正方形。

作法：1.在 l 上截取 B,C 二點，使得 $\overline{AC}=\overline{AB}$（設準 3）；2. 作一等邊三角形 BCD (命題 1)；3. 連接 $\overline{AD}$（設準 1），則 $\overline{AD}$ 即為 $\overline{BC}$ 上的垂線。

證明：1.因為三邊全等，則三角形 $\Delta ACD \cong \Delta ABD$（命題 8）；

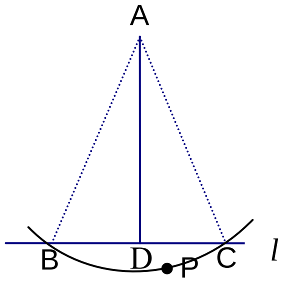
2. 所以 $\angle CAD \cong \angle BAD$，得 $\overline{AD}$ 為直線 l 上過A點的垂線（定義 10）。[44]



《幾何原本》第 1 冊的命題 12：由已知直線外的一已知點 A，作該直線 l 的垂線。

作法：1. 在直線 l 外找一點 P，並使得 A,P 二點在 l 的異側；2. 作圓（A, $\overline{AP}$)(設準 3) 並交直線 l 於 B,C 二點；3. 作 $\overline{BC}$ 中點 D（命題 10），連接 $\overline{AD}$ （ 設準 1)，

則 $\overline{AD}$ 即為所求，如下圖。

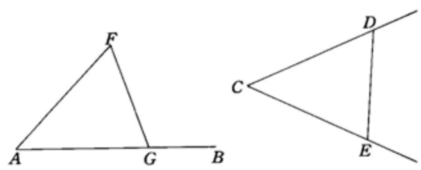


證明：1. 因為三邊對應等長，則三角形 $\Delta ACD \cong \Delta ABD$（命題 8）；2. 所以 $\angle ADB \cong \angle ADC$ 皆為直角（定義 10）。

《幾何原本》第 1 冊的命題 23：在已知直線的已知點上作一角與已知角相等（如下圖，引自 Euclid，2002，頁 19）。設 AB 是已知直線，A 為它上面一點，$\angle DCE$ 為已知角。

作法：1.在 $\angle DCE$ 的二個邊上分別任意取點 D、E，並連接 $\overline{DE}$ 。2.利用已知的三條線段 CD、DE、CE 作 ΔAGF ，使得 AF 等於 CD，AG 等於 CE，FG 等於 DE (命題 22)，則 $\angle FAG = \angle DCE$ 。

證明：1.因為三邊對應全等，則三角形 $\Delta AFG \cong \Delta CDE$（命題 8）；2. 所以作出了 $\angle FAG \cong \angle DCE$ 。

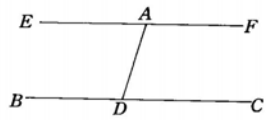


《幾何原本》第 1 冊的命題 31：過一已知點 A，作一直線 $\overline{EF}$ 平行於已知直線 $\overline{BC}$（如下圖，引自 Euclid，2002，頁 26）。

作法：1.在 $\overline{BC}$ 上任取一點 D，連接 $\overline{AD}$ ；2.在 $\overline{AD}$ 上的點 A，作 $\angle DAE \cong \angle ADC$ (命題 23)；3.且設直線 AF 為直線 EA 的延長線，則 $\overleftrightarrow{EF}$ 即為所求。

[44] 定義 10：在同一直線上的二鄰角相等，則此二角爲直角。

證明：因為所做的 $\angle DAE \cong \angle ADC$，使得 $\overline{EF} // \overline{BC}$ （命題 27）。[45]



由上述的命題陳述來看，可將「尺規作圖」的性質分爲三類：

1. 基本概念的存在性，如作等邊三角形，命題 1；等線段長，命題 2、3；以及作等角，命題 23。
2. 基本作圖，如作角平分線，命題 9；作中線、垂線、中垂線等，命題 10、11、12。
3. 作平行線，如：命題 31。

不論是上述三類中的哪一類，我們發現在利用尺規作基本作圖之前，歐幾里得已先證明了「SAS及SSS三角形全等性質」（即命題 4、8）以及「內錯角相等則二直線平行」的性質（即命題 27）。[46]這就表示歐幾里得相信這些作圖的圖形是存在的，而他不過是利用前面這些已演繹論證過的命題（如來命題 4、8、命題 27 等）來「證實」這些圖形的存在性。正如張海潮所說 (2005a)：

