HPM通訊

第十一卷 第二、三期合刊 目錄（2008年3月）



創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng



# HPM 與高中幾何教學：以圓錐曲線的正焦弦為例

蘇惠玉
台北市西松高中

## 摘要

在現行的高中教材中，無論是高三的舊教材，或是高一二的 95 課綱，其中幾何學的內容部分，仍是以解析幾何的形式爲主，不重視幾何關係的瞭解，反而著重在以代數形式來講述幾何內容，讓學生習慣以代數方式來理解幾何概念。本文首先試著分析目前高中數學教科書中，對於幾何部份的教材編寫上，由於編寫者的意識型態不同，理念不同，數學教師對教科書的詮釋就會因此而有不同，因而造成目前高中幾何教學著重在代數方程式上的一些問題。同時本文也試著從歷史文本中尋找材料，簡單舉例說明數學教師可以如何應用這些史料在幾何單元教學上，例如三角函數的正餘弦定理，最後再以圓錐曲線的正焦弦爲例，說明如何利用數學史料於此單元的教學，尤其是阿波羅尼斯的《錐線論》中對圓錐曲線的 3 個命題，將此 3 個命題的內容與意涵，尤其是正焦弦在圓錐曲線的幾何意義上所扮演的角色，將其適當地融入教學中，將可使學生真正學習圓錐曲線的幾何知識，而不再只是代數形式的幾何知識。教師藉由數學史的幫助，除了使學生的一些認知障礙獲得解決之外，也可促進自己本身的專業成長。

**關鍵詞：**解析幾何、圓錐截痕、正焦弦

## 一、高中數學中的幾何與代數方法

在現行的高中教材中，無論是高三所用的舊課程，或是目前高一、二所用的 95 課綱，課程中有關幾何的內容，可以分成下面幾個部分：

1. 函數圖形：包括多項函數中的一次、二次及三次圖形；指數、對數函數；三角函數

2. 複數平面與向量
3. 解三角形問題
4. 空間
5. 圓、球與圓錐曲線

其中除了解三角形的問題以及空間概念中有關立體圖形的基本問題之外，在引進座標系統之後，都是以代數的形式來進行幾何概念的學習。事實上，高中數學中的幾何課程無論是教科書的編寫，或是數學教師的實際教學，也反映了在笛卡兒與費馬發明座標系統之後的幾何學發展趨勢，即朝著以代數來解決幾何問題的解析幾何發展。

幾何這一學科，原本在數學上的地位，是至高無上的，從希臘時期就極受重視，是古典四學科之一，也是「數學」這一科的代名詞。即使到了牛頓的時代，依然備受尊崇，當時大學裡的數學教授依然稱爲幾何學教授。相反地，代數一開始卻被認爲是一種技術，也就是實用算術，在希臘時期是奴隸們學習的技術。這種「技藝」（art）的形象一直延續，直到到笛卡兒與費馬發明座標幾何爲止，但在其後，代數的地位開始凌駕在幾何之上了。我們從笛卡兒之前的代數發展，即可以看出數學家如何看待「代數」所扮演的角色。

舉例來說，卡丹諾（Girolamo Cardano, 1501~1576）在於 1545 年發表 *Ars magna*（大術），此書又稱 *On the Rules of Algebra*（處理代數的法則），當中包含了眾所皆知的三次方程式的解法。從他的書名與書的內容來看，此時的「代數」對他而言是一種技藝，不過，在此書中他仍是以幾何的想法來進行論述與推理，而未知數與數字仍帶著古希臘的傳統，帶有幾何意義在內。再舉一個例子來看，韋達（F. Viète, 1540~1603） 在《解析技術入門》（*In Artem Analyticem Isagoge*, *Introduction to Analytic Art*, 1591）中，他將代數的發展推到符號化的新里程碑，但在他的思路中，卻仍然擺脫不了幾何的影響。從他的方程式必須要遵守所謂的「齊次律」這一點來看，幾何仍舊是學習數學的主體。顯然，他仍將代數視爲一種「技藝」，所以，他將本書總稱爲《解析方法入門》（*Introduction to Analytic Art*），本質上還是「技藝」，只不過現在多了形容詞—解析。

在研究古希臘數學家如何解決幾何問題時，帕普斯（Pappus）的評論告訴我們有兩種方法：解析（analysis）與綜合（synthesis）。所謂綜合，即是由確立的定義公理出發，藉助幾何證明程序得到複雜的結論或知識；而解析的步驟剛好相反，假設要證明的結論存在，再一步一步分析追溯回最原始簡單的已知條件。帕普斯還將「解析」分成兩種，『理論型的解析』（尋求真理）與『問題型的解析』（尋求所需結果），但是，他並沒有將「解析」與「綜合」的方法與某一數學分支結合在一起。然而韋達在《解析技術入門》中，運用古希臘的「解析」法，解釋他的代數方法，他將『理論型的解析』稱爲 *zetetics* (seekink the truth 的意思)，就是要在某一待定項與若干已知項之間，建立方程式或是比例式。另一方面，他稱『問題型解析』爲 *poristics*（他選擇此名詞與「綜合」法作一連結），運用方程式或比例式檢驗所述定理的真實性。最後，他自己還加上 *rhetics*（或稱 *exegetics* 的解析），在所給的方程式或比例式中，求出此待定的未知項的值。在此，韋達即以代數方程式的方式，重新解釋古希臘的「解析」方法。

笛卡兒與費馬這兩個人，同樣活在熱衷研究古希臘經典的學術環境中，同樣熟知「綜合」與「解析」的方法，即使他們基於不同的原因與目的，卻以同樣的巧思將「綜合」與

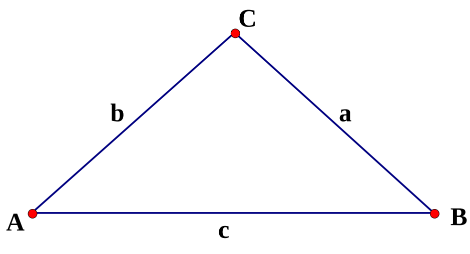
「解析」這兩種方法結合，進而發明座標系統。由於笛卡兒的貢獻，我們知道要解決各種不同的幾何問題，要求出各種幾何量時，可以借用代數方法，假設所求的幾何量爲未知數，利用題目中所述的事實假設方程式，解出方程式中的未知數即可。再者，我們受惠於費馬的卓見，知道幾何曲線可以利用座標系統轉換成軌跡方程式，進而利用這個代數方程式可以讓我們解決更多問題。至於目前高中數學中的幾何課程，則完全沿襲笛卡兒與費馬的這兩種進路來學習幾何概念，只是當我們從教學與學習的角度來看這兩種進路時，在這當中所產生的問題，當然不可能讓這兩位大師復活來幫我們解決問題，此時需要的是教學現場中數學教師的專業與巧思。而從史料中尋找的靈感，卻可以讓古今許多偉大傑出的數學家們，當然包括笛卡兒與費馬，成爲數學教師的助力。

## 二、 高中幾何教學的問題

在高中數學的幾何課程中，因爲教科書編寫者意識型態的不同，導致各版本教科書在幾何單元的內容呈現上，有些不同，也有些不足的地方。教科書對教材的呈現方式，可能與教師對這個單元的瞭解與期望不同，或是對學生會產生的困擾無法提供解決之道，身爲數學教師，只能靠自己的專業能力來補救。首先，我們先來看看各版本教科書所呈現出來的幾何教材，在教學與學習上，會產生什麼樣的問題。

目前流通的幾家版本教科書中，在幾何課程教材的部分，雖然隨著教科書主筆者與主編者對高中幾何認知的不同，而有不同的呈現方式，然而，各家版本在主要概念的鋪陳與證明上，仍然著重在代數形式的運作，而不強調主題的幾何概念，即使偶而在各家版本的某些部分會觸及到幾何意義的解釋。舉例來說，有關繪製函數圖形的單元，有的版本強調的是代數的運作，僅以描點法繪製圖形，並不強調圖形間的伸縮、平移與對稱的關係。雖然大部分的版本爲免篇幅過多，或是避免麻煩，通常都簡略帶過，但是，還是有版本強調圖形間的幾何意義，舉例仔細說明函數關係式中每一對應係數在圖形之間的伸縮、平移與對稱關係。在進行函數圖形的教學時，如果老師想要強調函數 $y = a\sin(bx + c) + d$ 中，各項係數所代表的幾何意義與圖形之間的關聯時，只強調代數運作的版本內容，就會顯得明顯不足。