> 實作並不能涵蓋全然的真實，從實作中脫穎而出的概念是真實；概念與概念之間的維繫要靠推理，推理的結論是超越實際的真實。

也就是說，作圖的目的有二個，一個是，我們對於一些「顯而易見」的概念，如「複製一個等角或等線段長」，我們相信它是存在的，但如何證明？透過作圖，透過演繹論證，是可以讓我們信服的；而另一個是，在作圖中，所延伸出的概念，如：該如何作這樣的圖，或爲何這圖要如此作？就像圓規的腳爲何不能離開紙面？這樣的邏輯訓練更是學習數學的過程中不可或缺的。這樣看來，「尺規作圖」的定位就很清楚了，「它不僅提供平面幾何實作的部分，或者說在某些公設條件之下事實存在的部分，更具有在整個作圖過程中，經過思索、細細佈局並求推理之完整的核心教育意義」（張海潮，2005b）。所以，要不要學「尺規作圖」？要學多少「尺規作圖」？正如之前，柏拉圖的見解所說：不論是軍事用途這般的實用性或爲自己的靈魂研讀數學，這些都唯有透過數學嚴謹的訓練，才可能掌握不斷變化的自然現象背後的永恆不變的真理。而「尺規作圖」就此觀點而言，是可以提供某些程度上的訓練的。所以，至少在事實存在的部分，「尺規作圖」不能消失，而在整個作圖過程中，經過思索、佈局、推理之完整的核心教育而言，「尺規作圖」亦應存在。

三、現今國中教材中『尺規作圖』的內容

在本節中，研究者也將呼應前一節所提到的二個觀點。因此，研究者先從現今國中數學教材所遵循九年一貫課程綱要，且在現今市場上較爲暢銷的三家版本內容作分析，並將

[45] 命題 27：如果一直線和兩直線相交所成的內錯角彼此相等，則這二直線互相平行。

[46] 命題 4：若二個三角形，二對應邊相等，且所夾的夾角也對應相等，則兩三角形全等（頁 6）。命題 8：如果兩個三角形的一個有兩邊分別等於另一個的兩邊，並且一個的底等於另一個的底。則夾在等邊中間角也相等 (即SSS全等性質)（頁 9）。命題 27：如果一直線和兩直線相交所成的內錯角彼此相等，則這二直線互相平行（頁 24）。

其分成二部份來探討：（一）是在教科書中編者對於「尺規作圖」的引進方式與意義說明；（二）在現今教科書中「尺規作圖」的教學定位。

（一） 教科書中「尺規作圖」的引進方式與意義說明

・甲版中對「尺規作圖」的意義說明：[47]

首先，甲版將「二條線段長的比較法」利用圓規的操作來作介紹。並說明「**在數學上，利用直尺和圓規來畫圖，而且直尺只用來畫直線，不使用上面的刻度來丈量，我們就稱為『尺規作圖』**」（甲版，國中二下課本，頁 59）。然後緊接著「等長線段」、「等角」、「中垂線」、「角平分線」等的作圖，隨即結束此單元的內容。

・乙版中對「尺規作圖」的意義說明：[48]

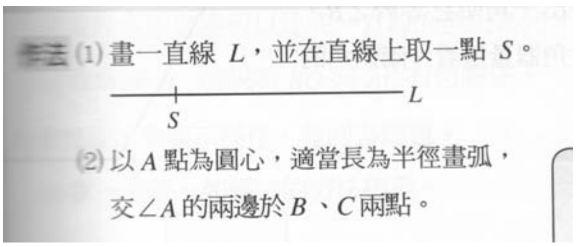
在此版本中，也是利用類似於甲版對「二條線段長的比較法」作爲尺規作圖可以進場的原因之一，但不同的是，此版本在教師手冊中多了一小段關於尺規作圖限制的說明，內容如下：

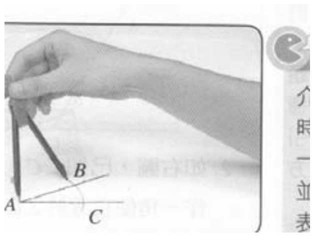
> **原來這是希臘人遺留下來的習慣。在歐幾里得的著作《幾何原本》之中要求基本假定越少越好，而推出的定理越多越好，這就是希臘數學的基本精神，所以對於作圖工具自然也應限制到最少的程度。**（引自乙版國中二下教師手冊，頁 62）

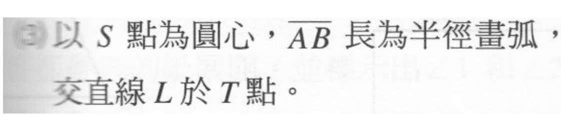
這是在這三個我們此處所評論的版本中，唯一對於「尺規作圖」限制與來源，能藉由歷史的典故來說明。接著也是作等線段長的作圖，作法亦與甲版相同。但該版本在此單元中，只有等線段長與等角二種作圖。對於等角作圖方式，其操作過程如下列圖示（其實三個版本皆大同小異），這顯然已嚴重扭曲了前一節中從歐幾里得的觀點來看「尺規作圖」的意義，因爲歐幾里得認爲：圓規的腳一旦離開紙面，那麼將使圓規精準度有所質疑。更何況在下述的第 (3) 點中，圓心不但離開紙面，重找新圓心 S 點，而且還在第 (4) 點中尋找新半徑。且最後在第(5)點中，試著讓學生發現所作之角與原圖是「重合」以證明作圖的正確性。

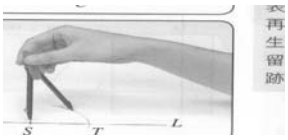
尺規作圖：作等角

已知 $\angle A$，畫出一角使它等於 $\angle A$







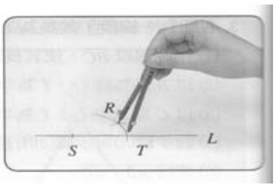


[47] 甲版中的「三角形全等性質」是緊接安排於「尺規作圖」之後。可參考本文內容，頁 13。

[48] 乙版中的「三角形全等性質」是安排於第五冊，而「尺規作圖」則是第四冊。可參考本論文之附錄一，頁 138。

(4) 以 T 點為圓心，$\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，

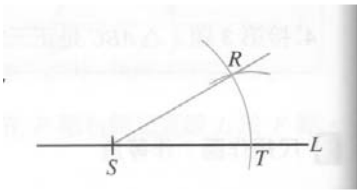
交(3)中的弧於 R 點。



(5) 連接 R、S 兩點，得到$\angle RST$，將

$\angle RST$ 和$\angle A$ 比較，會發現$\angle RST$

與$\angle A$ 完全重合，即$\angle RST=\angle A$。



（引自乙版國中二下課本，頁 65-66）

・丙版中對「尺規作圖」的意義說明：[49]

這三個版本不約而同的都以「疊合法」作為開場白，以引進「尺規作圖」單元的目的，[50]而在此版本中，更以簡單的文字說明何謂「尺規作圖」。如下所述：

直尺和圓規是幾何作圖的主要工具，「尺規作圖」是指用直尺和圓規來畫圖，而且直尺只用來畫直線或線段，不利用上面的刻度。（丙版國中二下課本，頁 48）

另外值得一提的是，在介紹完「尺規作圖」意義之後，在課本中補充了一則「數學萬花筒」，其內容如下：

古希臘幾何三大作難題：

・三等分任意角：把一任意角三等分。

・立方倍積：作一立方體，使其體積是一已知立方體體積的兩倍。

・化圓為方：作一正方形，使其面積等於一已知圓的面積。

這三個題目，作看之下似乎不是很難，為何被稱為三大難題呢？這是因為只能使用沒有刻度的直尺和圓規作圖。現代數學家已證明了這三個題目都無法用尺規作圖完成。

（引自丙版國中二下課本，頁 50）

由以上各版本對「尺規作圖」意義的引進，可說是皆止於「尺規作圖」的名詞解釋，其目的則是避免測量上的誤差，皆未從「尺規作圖」的歷史意義來考量，縱使乙版本補充了「尺規作圖」的限制與來源，但學生仍難理解「為何」要有如此的限制。至於丙版「數學萬花筒」的補充資料更顯突兀。所以，這樣的課程設計，無怪乎讓學生對「尺規作圖」的學習無法有新的體認。[51]

（二）現今教科書中對「尺規作圖」的教學定位。

為便於分析各版本對中「尺規作圖」的教學定位，我們需先釐清「尺規作圖」在各版本中所被安排的邏輯順序，今整理如下表 1 的內容。表格中的數字則代表該版本的尺規作圖題在課本中出現的順序（順序 11 是以“①①”表示之）。接著，筆者再於表格陳述之後，對各版本的編排順序作分析比較。