在此，筆者再舉幾個幾何教學時常會遇到的問題，這些問題通常來自於幾何知識內容的呈現方式。在高中數學中，三角函數佔有非常關鍵的地位，卻也是許多學生對高中數學最感到頭痛的地方。目前有關三角函數的教材，大都以式子的運算與操作爲主。例如，正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$，教科書的編寫與一般教師在教學時，並不強調三角形與外接圓的關係，通常先以三角形的面積公式得到




$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ 的結果，再畫外接圓來證明其比值等於 2 倍外接圓半徑，這樣的教法通常會顯得外接圓的引入不夠自然。此時較爲用心的教師或學生應該會有一個疑問，就是

爲什麼三角形的邊角關係會牽涉到外接圓？[1]

接著正弦定理之後的是餘弦定理。目前教科書在餘弦定理的證明上，一律都用解析幾何的證明形式，也就是建立座標系，利用距離來導出餘弦定理。例如△ABC，邊長分別爲 a, b, c，建立座標系，A(0, 0)，B(c, 0)，則 C 點座標爲 $C(b\cos A,\ b\sin A)$，根據距離公式得

$$\overline{BC}^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2$$

$$= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

又 $\overline{BC} = a$ ，故得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

這樣子的餘弦定理之證明形式，並沒有辦法跟幾何概念作連結，只是讓學生從代數式子理解定理爲真而已。有一個版本提到「餘弦定理是畢氏定理的推廣」，儘管畢氏定理在幾何上的意義大家都能充分體會，然而，餘弦定理在幾何上的意義在教學時卻常被忽略。[2]

整個高中幾何課程中，圓錐曲線的教材內容最能突顯高中幾何課程的特色：那就是：以解析幾何的形式學習幾何概念。在目前的高中教材中，爲方便以代數方程式的運作來處理圓錐曲線的問題，所以，編輯者運用一種便於與座標系統結合的形式來定義圓錐曲線，即以焦點、準線與距離的形式來定義：

拋物線：平面上到一固定點與一直線等距離的所有點所成的集合

橢圓：平面上到二固定點的距離和等於定值的所有點所成的集合

雙曲線：平面上到兩固定點的距離差爲定值的所有點所成的集合

在定義這些曲線之前，有一些版本會先說明平面與圓錐的截痕，用來引出圓錐曲線的這三個曲線，有些版本則是安排在三個曲線介紹完了之後在說明。不管是之前或之後，都有一個共同的問題，就是沒有關連性。稍微用心的教師與學生一定會有疑問：平面與圓錐的截痕，與按照課本定義畫出來的曲線是一樣的嗎？圓錐曲線爲什麼要用這樣的定義呢？

按照焦點的定義方式所得到的拋物線方程式爲 $y^2 = 4cx$ ，橢圓爲 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ，雙曲線爲 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ，接下來教科書的教材或數學教師在教學時，會強調圖形與方程式相配合的幾個幾何特性與名詞，例如圖形的範圍、對稱性、頂點與正焦弦。此時，數學教師最怕學生問的問題，通常會是「正焦弦有什麼用？」正焦弦對圖形的意義，在教科書、或是教師手冊的補充資料中，都沒有告訴數學教師該如何解答這個問題！

在高中的幾何課程中，習慣以解析幾何的形式處理幾何問題，這樣的策略或許從笛卡兒開始就延續下來。笛卡兒想要達成「透過代數運算的過程，將幾何從圖形的限制中釋放

---

[1] 三角函數的發明，尤其是正弦函數，來自於天文觀測與航海的需要，正弦函數一開始定義爲圓心角所對的弦長。所以若從這個角度來看正弦定理，外接圓自然而然會與正弦有關係。

[2] 餘弦定理可以看成畢氏定理的推廣。在證明餘弦定理時，可以利用投影定理，也可以利用歐幾里得證明畢氏定理的方法再加以調整即可得。請參考蘇俊鴻(2006), 〈餘弦定理可以怎麼教？〉,《HPM通訊》第九卷第十期。

出來」的目的，因而創立座標系統；在現代的教學中，數學教師們以解析幾何的代數形式，讓學生從幾何圖形的抽象性與貧乏的想像力中解脫，卻也因此無法幫助學生建立幾何意義。幾何的教學目標，通常希望學生有能力掌握代數與幾何間的「相互轉化」，因此，學生的認知障礙常會多了幾個層面：將幾何問題轉化成代數問題；以及將代數方法的求解轉換成幾何意義。即使學生在代數與幾何間的轉換沒有問題，他/她又會面臨另一個障礙，即是對幾何物件例如圓錐曲線的全面性與整合性的瞭解。身為一個數學教師，既然知道學生在學習幾何這部分有些什麼樣的認知障礙會發生，就有義務利用自己的專業幫助學生跨過這些學習障礙。

## 三、HPM 為高中幾何課程提供的一個進路—以圓錐曲線為例

一個數學教師在教學過程所碰到的問題，必須能夠靠自己的專業訓練尋求解答。他/她可以藉助於自身的教學經驗、同儕的幫忙，或是尋求書本中的知識，藉此造就自己的專業成長。在教師尋求解答的許多途徑中，他/她在數學史中所獲得的背景資料與相關知識，經過適當的剪裁與應用，可以讓數學教師更深入的詮釋教科書中的數學知識，進一步轉化成適合的教材，讓學生在學習過程中，更全面地體會、欣賞與吸收老師所教與的數學知識，讓教師與學生同時獲得成長。然而，如何將數學史「適當」應用於教學中，通常是數學教師不敢輕易嘗試的主因之一。以下，筆者就以圓錐曲線的教學為例，簡略陳述筆者在此單元教學中使用數學史料的一個方式與內容，以供參考。

**(1) 圓錐曲線教學的「引起動機」**

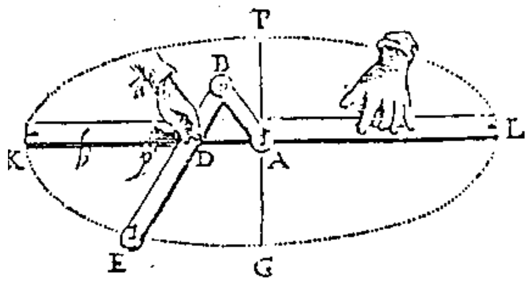
從史料的觀點來看「圓錐截痕」，一般認為古希臘數學家對圓錐曲線的興趣，來自於「三大作圖題」中的「倍立方」問題。所謂倍立方問題，即如何為一個正立方體的體積加倍，而且維持形狀同樣為正立方體；換句話說，即是將一個邊長為 a 的正立方體體積加倍，要作出一新的正立方體之邊長 x，滿足 $x^3 = 2a^3$。這個問題被希波克拉提斯歸結為作出兩線段長 a 與 2a 的兩個連續比例中項。這也就是說，要作出兩線段 x, y 滿足

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

x 即為所要求的新正立方體的邊長。希波克拉提斯的發現並沒有解決倍立方的問題，只是將問題轉換成作兩個比例中項 x 與 y 的問題。Menaechmus (約 350B.C.)引入新的曲線，即圓錐曲線來解決這個問題，將連比例式拆成兩個等式：$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$ 及 $\frac{a}{x}=\frac{y}{2a}$，從此，可得方程式 $x^2 = ay$（或是 $y=\frac{1}{a}x^2$），及 $xy = 2a^3$。倍立方中所要求的與 y，即被轉換成求兩個圓錐曲線的交點了。

**(2) 圓錐曲線的作圖**

在教科書中通常會提供定義方式的作圖，不過，教師也可以從數學史中找材料，讓學生實際作出儀器，利用自己作的機械工具作出圓錐曲線。在此，筆者以荷蘭數學家F. van Schooten (1615-1660) 在解釋笛卡兒的《幾何學》時，所做圓錐曲線作圖器中的橢圓為例：

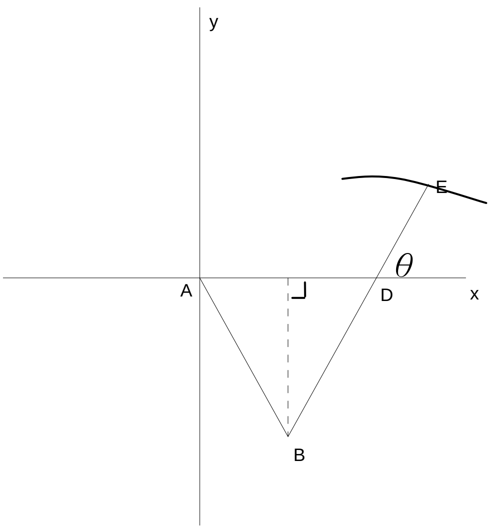



AB 與 BE 是兩根不一樣長度的棍子，在 B 點連結；在 BE 上取一點 D，使得 BD＝AB。將 D 點連接在一個軌道尺 L 上，E 點上放置一枝筆，當 D 點沿著 L 移動時，在 E 點的筆所畫出的軌跡就是一個橢圓。