---

49 丙版中的「尺規作圖」是緊接安排於三角形全等性質之後。可參考本論文之附錄一，頁 138。

50 由上述的三個版本內容可知，都在說明著一個事實──「尺規作圖」的目的似乎都是為了避免「測量」所產生的誤差。

51 就「尺規作圖」的前述歷史意義而言，它是可以提供某些程度上的數學訓練。即在整個作圖過程中，經過思索、佈局、推理之完整的核心教育。

表 1　甲、乙、丙三個版本中「尺規作圖」的邏輯順序表

	等線段作圖	等角作圖	中垂線	角平分線作圖	過線上一點的垂線	過線外一點的垂線	過線外一點作平行線	SSS 作圖	SAS 作圖	ASA 作圖	RHS 作圖
甲版	①	②	③	⑥	④	⑤	①①	⑦	⑧	⑩	⑨
乙版	①	②	③	④	⑤	⑥	①①	⑦	⑧	⑩	⑨
丙版	①	③	②	④	⑤	⑥	①①	⑦	⑧	⑩	⑨

・甲版內容的教學順序

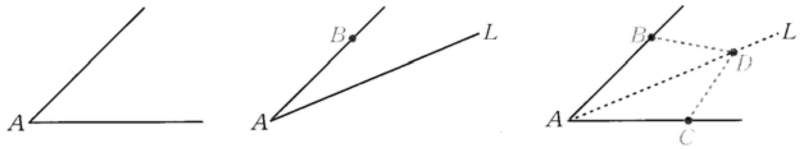
從表 1 的分析來看，甲、乙二版的編排方式較爲近似，[52]只是該版先介紹等線段、等角之後，先依序完成與線段有關的作圖之後再介紹角平分線的作圖，同時，在此單元中，除了下圖的角平分線作圖有操作活動之外，其他作圖教學則是直接寫作法。

4 角平分線

在前一節我們曾經利用對摺的方法平分一個角，且找出角平分線。要如何利用尺規作圖來作出一個角的角平分線呢？由於角平分線會通過此角的頂點，因此只要作出此角平分線上的另外一點，即可作出此角平分線。

活 動 一 角平分線

1. 在紙上任意畫一個$\angle A$，並利用摺紙的方法摺出它的角平分線 L。
2. 在$\angle A$ 的一邊上任取一點 B，用圓規在 B 點刺洞，再打開紙，將另一點標記為 C。請問 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 會相等嗎？為什麼？
3. 在直線 L 上任取一點 D，連接 $\overline{DB}$、$\overline{DC}$。請問 $\overline{DB}$ 與 $\overline{DC}$ 會相等嗎？為什麼？



・乙版內容的教學順序

三個版本的等線段作圖方式皆爲直接在直線L上任取一點爲圓心，然後已知線段長爲半徑畫弧，即得等線段長，此種作圖方式與《幾何原本》中的作等線段長方法迥異，[53]但就學生的直觀而言，是可接受的。然角平分線的作圖，三個版本雖皆有類似的活動引導，但其意義似乎不大，以本文第十一頁中的乙版活動內容而言，學生對其問答方式，並未有任何的思考作用，因爲學生只要回答「是」即可。

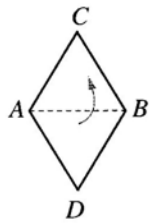
---

[52]甲版的編排方式是先完成相關垂線的作圖，再作角平分線作圖；而乙版則是利用菱形對角線垂直平分性質作中垂線與角平分線，然後再作相關垂線的作圖。

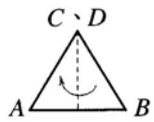
[53] 可參考《幾何原本》第 1 冊的命題 2 或本文第二節。

活動 2　　菱形對角線的性質

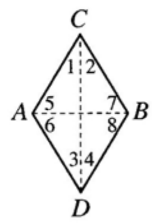
拿出附件㈠中的菱形 $ADBC$。



(1) 將菱形 $ADBC$ 沿對角線 $\overline{AB}$ 對摺，觀察△ABD 與△ABC 中 C、D 兩點是否完全重合？是。



(2) 步驟(1)摺出的△ABC 中，將 B 點疊到 A 點上，再將紙攤開觀察摺痕是否通過 C、D 兩點？是。



(3) 菱形 $ADBC$ 的兩條對角線是否互相垂直平分？為什麼？是。由步驟(2)知道兩條對角線互相垂直平分。

(4) $\angle 1$ 是否等於 $\angle 2$？$\angle 3 = \angle 4$、$\angle 5 = \angle 6$、$\angle 7 = \angle 8$ 是否也都成立？為什麼？