除了讓學生實際作出這樣的儀器之外，還可以設計學習單讓學生去證明 E 點所畫出的軌跡爲一橢圓。數學史家 Jan van Maanen 曾設計過這下列學習單，可以參考使用：

(a) 設 A 爲原點，LK 爲 x 軸。如果我們同意 E 點所描繪出的真的是一個橢圓，那麼這個橢圓的方程式爲何？

如下圖，A 爲原點，E(x, y)，如上述，AB＝BD=a，且 DE=b，直線 BE 的每一方向角 $\theta$ ，決定每一 E 點。




(b) 以 a、b、 $\theta$ 表示 B、D、E 點的座標。
(c) 由(c)導出 E 點滿足的方程式。即可證明 E 點的圖形爲橢圓。
(d) van Schooten 的橢圓作圖法，滿足尺規作圖的限制嗎？

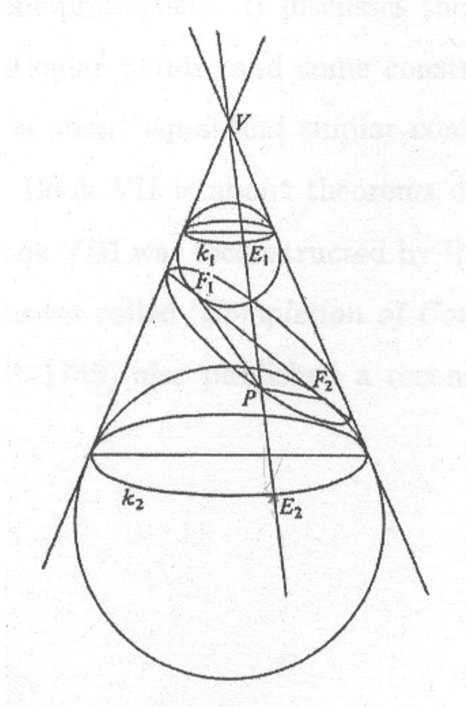
**(3) 圓錐截痕與課本定義方式的連結**

從「圓錐截痕」的角度來看，一平面與一圓錐相交時，當平面與底圓平行時，截出的痕跡爲一圓；若平面稍微傾斜不與對稱軸垂直，截痕爲橢圓；若平面與圓錐的一條母線平行，截痕稱爲拋物線；平面的傾斜度再加大，與圓錐的兩錐面都相交，截痕爲雙曲線。教科書中的定義方式，以及根據這樣的定義方式所得到的代數方程式，都與圓錐截痕沒有直接的關係。我們若要將「圓錐截痕」與「焦點定義方式」做一等價連結，可以橢圓爲例，

---

[3] van Schooten的圓錐曲線作圖器還有拋物線與雙曲線，可參考Van Maanen的 “Alluvial Deposits, Conic Sections, and Improper Glasses, or History of Mathematics Applied in the Classroom”, 收錄於 *Learn From The Masters!*

利用 A. Quetelet 與 G. Dandelin 於 19 世紀中所給出的一個定理：「橢圓（截痕）即是平面上到兩固定點距離和為定值的點所成的軌跡」來說明。此定理的證明為在平面與圓錐的截痕（此為橢圓）上下各塞一個球，其與平面相切的地方即為橢圓的焦點，也就是證明橢圓截痕上的任一點到此兩切點（即為焦點）的距離和為一定值即可。其證明如下：




平面E與圓錐截出一個橢圓Γ，我們可以在圓錐的內部，E的上、下方各塞一個球，使得這兩個球$S_1$, $S_2$分別與平面E及圓錐相切。假設$S_1$與平面E相切於$F_1$， $S_2$與平面E相切於$F_2$；$S_1$與圓錐相切得出一圓$k_1$， $S_2$與圓錐相切得出一圓$k_2$。

P為Γ上任一點，連$PF_1$，$PF_2$；若過P的一條母線切圓$k_1$與$k_2$分別於$E_1$與$E_2$，

因為$PF_1$與$PE_1$為球$S_1$的切線段長，所以

$PF_1 = PE_1$；

而$PF_2$與$PE_2$為球$S_2$的切線段長，所以$PF_2 = PE_2$。因此

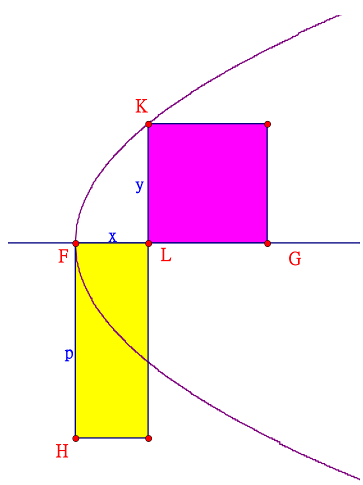
$PF_1 + PF_2 = PE_1 + PE_2 = E_1E_2$

而$E_1E_2$為兩球$S_1$、$S_2$間的公切線段長，為一定值，與P無關。也就是說，橢圓上任一點P，到兩固定點$F_1$, $F_2$的距離和為一定值。

**(4) 阿波羅尼斯的《錐線論》與正焦弦**

將圓錐截痕與課本所定義的方式作一連結的，除了上述的證明方法之外，還可以利用阿波羅尼斯的《錐線論》(*Conics*) 中所提到的相關內容。事實上，上述在教學上所面臨的幾個問題，也可以從此書中獲得解答。阿波羅尼斯 (Apollonius of Perga, 約 262 B. C. ~ 190 B. C.) 的《錐線論》共八卷，其中第七卷已失傳。前四卷為基礎部分，後四卷為拓廣的內容。第一卷為這三個曲線的一般性質；第二卷為直徑(diameters)、軸和漸近線的性質；第三卷中含有現今所知的焦點性質。

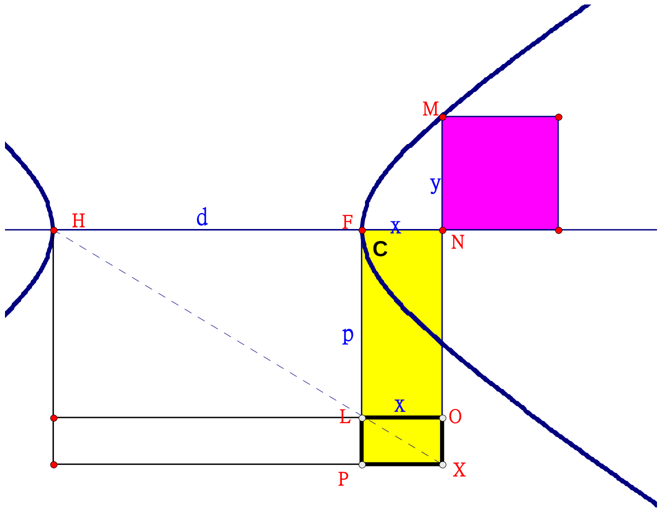
阿波羅尼斯在卷一的第 11、12、13 命題，引入何謂拋物線、雙曲線與橢圓。阿波羅尼斯的原文請參考本文附錄。簡單一點來說，他在平面與圓錐的截痕中，利用已知幾個線段的比例，找出一個線段長度，這個線段長即為正焦弦，他再將截痕上任一點的縱座標所成的正方形，與正焦弦與橫座標所成的矩行面積作比較，每一種截痕的情況不同，再利用所得的結論給出拋物線、雙曲線與橢圓的名稱。



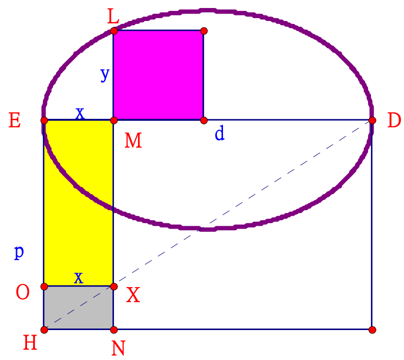

在命題 11 中，他說當平面與圓錐的一條母線平行地相截時，從截出的各個線段長中，我們可以得出一個與拋物線對稱軸（他稱為直徑）垂直的線段 HF，那麼這個截痕上的任一點 K 就會滿足：正方形 KL＝矩形 HF, FL。若以直角座標系的角度來看，任一點 K 的縱座標（y 座標）為 KL，橫座標（x 座標）

爲 LF，即可得方程式 $y^2 = px$ ，此處 $p$＝HF，即一般所稱的「參量」 (parameter) 或是「正焦弦」(*latus rectum*)。他將這個截痕稱爲 parabola，取其原意「剛好相等」來命名。

在命題 12 中，他在此截痕中先找出與對稱軸垂直的一個線段長 FL，則此截痕上任一點 M 的縱座標 MN 所得到正方形面積等於矩形 FX 的面積，這個矩形等於以 FL 爲高度，以 FN 爲寬度的矩形，再加上另一個矩形 OLPX。同樣建立坐標系，以 F 爲原點，HF 爲 x 軸，那麼 FX＝x，MN＝y，讓 FL＝p，HF＝d，因爲 HF：FL＝OL：LP，即 d：p＝x：LP，所以 LP＝$\dfrac{p}{d}x$ ，按照這個截痕的結論，可以得到 $y^2 = px + \dfrac{p}{d}x^2$ ，此處 p=FL 即爲正焦弦。他將此截痕命名爲 hyperbola，取其原意「超過、大於」來命名。




在命題 13 截痕爲橢圓的情況下，阿波羅尼斯同樣先找出與 ED 垂直的一個線段長 EH，那麼這個截痕上任一點 L，滿足以 LM 爲邊的正方形面積等於矩形 MO 的面積，而矩形 MO，比以 EM 爲寬度，EH 爲高度的矩形還少了一個矩形 ON。若在直角座標系上討論，以 E 當原點，ED 當 x 軸，那麼 EM＝x， LM＝y，讓 EH＝p，ED＝d，首先，ED：EH＝OX：OH，也就是 d：p＝x：OH ，所以 OH ＝ $\dfrac{p}{d}x$ ，那麼根據結果，可以得到 $y^2 = px - \dfrac{p}{d}x \cdot x$ ，也就是 $y^2 = px - \dfrac{p}{d}x^2$ 。其中 p＝EH，也就是正焦弦。他將這個截痕稱爲 ellipse，取其原意爲「縮小、小於」來命名。




在阿波羅尼斯命名 parabola., hyperbola, ellipse 時，即是利用圓錐截痕上一正方形與正焦弦爲一邊的長方形面積作比較，相等、大於或是小於來命名。事實上，這種「面積貼合」的方式，來自於畢達哥拉斯學派的「application of areas」的方法，畢達哥拉斯或其學派成員，將二次方程式的解（一個幾何量的解）與一已知線段的長度作比較時，以下三種情形有一種會發生：短於 (fall short)、超過 (exceed) 或是當好 (fit)；這三種情況被命名爲 *elleipsis*, “defect”；*hyperbole*, “excess”；*parabole*, “a placing beside”。 在將阿波羅尼斯所使用的文字翻譯成英文時，通常使用的「參量」(parameter)，例如卷一命題 11 中的 FH，命題 12 中的 FL 以及命題 13 中的 EH，原文的意思即是 “the straight lines drawn ordinatewise to the diameter are applied in square”，亦即「沿直徑的縱座標所做的直線，都以正方形貼合到其上的直線」。

阿波羅尼斯在卷一的命題 11 寫到這個線段（參量），也叫做 όρθία（原文中的英譯爲 upright side，即豎直邊），拉丁文翻譯時譯作 *latus rectum*，也成爲一個英文名詞，即是

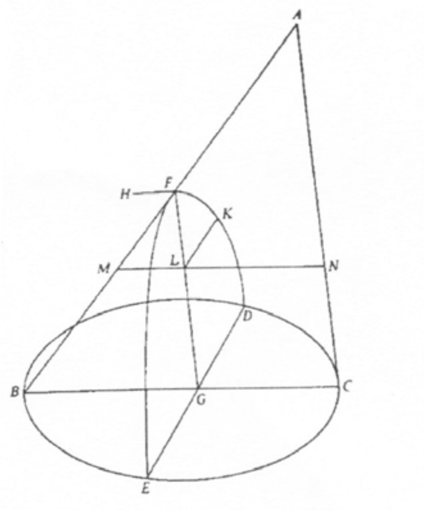
「正焦弦」之意。當一個平面跟圓錐相截時，在這個截痕的圖形中，它的「正焦弦」這一段長度即已經固定，阿波羅尼斯利用「比例（a : b :: c: d）」，並以垂直於「直徑」的方式作出這一段線段。在古希臘人比例式中，「::」意指「類比 *analogia*」，史家 M. Fried 認爲阿波羅尼斯所用的「類比」，不只是比例式的抽象操弄而已，更是「類比」於它所代表的幾何意義。他認爲，圓錐截痕中的「直徑」與「正焦弦」合成一個圓錐截痕的「圖象」(figure)，經由這個圖像，可以「類比」出這個圓錐截痕的特性。所以，阿波羅尼斯將正焦弦稱爲 “upright side”，即是意指這個矩形的一邊，再者阿波羅尼斯以這個矩形來表徵圓錐截痕，我們可以輕易的將這種方式，「翻譯」成爲直角座標系中的方程式： $y = px \pm \frac{p}{2a}x^2$ 。

在上述的三個命題中，阿波羅尼斯藉由正焦弦巧妙的將三個圓錐截痕以一貫的、相似的形式來表徵，適當地將這三個命題的內容與意涵融入教材時，數學教師將可以回答正焦弦在圓錐曲線中所帶有的幾何意義，而不再只是考試會測驗的一段長度而已。再者，教科書中雖然都以焦點的方式定義拋物線、橢圓與雙曲線，但是，這三個名詞所帶有的幾何關連性，在定義方式與隨之而得的代數方程式中都無法凸顯。利用阿波羅尼斯的這三個命題可以以一個爲完整的、幾何的形式來理解、進而欣賞圓錐曲線，這是教科書目前解析幾何形式的圓錐曲線教學所無法辦到的。無論如何，適當地使用數學史在數學教學中，教師的專業可以獲得成長，學生的學習障礙也能有另一種形式的解決方式。

## 附錄

**《錐線論》卷一命題 11**

如果一圓錐被過其軸的一個平面所截，同時又被另一與圓錐的底交於一直線的平面所截，其交線垂直於軸三角形的底邊。進而，如果截痕的直徑平行於軸三角形的一邊，那麼任一連接圓錐截痕和其直徑的直線，且平行於截平面與圓錐底之交線，其平方將等於兩線段所包含的矩形，其中一線段是從截痕的頂點開始，到上述直線在直徑上截取的部分 (the straight line cut off by it on the diameter beginning from the section’s vertex)；另一線段則滿足這樣的比例：它比上圓錐頂點與截痕頂點之間的線段，等於軸三角形底邊上的正方形比上軸三角形其餘兩邊所包含的矩形 (another straight line which has the ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section that the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of the triangle.)。這樣的截痕叫做拋物線 (And let such a section be called a parabola.)。



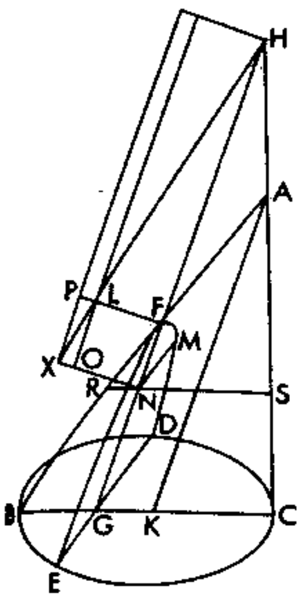

**設有一圓錐，頂點爲A，底爲圓BC。令其被過軸的平面所截成的三角形爲ABC** [I. 3]。又圓錐被另一與底交於直線DE的平面所截，DE與線段BC垂直。設這樣在圓錐表面形成的截痕爲DFE，其直徑爲FG [I. 7 and def. 4]，平行於軸三角形的一邊AC。又設過F點作直線FH垂直於直線FG，並且使它按比例：正方形BC : 矩形BA, AC:: FH : FA作出。