是。因為經過 2 次對摺後，各對應的角皆能完全重疊。

（引自乙版國中二下課本，頁 69）

・丙版內容的教學順序

相較於前二版的安排順序，丙版則顯得沒有邏輯性，但三者的共同點就是，對於「尺規作圖」的教學目的皆僅限於如何將所要求的圖形完成。在此版本中，先作等線段長，再中垂線、然後作等角、緊接著作角平分線，然後再來作過線上一點的垂線作圖以及過線外一點作垂線，作圖方式都是直接引入。只有角平分線利用了對摺的操作活動，如下圖。顯然編者對於某些的基本作圖無法自圓其說，也使得作圖的邏輯順序顯得有些　零亂而無目的，遑論希望能透過作圖讓學習者了解「尺規作圖」的功用。

下圖是一已知角，我們用對摺的方法，讓角的兩邊疊在一起，則摺痕就是角平分線。

（引自丙版國中二下課本，頁 54）

由以上教學順序的內容分析，可以看出甲版與乙版在「尺規作圖」的邏輯順序上，有類似之處，不過三種版本對於基本的作圖方法，其實都用相同的方式。不過值得一提的是，筆者去年曾以相同主題針對《國民中小學九年一貫課程暫行綱要：數學學習領域》的三個相同版本做比較時，發現：甲版與丙版除了「等線段作圖」之外，其餘作圖題皆利用「三角形全等性質」概念來引導作圖，[54]時隔才一年，課程的順序安排卻完全相反，表示編者對於「尺規作圖」的學習目的不在於邏輯演繹的訓練。

[54] 可參看陳玉芬(2006)。從HPM觀點看九年一貫國中數學幾何教材。國立台北教育大學數學教育研究所碩士論文。

四、從 HPM 觀點下看「尺規作圖」的知識價值與再定位

從前二節的分析過程中，我們可從下列三方面來討論「尺規作圖」在國中課程中的定位。

‧「尺規作圖」在希臘時期，不僅是數學上的幾何問題，也象徵著哲學上的思想層次，所以有著超高標準的「作圖限制」與「演繹推論」。然而，在十世紀左右的阿拉伯數學家，*Abu'l-Wefa* 對這傳統的作圖工具又有不一樣的限制，他們允許直尺的使用，但是卻限制圓規所張開的大小長度要固定；到了西元 1797 年，義大利數學家Lorenzo Masheroni 出版了*Geometria del compasso*，書中則說明，在某些條件下的「尺規作圖」可以「只需圓規」取代之(Retz & Keihn, 1989) 。 因此，從歷史的發展背景來看，「尺規作圖」的限制只是反映了當時社會脈絡下的數學知識為何？那麼現今的教科書對於「尺規作圖」究竟應如何定位？如果真是希望能提供某些程度上的訓練與整個作圖過程中，經過思索、佈局、推理之完整的演繹論證，顯然我們只看到了各家版本只是承襲了《幾何原本》中「尺規作圖」的「樣子」，[55]但對於「尺規作圖」的原有「精神」卻顯得有些薄弱了。[56]這就好像一位有名的指揮家Arturo Toscanini (1867-1957) 對於其他指揮家模仿他的指揮方式時，只說了一句：「他們只是在模仿我的短處與缺點」。[57]這也無怪乎學生覺得唐突：為何一定要用無刻度的直尺？為何一定要用尺規作出「等線段」或「角平分線」的圖形？為何不能用量角器與直尺呢？

‧如果因為隨著教育改革的浪潮，致使現今的課程更為重視學生學習的認知，而改以多種的操作來引導，立意甚好，就像前面的甲、乙二版，但是，由於編者對「尺規作圖」的目的亦不明確，使得整個活動目的只是在作教學引導。縱使有歷史呈現的資料，亦難以讓學生對「尺規作圖」的意義，有新的認知或另一個學習的角度。

‧《幾何原本》中，對於相關的作圖題，皆安排於「全等三角形的證明」之後，因為就邏輯的證明上，較具有說服力，但綜觀上述各版本的教材安排，令人遺憾的是，三個版本中皆未使用全等三角形的證明來引導作圖的概念，且對「尺規作圖」所附加的文化欣賞亦未曾重視。[58]雖然，就比較上，乙版的歷史資料補充較多，卻似隔靴搔癢。[59]

---

[55] 附錄三中陳列了在《幾何原本》中，所有與「尺規作圖」相關的命題，而現今教科書對於「尺規作圖」的教授範圍皆未出此範疇。即上述的作圖題，如：作等線段長、作等角、作角平分線、作中線、垂線、中垂線及作平行線等。