在截線上任取點 K，過 K 作直線 KL 平行 DE。

我認爲正方形 KL＝矩形 HF, FL。

**命題 12：**

如果一圓錐被過其軸的平面所截，同時又被另一與圓錐的底交於一直線的平面所截，其交線垂直於軸三角形的底邊。又如果截痕的直徑延長後與軸三角形的一邊交於圓錐頂點之外，那麼任一連接圓錐截痕和其直徑，且平行於截平面與圓錐底之交線的直線，其平方將等於某一面積，此面積貼合 (applied to) 到一直線上，此直線滿足這樣的比例：沿著直徑增加到其與軸三角形一邊之交點的直線長(the straight line added along the diameter of the section and subtending the exterior angle of the triangle)比上此直線，等於從圓錐頂點連到三角形底並平行直徑的直線上的正方形，比上剛剛的直線在三角形底上交點所成兩線段所作之矩形。這個面積的寬度是截痕與直線的連線，在直徑上截取的從截痕頂點開始的一段，並超出一個圖形，這個圖形相似於，並且在位置上也相似一個矩形，為以包含直徑延長至軸三角形外之那個交點的直線與這個參量 (the parameter)（見附錄 2）所成的矩形。將這樣的截痕稱作雙曲線 (And let such a section be call an hyperbola)。




設有一圓錐，頂點為A，底為圓BC。令其被過軸的平面所截成的三角形為ABC [I. 3]。又圓錐被另一與底交於直線DE的平面所截，DE與線段BC垂直。設這樣在圓錐表面形成的截痕為DFE，其直徑為FG [I. 7 and def. 4]，延長FG與AC，交於圓錐頂點外一點H。直線AK為過A點平行直徑FG，交BC於K點。<u>從F作FG的垂直線FL，使得</u>

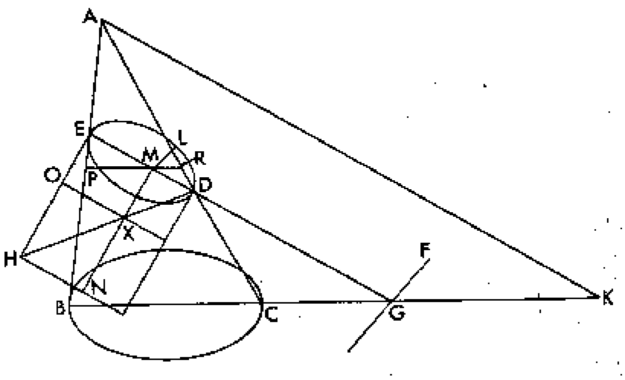
<u>正方形KA : 矩形BK, KC : : FH : FL</u>

在截線上任取點 M，過 M 作直線 MN 平行 DE。過 N 作直線 NOX 平行 FL，連接 HL，延長至 X，連直線 LO，XP 平行 FN。

我認為正方形 MN＝平行四邊行 FX，其正方形貼合 (applied to) 到 FL，以 FN 為寬度，並超過一個圖形 LX，相似於矩形 HF, FL。

**命題 13：**

如果一圓錐被過其軸的平面所截，同時又被另一平面所截，此平面一方面交軸三角形的兩邊，另一方面與底既不平行也不相反 (subcontrariwise)。又如果圓錐的底所在的平面，與此截平面交於垂直於軸三角形的底邊或其延長線的一直線，那麼從圓錐截痕上任一點作向此截痕的直徑，且平行於截平面與圓錐底所在之平面之交線的直線，其平方將等於某一面積，此面積貼合 (applied to) 到一直線上，此直線滿足這樣的比例：此截痕的直徑比上此直線，等於從圓錐頂點連到三角形底邊並平行直徑的直線上的正方形，比上這直線所截得的從三角形兩邊開始的線段所包含的矩形。這個面積的寬度是截痕與直徑的連線在直徑上所截取的從截線頂點開始的線段，並缺少一個圖形，這個圖形相似於，並且在位置上也相似一個矩形，為以直徑與這個參量 (the parameter)所成的矩形。將這樣的截痕稱作橢圓 (And let such a section be call an ellipse)。



設有一圓錐，頂點爲A，底爲圓BC。令其被過軸的平面所截成的三角形爲ABC。又圓錐被另一平面所截，此平面一方面與軸三角形交於兩邊，另一方面，延長後既不平行圓錐的底也不相反 (subcontrariwise)，DE爲此平面與軸三角形在圓錐表面的交點。截平面與圓錐的底所在之平面的交線爲FG，垂直線段BC，ED爲截痕的直徑 [I. 7 and Def. 4]。過E作直線EH垂直ED，過A作直線AK平行ED，滿足

正方形AK：矩形BK, KC : : DE：EH

在截線上任取點 L，過 L 作直線 LM 平行 **FG**。

我認爲正方形 LM 等於某一面積，其貼合 (applied to) 到 EH，以 EM 爲寬度，並缺乏一個圖形，相似於矩形 DE, EH。

## 參考文獻


Apollonius (1952). *Conics* (tr. R. C. Taliaferro), in G*reat Books of the Western World*, *Encyclopaedia Britannica*.

*The Philosophical Works of Descartes*, translated by E. S. Haldane and G. R. T. Ross (1968). London: Cambridge at The University Press.

Bunt, L. N. H. *et al* (1988). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Fauvel, J and J. Gray ed.( 1987). *The History of Mathematics: A Reader*. London: The Open University.

Fried, M. (2003). “The Use of Analogy in Book VII of Apollonius’ *Conica*”, *Science in Context* 16(3).

Katz, Victor. J., (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Grattan-Guinness, Ivor, (1997). *The Fontana History of the Mathematical Sciences*. London:HarperCollins College Publishers.

Lui, K.W. (2003). *Study of Conic Sections and Prime Numbers in China: Cultural Influence on The Development, Application and Transmission of Mathematical Ideas*, The University of Hong Kong.

Van Maanen, Jan A (1995). “Alluvial Deposits, Conic Sections, and Improper Glasses, or History of Mathematics Applied in the Classroom”, in F. Swetz *et al* eds., *Learn From The Masters!*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kline, M. (1983). 《數學史—數學思想的發展》，林炎全、洪萬生、楊康景松譯，台北：九章出版社。

李文林主編 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。

梁宗巨 (1995).《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

# 法國的數學天才–巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662)

游騰雁
國立蘭陽女中學生

## 一、生平事蹟

巴斯卡，如右圖所示，1623 年 6 月 19 日出身於法國克萊蒙費朗 (Clermont-Ferrand)，1662 年 8 月 19 日逝世於巴黎。他是一位法國數學家、物理學家及思想家。他的父親艾蒂安 (Etienne Pascal, 1588-1651) 也是一位數學家，並且是當時「梅森 (Mersenne) 學會」的成員，因此，對他的早期教育有很大的影響。可惜，他英年早逝，因爲嚴重的身體不適和常常無法入睡相當長的時間，巴斯卡不到三十九歲就去世了。

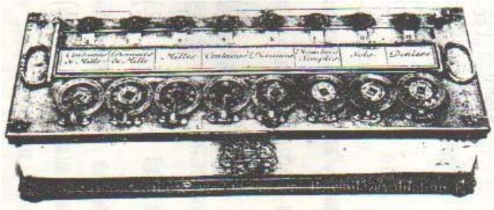
巴斯卡在十二歲時發現「三角形內角和為兩直角」；十三歲發現了「巴斯卡三角形」；十四歲列席於法國之皇家數理學會；十六歲發現了射影幾何學的一個基本原理「圓錐曲線裡的內接六邊形對邊的交點共線」；十七歲時完成了《圓錐曲線論》(*conic section*)；十九歲時發明了世界上最早的計算機；二十三歲時，他操作了著名的托里切利 (Torricelli Evangelista,1608-1647) 實驗，證明了空氣是有壓力。他不僅發現了水壓機原理，還奠定了流體靜力學的基礎理論。他與費瑪(Pierre de Fermat, 1601-1665) 並列爲機率論的建立者，而且數學歸納法是他最早發現其方法論之要義。更重要的是，巴斯卡非常接近發現微積分理論。德國數學家萊布尼茲(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) 後來寫道:「當他讀到巴斯卡的著作，使他像觸電一樣，突然領悟到了一些道理；後來才建立了微積分的理論。」