[56] 從附錄三中可以看出，與「尺規作圖」所有相關的作圖題在《幾何原本》中所應用之處，都是扮演「輔助線」的角色，這也正呼應了前一節所述，「尺規作圖」可以表達一些已經事實存在的部分，或者說在某些公設條件之下事實存在的部分。而為了「驗證」這些已經事實存在的部分，則「尺規作圖」也必須要通過嚴謹的演繹論證。

[57] Arturo Toscanini (1867-1957) 因為患有高度近視，所以看樂譜必須非常靠近他的眼睛，但礙於指揮時的距離，所以他必須強迫自己將樂譜背下，使得他在指揮時都不用看樂譜，而其他的指揮家卻以為要作為一個優秀的指揮家，必須在指揮時不用看樂譜(Wu, 2002)。

[58] 如：因為尺規的受限，而在歷史上所產生的「三大作圖」難題。可參閱Bunt, Jones & Bedient (1998). *The Historical Roots of Elementary Mathematics* (pp.89-112). New York: Dover Publications INC.

[59] 可參閱Retz & Keihn (1989). Compass and straightedge constructions, In John K.Baumgart et al (Eds), *Historical topics for the mathematics classroom (31st yearbook)(* p.193) . Reston, VA: NCTM.

所以，如果是要承襲《幾何原本》的思想，那麼它所提供某些程度上的訓練與整個作圖過程中，經過思索、佈局、推理之完整的演繹論證，是學生在進入高中之前，所必須儲備的數學知識能力。而對「尺規作圖」而言，才是真正有價值存在的因素。

五、結語與建議

本節將總結本文之研究內容並針對研究結果提出具體之建議。

・數學史在九年一貫《課程綱要》的能力指標中的地位

《九年一貫數學領域暫行綱要及補充說明》（教育部，2003a，頁 1）中數學領域的基本理念強調：

激勵多樣性獨立思維方式，尊重各種不同的合理觀點，分享個別族群的生活數學，以及欣賞不同文化的數學發展，都是數學課的精神指標。

《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》（教育部，2003b，頁 4）中數學領域的基本理念強調：

數學史的重要性：教師教學裡，引進與主題相關的數學史，對學童學習會有很正面的意義，尤其能協助學童抽象觀念具體化，因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。

由上觀之，顯示數學史漸受數學教育界的重視。然而，我們從「幾何與圖形」此一主題的第三、四階段共 19 條的能力指標中，並未有發現明確建議能藉由數學史讓學生達成的能力指標。舉例來說；有「S-4-9：能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖」、「C-R-4 能察覺數學與人類文化活動相關」，卻無「察覺不同的文明所呈現的數學面貌」與「觀察數學歷史的脈絡，認識數學的用途與數學思維的特性」所以，如果課程綱要是各版本在編輯時所信奉的圭臬，那麼，要讓數學史受到重視，就應明確地訴諸文字才好。

・各版本中，運用數學史的情形及其地位分析

從本文的內容分析可以看出，各家版本使用相關數學史知識的情形，可說是相當貧乏，其中除了乙版有些許的數學史「素材」之外，[60]對於數學史可以如何地啓發或運用，皆無所著墨。其他版本則幾乎與數學史無關。所以說，如果其他版本皆將數學史視爲「陳年往事」的話，那丙版也不過只是「舊事重提」，充其量只是點綴罷了！我們也看到教材中對於史實的引入似乎是「獨立的」單元，或是不完整的內容，完全忽略了這些史實背後所蘊涵的文化意義！就猶如鳥會築巢，但不懂得編織，織工懂得編織，卻不瞭解編織的文化 (Eve, 1998)，都令人遺憾。因爲透過研究數學史的例子，不僅提供學生欣賞數學實用性的合理解釋，同時也會發展學生自我的學習目的，並藉由審美的批判引動求知慾的動機 (Fasanelli, 2000)。當然，倒也未必要讓學生經歷如古人般迂迴曲折的學習，但至少可將古代的作法視爲一種選擇的工具。