巴斯卡三歲的時候，母親就去世了，由在稅務局工作的父親教育他及他的姐姐和妹妹。父親是一個數學愛好者，常和一些懂數學的人交往，可是，他認爲數學對小孩子是有害且會傷腦筋，因此，孩子應該在十五、六歲時才學習數學。在這之前，學一些拉丁文或希臘文就行了，因此，在巴斯卡小時候，父親從來不教他學習數學，只是教他一些語文和歷史，而且，巴斯卡的身體也不太強壯，父親更不敢讓他接觸數學。巴斯卡在十二歲的時候，偶然看到父親在讀幾何書。他好奇的問幾何學是什麼？父親爲了不想讓他知道太多，只是大約講幾何研究的是圖形，如三角形、正方形和圓的性質，用處就是教人畫圖時能作出正確美觀的圖。父親很小心的把自己的數學書都收藏好，就怕被巴斯卡拿去翻看。可是巴斯卡卻產生興趣，他根據父親講的一些幾何簡單知識，自己獨立對幾何學研究。當他將發現「三角形內角和為兩直角」的結果告訴父親時，父親是驚喜交集，竟然哭了起來。父親於是搬出了歐幾里得 (Euclid) 的《幾何原本》(*The Elements*)，巴斯卡開始接觸到數學書籍。在十九歲時，他爲了減輕父親計算稅務的麻煩，發明了世界上最早的計算機，雖然只有加減的運算罷了。但是，他所用的設計原理，現在的計算機還是有用到，如下圖所示。

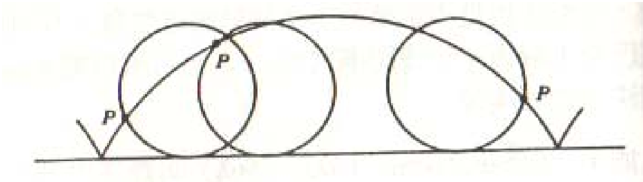
在西元 1654 年 11 月的一天，此時巴斯卡三十一歲，他在巴黎乘馬車發生意外，差一點掉進河裡，他受驚後覺得大難不死，一定有神庇護，於是決定放棄數學和科學，而去研究神學。只有在偶爾牙痛時才想些數學問題，用這個方去來忘記痛苦。後來他更極端，像苦行僧一樣，他把有尖刺的腰帶纏在腰上，如果他認爲有什麼不虔敬的想法從腦海出現，

就用肘打這腰帶來刺痛身體。

西元 1658 年，此時巴斯卡三十五歲，其中有一小段時間巴斯卡的思想回到數學上，從事有關旋輪線的討論。這是因爲有一晚由於牙痛使巴斯卡無法入睡，他便想著旋輪線的問題，以便忘掉痛苦。過一會兒，他發覺牙不痛了，猜想這表示上帝允許他繼續做下去，巴斯卡就瘋狂地工作了八天，解決了許多有關旋輪線的問題。惠更斯 (Christian Huygens,1629 - 1695) 也曾經證明，把旋輪線上下倒放，一顆珠子放在曲線上的任何地方，在重力影響下，都會在相同的時間內滑到最低點。



圖一 巴斯卡 1642 年發明的計算器




圖二 由圓的三個不同位置所決定的旋輪線上的點 P。

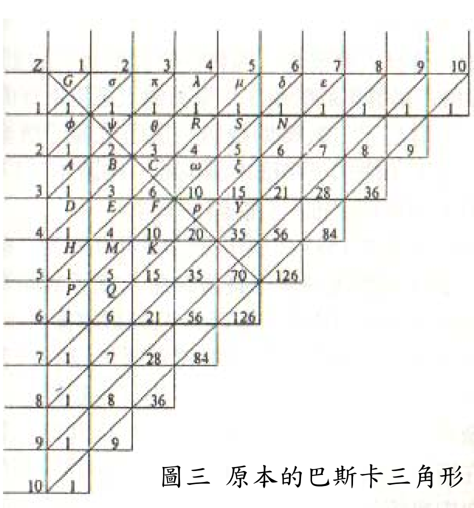
## 二、學術間的交流

在西元 1654 年是機率學論歷史的一個里程碑，此時巴斯卡三十一歲，這門科學由此開始，有一位法國貴族德梅爾 (Chevalier De Mere, 1607-1684) 困惑於賭博的某些問題，便向巴斯卡求救。巴斯卡寫信給當時的首席數學家費瑪，經由他們的書信往返，兩人共同討論之後產生的基本結果使這個題材得以建立。1654 年 7 月 29 日，巴斯卡寫信給費瑪：

> 如果有人用一個骰子擲出 6 點，擲 4 次是有利的，因為勝算是 $671(=6^4-5^4)$比 $625(=5^4)$。如果有人要用兩個骰子擲出雙六，只擲 24 次是不利的(因為 $36^{24}-35^{24}<35^{24}$)。……

## 三、數學成就

算術三角，又稱爲巴斯卡三角，爲一呈「三角形式」的數表，其第 n 列爲 $(x+y)^n$ 的二次展開式的逐項係數。在研究二項式係數性質時，寫成《論算術三角形》(*Traite du triangle arithmetique*)，後來收錄在他的全集，於 1665 年發表當中提出「巴斯卡三角形」。中國人早了六百年就發現了，南宋楊輝所寫的數學書裡面，就有介紹過由北宋賈憲所創造出來的相同三角形（中國稱之爲「賈憲三角」或「楊輝三角」)。另外，阿拉伯數學家，奧瑪 (Omar Khayyam, 1048-1131) 也曾處理過算術三角形。不過，他們都只



圖三 原本的巴斯卡三角形


圖四 1527 年最早印刷的巴斯卡三角形

用以解方程式，不像巴斯卡將它連結組合數上。因此，儘管巴斯卡不是算術三角形的原創者，但由於它是第一個有系統地研讀它的關係，因此，他的名字永遠地與此三角形聯繫著。1654 年他寄給費瑪的表格如下：

## 四、與高中數學的相關性

二項式定理，雖然牛頓 (Isaac Newton, 1643-1727) 並不是直接從巴斯卡三角推出二項式定理，而是間接的從積分的問題中引申出來的，但是將二項係數表示成

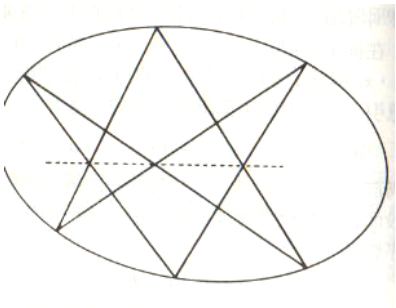
$$\binom{n}{a}=\frac{n!}{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}$$

這個簡單的公式，是藉助於巴斯卡三角，其中第 n 列的各項即$(1+x)^n$的二項展式中 x 的冪次的係數。

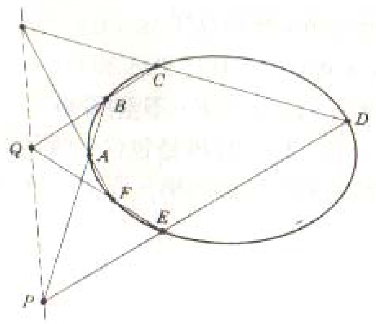
## 五、曾發表的學術作品

**1.《圓錐曲線論》(C*onic Section*)**

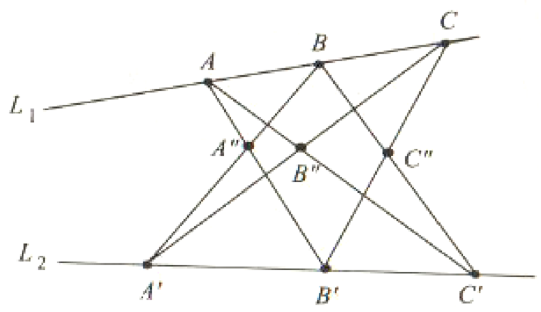
這是有關研究德沙格爾 (Girard Desargues, 1591-1661) 射影幾何 (Projective Geometry) 工作心得的論文，內容包括了巴斯卡六邊形定理。這項工作是自希臘阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 以來，對圓錐曲線論研究的最大進步，是在說明內接於一個二次曲線的六邊形的三雙對邊的交點共線。而帕布斯 (Pappus) 定理，即是巴斯卡定理的特例。



巴斯卡定理之一




巴斯卡定理之二




圖六 帕布斯定理：A" B" C"三點共線。

**2.** 另外的學術貢獻

在 1646 年，此時巴斯卡二十三歲，他製作了水銀氣壓計，於 1651 至 1654 年間，巴斯卡二十八到三十一歲，寫出液體平衡、空氣的重量和密度等論文。自 1654 年開始，他主力向幾何方面的數學問題加以研究，在無窮小的分析上，深入探討其不可分的原理，得出了求不同曲線所圍面積和重心的一般方法，並以微積分的原理解決擺線問題，於 1658 年，完成了《論擺線》(*Traite General de la Roulette*)。自 1655 年起，巴斯卡便隱居於修道院，並寫下《思想錄》(*Pensees*) 等經典著作。

## 六、心得

一開始，我會想深入瞭解巴斯卡這個天才的原因，是由於我對巴斯卡三角形非常有興趣，因此，我做了他的報告。而在做報告的過程之中，我瞭解到人的生命中，重要的不是它的長度，而是它的深度。巴斯卡的壽命雖短，只有三十九年的生命，但是，他的生活很精彩，可稱爲一位數學奇才，因爲他不需要花很多的時間，就可以完成一般人須花上一輩

子的時間，才可能完成的學術理論。他充分地利用了他的有生之年，他不僅豐富了他自己，也豐富了瞭解他的學術的人。

## 參考資料

林聰源 (2001).《數學史──近代篇》，新竹：凡異出版社。
九章出版社編輯部 (1992).《數學家傳奇》，台北：九章出版社。
http://www.mikekong.net/Maths/maths-frame.php
http://www.lib.cam.ac.uk/deptserv/rarebooks/PascalTraite/

# 苦學有成的中國數學巨匠—華羅庚（1910～1985）

郭哲君
國立蘭陽女中學生

## 一、生平概述

華羅庚，中國近代著名數學家，生於 1910 年 11 月 12 日，卒於 1985 年 6 月 12 日下午 4 時，享年七十五歲。出生於江蘇省金壇縣。十二歲畢業於金壇仁劬小學，進入金壇初中就讀。畢業後因家境困窘，無力升高中，只好考取中華職業學校，然而最後還是因無力籌措膳費而輟學，回家助其父經營小店。工作間，仍以僅有的一本《大代數》、一本《解析幾何》以及一本只有 50 頁的《微積分》自學數學，並將數學視爲一生追求和奮鬥的目標。

華羅庚在初中時遇見賞識其數學才能，進而用心引導、培養他的王維克（1900～1952）、李月波老師，因此奠定華羅庚的數學基礎。華羅庚十八歲時，王維克任金壇初中校長，請華羅庚當庶務員，華羅庚因此終於有機會專心做研究，不幸的是，華羅庚才剛踏入了數學的殿堂，卻染上傷寒病，病情嚴重。最後，雖是從死神的手掌中死裡逃生，但是左腿骨彎曲變形，落了個終生殘疾。病後華羅庚開始撰寫數學論文向雜誌社投稿，其成名作是 1930 年春，刊登在《科學》雜誌上的《蘇家駒之代數的五次方程式不能成立的理由》，因此一文章，他受到清華大學數學系主任熊慶來的賞識，受聘爲該系圖書館助理員。當時清華數學系人才濟濟，熊慶來（1893～1969）、楊武之（1896～1973）、孫光遠（1900～1979），外籍數學大師哈達瑪（Jacques Hadamard, 1865～1963）、溫納（Norbert Wiener, 1894～1964）等均對華氏投以青睞，並給以重要的指導與幫助。1933 年，清華破格聘其爲助教並教授微積分。1935 年，清華大學再次破格提拔華羅庚爲教員。1936 年，因熊慶來的推薦，華羅庚以訪問學者的身份赴劍橋大學研究。

在劍橋期間，華羅庚解決了「塔內問題」，被譽爲「華氏定理」。並已萌發了研究「華林－哥德巴赫問題」的藍圖，爲他往後的著作《堆疊素（質）數論》打下基礎。同時，華羅庚在研究方面亦已接近成熟階段，形成了自己的學術觀點，即「直接法」，就是儘量以簡單初等的方法處理數學問題。除此之外，不僅是學術研究的成果豐碩，他還留下一句發人省思的話：「我來劍橋大學是為了求學問，不是為了學位。」直到 1938 年日本侵略，華羅庚義憤填膺，毅然放棄繼續深造的機會返國，並受聘於清華、北大、南開合組的「國立西南聯合大學」，再度破格成爲教授。

聯大時期華羅庚展開艱苦卓絕的教學和研究工作，和陳省身（1911～2004）、許寶騄（1910～1970）被稱爲數學系「三傑」。從 1939 年到 1941 年，華羅庚在極端困難的條件下，寫了 20 多篇論文，並完成了他的第一部數學專著《堆壘數素論》，後來成爲數學經典名著。

1946 年 2 月至 5 月，華羅庚應邀赴蘇聯訪問；同年 9 月，和李政道（1926～）、朱光亞（1924～）等離開上海前往美國，先在普林斯頓高等研究所擔任訪問教授，後又被伊利

諾大學聘爲終身教授。1947 年華羅庚在美國治療了他的腿疾，手術十分成功。1950 年 3 月 16 日，華羅庚回國，擔任清華大學數學系主任，講授他的心得「典型群論」。接著，他受中國科學院院長郭沫若 (1892～1978）的邀請開始籌建數學研究所。1952 年 7 月，數學所成立，他擔任所長。他潛心爲新中國培養數學人才，王元（1930～）、陸啓鏗（1927～）、龔升（1950～）、陳景潤（1933～1996）、萬哲先（1927～）等在他的培養下成爲著名的數學家。

華羅庚及其學生（右數第一為陳景潤，第二為華羅庚）

1979 年 5 月，華羅庚到西歐作了七個月的訪問，以「下棋找高手，弄斧到班門」的心願，把自己的數學研究成果介紹給國際同行。1983 年 10 月，他應美國加州理工學院（California Institute of Technology）邀請，赴美作爲期一年的講學活動。在美期間，他赴義大利裏亞利特市出席第三世界科學院成立大會，並被選爲院士；1984 年 4 月，出席華盛頓美國科學院授予他外籍院士的儀式，成爲第一位獲此殊榮的中國人。

1985 年 6 月 3 日，他應日本亞洲文化交流協會邀請赴日本訪問。6 月 12 日下午 4 時，他在東京大學數理學部講演廳向日本數學界作講演，講題是《理論數學及其應用》。原規定演講四十五分鐘，華羅庚請求多將了十幾分鐘，最後總共講滿六十五分鐘，觀眾們報以熱烈的掌聲。後來，華羅庚說了一句：「謝謝大家。」並在暴風雨般的掌聲中坐了下來，他的朋友白鳥富美子（F.Shiratori）女士捧著鮮花上前致意。就在此時，華羅庚從椅子上滑了下來，嚇壞了所有觀眾，任憑現場教授醫師們如何急救，最後終是嚥下了氣，在生平最後一場演講結束後與世長辭。

## 二、數學在實際上的應用

1958 年，華羅庚被任命爲中國科技大學副校長兼應用數學系主任。在繼續從事數學理論研究的同時，他努力嘗試尋找一條數學和工農業實踐相結合的道路。經過一段實踐，他發現數學中的「統籌

華羅庚在農村訪問瞭解用統籌法科學安排種田獲得豐收的情況

法」(Critical path method, CPM)和「優選法」(Program evaluation and review Technique, PERT)是在工農業生產中能夠比較普遍應用的方法，可以提高工作效率，改變工作管理面貌。1964 年初，他寫信與毛澤東(1893～1976)，表達要走與工農相結合道路的決心。同年 3 月 18 日，他寫成了《統籌方法平話及補充》、《優選法平話及其補充》，並親自帶領中國科技大學師生到一些企業工廠推廣和應用「雙法」，爲工農業生產服務。取得了很大的經濟效益和社會效益。

**三、主要成就**

中國解析數論、矩陣幾何學、典型群、自安函數論等多方面研究的創始人和開拓者。在國際上以華氏命名的數學科研成果就有「華氏定理」、「懷依—華不等式」、「華氏不等式」、「普勞威爾—加當華定理」、「華氏運算元」、「華—王方法」等。經典名著《堆壘數素論》、《數論導引》、《指數和的估計及其在數論中的應用》、(與萬哲先合寫)、《典型群》、《從單位圓談起》、《數論在近似分析中的應用》(與王元合作)、《優選學》等十部。論文《蘇家駒之代數的五次方程式不能成立的理由》、《典型域上的多元複變函數論》等共兩百餘篇。

**四、華氏精神**

華羅庚的一切論述都貫穿一個總的精神，就是不斷拼搏，不斷奮進。他曾說過：「人言不到黃河心不死，我說我到黃河志更高。」、「聰明在於學習，天才在於積累。」、「在尋求真理的長征中，惟有學習，不斷地學習，勤奮地學習，有創造性地學習，才能越重山，跨峻嶺。」便是很好的寫照。而他不害怕暴露自己的弱點，反而渴望藉由將缺點袒露出來，能得到進步的機會，也可從：「觀棋不語非君子，互相幫助；落子有悔大丈夫，改正缺點。」這段話中看出。同時，他也注重獨立性、創造性的思考，就如同他所說的：「人做了書的奴隸，便把活人帶死了。……把書作為人的工具，則書本上的知識便活了。有了生命力了。」就這樣的學習觀點看來，有很多地方都值得後世學子們效法。