・落實數學史的教學

[60]乙版之所以稱爲「素材」，則是因爲大部份的題材都還是未經有任何包裝，也可說是僅限於數學史料的提供。

誠如前面所言，藉由HPM的觀照，可以提供學生在學習認知層面、歷史文化層面、以及數學邏輯層次各面向的不同觀點。舉例來說，我們可以從「尺規作圖」的發展中，了解推理論證的意義與教學上的定位；例如：希臘人的數學觀與古代所有文明古國的人們的數學觀有本質上的不同。後者大抵上是將數學視爲應用性科學，爲解決具體問題而逐漸發展起來的知識系統，希臘人則基於想要了解自然界的慾望，使得他們自然地想去創造和看重數學（袁小明，2003）。因此，發展了他們對於學習數學意義的不同。（Swetz, 1995, 轉引自 Liu, 2004）。同時，蒐集不同人、不同時期和不同文化對特殊歷史問題的不同方法作爲練習，讓學生自己去比較和對照，學生能通過這些理解甚至欣賞這些方法而獲益（Liu, 2004）。因爲，若只是由於學生在概念認知上的「鴻溝」(gap)或誤解，而將學生摒除在數學學習之外，那麼對老師和學生而言都是一種不幸(Greer & Gerry, 1989, p,xiii)！[61]因此，以數學史爲經線，以現今時代脈絡爲緯線，將歷史與現代知識整合，應是現今教師與學生皆需學習的課題 (Kline, 1989/2004a)。

・強化演繹推理的能力

隨著教育的改革，爲了讓 80%學生的數學能力帶上來，對於幾何的推演證明，及尺規作圖等都相對弱化了。但是古希臘的幾何，卻帶出嚴格的演繹體系，數學因而從具體的、經驗的、進展到抽象的、論理的、架構的。所以，這部分的教材，在邏輯與抽象程度較高。基本上，我們認同現行課程，把歐氏幾何安排在較晚出場的做法，而不按歷史場序來，因爲對於認知能力還在具體操作階段的學生而言，這部分的教材是有點偏難。但是對於認知能力已經進入形式操作階段的學生而言，則這部分的教材是很具挑戰性、有邏輯思考訓練價值。所以，我們不應爲了教育的鬆綁，或爲減少學生在學習過程中，遭遇太多的壓力和挫折，而失去數學應有基本的素養訓練，也許也可以學習 83 年版的編排方式，將挑戰性的內容編入選修教材，讓有能力的學生也能享受數學自身所散發的美。

・提供教師的數學史進修課程

誠然，如 Skemp 所指出 (1987/1995，頁 3)：

> 如果你在學校中對數學的印象只是一堆不易理解的規則,將它們背下來並適當套用之後，就得出所謂正確答案，或許你會同意數學必須修正了。可是改變的結果不見得變得更好，新課程的引入也不保證更理解數學，如果老師依照舊的，不好的方法施教，一切等於零。

Philippou and Christou (1998，轉引自 Liu, 2004，頁 358) 也曾強調：

> 未來可能成為教師的人在一個培訓項目中參加兩門基於歷史的數學課程後,對待數學的態度和看法發生了根本改變。其中一位教師說到：數學史為我提供了大量有趣的新體驗。・・・通過這次「旅行」，使我意識到數學一直都是並且繼續是一門有用的科學。・・・這門課程使我感到數學是或至少有時是一種人類活動。當得知偉大的數學家也像我一樣頻繁地犯錯誤時就倍感自信了。

[61]所謂的概念認知上的「鴻溝」(gap)或許是由於學生「學習歷程的濃縮」。所以，要將「學生學習的時間稀釋」，那麼在課程中，藉由數學史的引入，幫助學生了解學習單元的背景與知識本身，同時藉由歷史本身，是可使教師了解學生在學習過程中所隱藏的困難與障礙。

然而，與本文研究結果相左的，Stander (1989，轉引自 Liu, 2004) 針對這一方面實施了兩個短期實驗，發現數學史對提高學生的學習興趣並沒有產生顯著的影響。結果暗示了僅僅爲了用數學起見而用數學史是膚淺的，不合實際的。也就是說，唯有讓教師們能適時、適法地使用數學史，才能讓數學的「教」與「學」雙贏。所以若能提供適當的機制或方法使教師的數學史素養的提升，那麼一切的努力將會事半功倍。因爲教育的成敗，除了一個完善的課程設計之外，第一線教師對於教材的詮釋更是取決教育成功的關鍵所在。

對於本文研究，筆者只是希望在抽離了這些理論觀點之後，再次重新檢視這些課程時，能注入更多元的內容與思考的方向於現今的課程設計以及教師的教學歷程中，以擴展學生學習的廣度與深度。就如 Liu (2004，頁 361) 所說的：

> 一位美國數學教育家提出了一個批判性的問題：「有證據表明在數學教學中結合數學史有效嗎？」在數學課程中包含歷史有其重要性的任何一個提倡者都難以回答這個問題。我們必須在回答之前闡明一批評的觀念，那就是什麼是「有效的數學教學」？如果它指的是在標準考試中提高成績，那我將保持沈默。據我所知，沒有實驗研究表明學習數數史有助於在傳統考試中提高成績，雖然學習後它能提高學習態度，但是態度與成就之間既沒有線性也沒有直接關係。

所以，如果「有效的數學教學」意味著形成學生的思維方式和提高他們的學習興趣，那麼我確信，數學史教學在課程中有幫助。因此，即便有實際上實行的困難，但是數學史融入數學教育的工程仍是值得努力的方向。

參考文獻

朱建正等編著 (2007).《國中數學 2 下 (教科書、習作、教師手冊) 》，台南：翰林。
李國偉 (2004).〈數學的本質〉，取自 2004/11/11
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_3_05/。
余文卿 (2001).《高中數學第三冊（教師手冊）》，台北：龍騰。
洪有情等編著 (2007).《國中數學 2 下(教科書、習作、教師手冊) 》，台北：康軒。
洪萬生 (2004a).〈美國數學家如何介入數學教育？〉，科學月刊，35 (2)，35 - 42。
洪萬生 (2004b).〈教改爭議聲中，證明所爲何事？〉，師大學報，49 (1)，2 - 10。
袁小明 (2003).《數學史》，台北：九章。
陳冒海等編著 (2007).《國中數學 2 下(教科書、習作、教師手冊) 》，台南：南一。
梁宗巨 (1998).《數學歷史典故》，台北：九章。
教育部 (2001).《國民中小學九年一貫課程暫行綱要：數學學習領域》，台北：作者。
教育部 (2003a).〈國民中小學九年一貫課程--數學學習領域暫行綱要（修訂版）〉，載於教育部（主編），《國民小學數學課程標準暨國民教育九年一貫數學領域暫行綱要及補充說明》，台北：作者。
教育部 (2003b).《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》，台北：作者。
張海潮 (2005a).〈柏拉圖支持尺規作圖〉，取自 2005/10/03
http://www.cdn.com.tw/daily/2005/02/23/text/940223e1.htm
張海潮 (2005b).〈九年一貫數學綱要必須重整〉，取自 2005/10/04
http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/edu/articles/article_03_016b.htm
陳玉芬 (2006).《從 HPM 觀點看九年一貫國中數學幾何教材》，國立台北教育大學數學教

育研究所碩士論文。
蘇惠玉 (1999).〈三大作圖題〉,《HPM 通訊 》6 (6)。
Euclid (2002).《幾何原本》(藍紀正、朱恩寬譯),台北:九章。(英文譯著 *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, 1956)
Katz,V. J. (2004).《數學史通論》(李文林等譯),台北:高等教育出版社(原著出版於 1998)。
Liu, Po-Hung (2004).〈教師需要結合數學史來教學嗎? 〉, 《數學譯林》,23 (4),357 - 361。
Skemp, Richard (1995).《數學學習心理學》(陳澤民譯),台北:九章(原著出版於 1987)。
Bunt, L. N. H., Jones, P. S., & Bedient, J. D. (1998). *The Historical Roots of Elementary Mathematics* . New York :Dover Publications.
Eve, H. (1998). "The History of Geometry", in J. K. Baumgart , D. E. Deal, B. R. Vogeli, & A. E. Hallerberg (Eds), *Historical topics for the mathematics classroom (31st yearbook)*(pp. 165-196) , Reston,VA: NCTM.
Fasanelli, F. (2000). "The Political context", in J. Fauvel and J.V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (the ICMI study)(pp.1-38). Dordrecht: Kluwer.
Retz, M., & Keihn, M. D. (1998). "Compass and straightedge constructions", in J. K. Baumgart , D. E. Deal, B. R. Vogeli, & A. E. Hallerberg (Eds), *Historical topics for the mathematics classroom (31st yearbook)* (pp. 192-196). Reston,VA: NCTM.
Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). "Integration history of mathematics in the classroom: an analytic survey", in J. Fauvel and J.V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (the ICMI study)(pp. 201 – 240). Dordrecht: Kluwer.
Wilder, R. L. (1998). "Development of Modern Mathematics", in J. K. Baumgart , D. E. Deal, B. R. Vogeli, & A. E. Hallerberg (Eds), *Historical Topics For The Mathematics Classroom (31st Yearbook)*(pp. 460-476), Reston, VA : NCTM.
Wu, H. H. (2002). "Chapter 2: Fractions (Draft)". Retrieved May 8, 2004, from http://www.math.berkeley.edu/~wu/