**五、總結**

華羅庚一生苦讀，努力拼搏求進步，此種精神實在令人敬佩。很顯然的，華羅庚證實了「成功是靠百分之九十九的努力與百分之一的天才所構成」這句話。從他在雜貨店裡不顧父親反對的學習，到他在劍橋時的那種理念，可以見到他的學習是靠點滴累進，而不是一步登天。這對像我這樣的平凡人產生了無比的激勵—「只要肯努力，就有機會成功」。雖然，就目前高中程度的數學而言，華氏數學是稍微艱澀難懂了一些，但是，除此之外，華羅庚本人的內在精神，也可以成爲目前的我們學習、模仿的對象。

## 參考資料

http://baike.baidu.com/
http://bk.baidu.com/view/6351.htm
http://tw.knowledge.yahoo.com/
王元 (1995).《華羅庚》，台北：九章出版社。

# 《中國數理天文學》後記

曲安京
中國西北大學數學與科學史研究中心

《中國數理天文學》(《數學與科學史叢書》之四)
曲安京著，北京：科學出版社，2008

這本書從動筆到交稿，寫了 8 年。

寫一本《中國數理天文學》的想法，是 1999 年在哈佛大學訪問期間萌生的。赴美之前，我接受了一項任務，負責《〈二十四史〉全譯》之《唐書曆志》的白話翻譯。按照要求，該書全部採取文字直譯，不允許圖解和注釋。翻譯的過程中，我即對傳播傳統文化的這種方式產生了疑問。在我看來，至少對於《曆志》部分，這樣的白話翻譯是沒有什麼意義的。

就中國歷史而言，曆法，是一門特殊的學問。她非常重要，但又很難接近。要想深入地一窺究竟，僅僅憑藉一個白話翻譯，是根本不可能的。可是，在浩瀚的學術出版物中搜檢一番，雖然曆法史的相關論著不少，但是，要想從一本書中，瞭解到歷代曆法中各種計算方法的數學模型與天文意義，居然還做不到。

既然如此，何不下點功夫，寫一本這樣的書呢？

由於中國古代曆法很多，比較完整地保存下來的，就超過了 30 部。要是一部一部地解讀，很難看出整個曆法思想的發展脈絡。因此，我打算根據中國傳統曆法的編制體例與結構，次第闡述各個曆法專案的主流演算法的構造原理與數學模型，並將某些曆法中不同於主流演算法的方法單獨列出，俾便比較。按照這個設想，如果讀者想瞭解歷史上任何一部曆法的計算方法的數學模型與天文意義，應該都可以從這本書中找到答案。

當時，我知道在傳統日食與行星演算法方面，還有一些極爲困難的問題沒有得到解決，而我自己對日食與行星理論卻知之甚少。因此，在哈佛的那一年，我花費了較多的時間盡可能地熟悉藪內清與陳美東等前輩學者在這些方面所取得的豐碩成果。2001 年初，我到日本訪問的時候，已經清楚地知道了科學史家在研究傳統日食與行星理論時所遺留下來的問題的核心困難之所在。

如所周知，唐代曆法家爲了消除月亮視差的影響，創立了影響深遠的日食三差理論，這個理論的核心是所謂的日食食差。藪內清曾經用現代天文方法，構造了日食食差的理論模型。但是，這個模型異常複雜，除了在個別點上可以對傳統演算法進行精度驗證之外，基本上無法說明她的天文意義。因此，對於現代科學史家來說，傳統日食理論的核心難題，就是搞清楚日食食差理論的天文意義。通過一系列數學變換，我證明了傳統演算法的數學模型與藪內清的理論模型是一致的，從而一舉解決了這個問題，爲從整體上揭示和把握傳統日食理論的思想方法，奠定了基礎。

大約在 2001 年 5 月，我已經大體上解決了傳統日食理論遺留下來的一些相關問題。然後，即著手行星理論的研究，這是我到日本訪問的主要目的。相較與中國古代曆法的其他內容，科學史家對於傳統行星理論的研究是很少的，可以稱得上深刻的工作，大約只有陳美東與劉金沂的相關論述，這些研究給了我很大的幫助。與哈佛相比，京都是靜謐的，這裏非常適合一個人慢慢地思考。經過幾個月的努力，終於構建了傳統外行星演算法的天文模型，據此可以清晰地勾勒出傳統行星理論的發展脈絡。

在日食與行星理論的障礙獲得突破之後，寫作便步入正軌。按照最初的設想，這本書將試圖搞清楚傳統曆法的所有計算方法。因此，隨著寫作的進程，便不斷湧現出一些新的

問題。我必須在克服了這些問題之後，才可以繼續前進。這大約是拖延了這麼多年才得以完稿的一個寫照。在計畫寫這本書的時候，我對中國傳統曆法的學習已經有 10 多年了，自以爲積累了比較多的相關知識，對前人的研究方法與成果也比較熟悉，似乎有能力承擔這個任務。雖然對面臨的困難有所準備，還是沒有想到要花費這樣長的時間。

回顧 20 多年的學術生涯，可謂一帆風順。因此，我始終抱持著一顆感恩的心，愉快地接受別人的幫助，並銘記在心。值此書稿即將付梓之際，需要感謝的師友是很多的，特別是我的眾多的中國同事與朋友。所謂君子之交，毋需聲張，因此，下面提到的名字，肯定是掛一漏萬。

李繼閔與李文林教授是我的兩位導師，多年來，他們以不同的方式，引導、扶持、提攜過我，他們做學問的方法和爲人處事的態度，都成爲我的榜樣。

何丙郁先生是一位樂於扶掖後進的謙謙長者，我第一次到海外訪學，就是在他的安排下成行的，那次經歷成爲我學術歷程的一個轉捩點。後來，在京都產業大學矢野道雄教授、英國劍橋李約瑟研究所 Christopher Cullen 所長的關照下，我得以再次比較長時間地利用國外的學術資源，專心致志地從事數理天文學史的研究。

陳美東教授、中山茂教授、大橋由紀夫博士、Jean-Claude Martzloff 博士、Owen Gingerich 教授、Benno van Dalen 博士，都是國際上知名的科學史家，與他們的學術討論，總是令我如沐春風，受益匪淺。

美國加州大學聖達戈分校的程貞一教授、法國科學院的 Karine Chemla 教授、新竹清華大學的黃一農教授、日本東京大學的小松彥三郎教授、德國耶拿大學的 Bernd Zimmermann 教授，不僅是學養深厚的專家，也是熱情好客的學術組織者，我曾經多次在他們的熱心安排下，到國際著名學府進行學術交流。

多年來，西北大學的校領導，以及「211 工程」辦公室與數學系的領導，共同營造了一個寬鬆、和諧的學術環境，在這裏工作，我感到非常舒心。

吳文俊先生的學術思想，對中國數學史的研究貢獻巨大。《數學與科學史叢書》出版不久，我即請求他擔任這套叢書的名譽主編，吳先生欣然允諾，並賜〈總序〉予以鼓勵。近兩年不時見到吳先生，他也數次提到希望這本小書早日問世。現在總算交稿，深恐辜負了他老人家的期望。

法國哲學家狄德羅曾經說過：我的雄心壯志就是用十句話說出別人一整本書說出的事情，別人用一整本書也說不清楚的事情。

作爲一位歷史學者，我沒有那樣大的野心。我只是希望用這樣一本書，說清楚一件事情：什麼是中國數理天文學？

## 編輯臺報告

本通訊於今年十月將屆滿十週年了－出版滿一百期！感謝各位作者無私的奉獻、每位讀者的支持與各駐校聯絡員的努力耕耘！

今年編輯部預計舉行一連串的慶祝活動，活動第一彈即是由建國中學數學科學科中心協助發行的通訊選輯《HPM 十年風華》，已於一月底完成。在陸續的活動中，我們需要對台灣目前的 HPM 研究作一彙整，因此需要各位駐校聯絡員或讀者將您在 HPM 研究上的相關著作目錄，寄給編輯部做彙整。請寄至 suhui_yu@yahoo.com.tw 即可。

在此先感謝各位駐校聯絡員及讀者的大力支持與配合，無限感激！

主編 蘇惠玉敬上