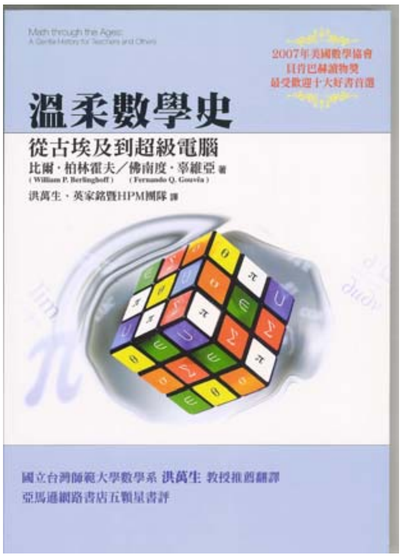
HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十一卷 第五期 目錄（2008年5月）

《溫柔數學史》譯跋

洪萬生
國立台灣師範大學數學系



英文原版書名：Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others

原作者：William P. Berlinhoff, Fernando Q. Gouvea

頁數：xii + 275 pp

出版年：2004

ISBN 0-88385-736-7

原出版社：A Joint Publication of Oxton House Publishers (at Farmington, ME) and The Mathematical Association of America (at Washington, DC)

中譯本書名：溫柔數學史：從古埃及到超級電腦

中譯者：洪萬生、英家銘、蘇惠玉、蘇俊鴻、林倉億、陳彥宏、郭慶章、陳啓文、葉吉海、洪誌陽、楊瓊茹

頁數：8＋310

出版社：博雅書屋

出版年：2008

ISBN 978-986-6614-00-2

《溫柔數學史》已經出版了！在本刊第七卷 (2004) 第五期中，我們曾以〈為教師而寫的溫柔數學史篇〉為題，撰文介紹本書的英文版，其內容值得引述如下：

・閱讀畢氏定理的歐氏證明（見《幾何原本》第一冊命題 47）。然後，針對此一論證，撰寫一個「溫柔的」說明，其難易層次適合中學生（9-12 年級）。

・常見的度量角之方法有兩種：度 (degree) 度量與弳 (radian) 度量。圓周率 π 在後者而非前者中扮演了重要角色。撰寫一篇短文比較並對照這兩種方法，其中包括何以 π 明顯地出現在其一，但在另一則否。

・為了以代數方法解方程式，我們需要運用很多抽象想法：一個代表未知數的符號、0（零）、負數，以及在方程式兩邊進行「補足運算」(compensating operations)。撰寫一篇文章，解釋「虛設法」(method(s) of false positions) 如何「如影隨形地需求」這些概念。請問如此一來，學生在學習與記憶如何解一次方程式時，究竟變得簡單一些或困難一些？

以上三則「申論題」，都出自 *Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others*，作者 Berlinghoff 與 Gouvea 將它們列爲「教案」(project) 書寫或設計的問題。無論 容易回答與否，這些題目連同本書的其他問題，都期待數學教師針對教材單元如「畢氏定理」、「角度量」與「一元一次方程式解法」等等，進行反思 (reflection) 或歷史面向的「後設認知」(meta-cognition)。事實上，本書被美國數學協會 (Mathematical Association of America, 簡稱 MAA) 納入他們所出版的『教室資源』(Classroom Resource Materials) 叢書，顯然就是爲中小學教師提供補充教材之用。

根據兩位作者的夫子自道，本書的構想來自他們兩人兩年前（美國緬因州）Colby 學院數學系走廊的閒聊，但是，更深刻的關懷，則是呼應他們對於數學史的一往情深，以及此一學門對於數學教學（無論是中小學或大學）的可能助益。然而，鑒於教師難以自行研發 HPM 相關教材，所以，他們遂決定撰寫本書，以便提供給教師垂手可得的「歷史素描」(historical sketch)，供他們自行採擷運用。

基於此，作者先描述數學史的一個簡要輪廓（篇幅共有 64 頁），其內容依序分別如下：「起源」、「希臘數學」、「印度數學」、「阿拉伯數學」、「中世紀歐洲」、「15 與 16 世紀」、「代數現身」、「微積分與應用數學」、「嚴密與專業主義」、「抽象、電算機與新應用」、以及「今日數學」。這樣的敘事順序，令人想起了 Carl Boyer 的 *A History of Mathematics* 與 Morris Kline 的 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*。只不過，由於作者志不在史學敘事，所以，相形之下內容就簡要多了。

儘管如此，本書的重心卻是 25 篇「歷史素描」，它們佔了全書總頁數 286 中的 180 頁（約 62%）。這些素描都是針對基礎數學中的普通理念而作，其中尤其著重在「一個理念、一個程序、一個單元等起源之闡釋，常常連結表面上相異的事物、但分享了共有的歷史根源。」爲此，作者的策略如下：

它們先是來一段簡略的數學史萬花筒，從最早期到現在！這對於形塑現代數學的人物與事件，提出一個輪廓式的架構，並且為那些分散、自足的素描，供應一個統一的脈絡。

這樣的處理當然反映了作者的主觀認知，然而，只要我們有機會瀏覽一下這 25 篇素描的內容，就可以理解作者處心積慮爲數學教學謀的苦心造詣了：1. 書寫（正）整數；2.（數學）符號來自何處；3. 0 的故事；4. 書寫分數；5. 負數； 6. 度量衡；7. π 的故事；8. 以符號書寫代數；9. 求解一次方程式；10. 二次方程式；11. 求解三次方程式；12. 畢氏定理；13. 費瑪最後定理；14. 歐幾里得平面幾何；15. 柏拉圖多面體；16. 座標幾何；17. 複數；18. 正弦與餘弦；19. 非歐幾何學；20. 射影幾何學； 21. 機率論的起點；22. 統計成爲一門科學；23. 電子計算機；24. 邏輯與布氏代數； 25. 無窮與集合論。

誠然，這些素描幾乎不涉及二十世紀數學知識重大發展面貌，主要指向中小數學教師應有的統整初等數學之能力或素養，而這當然是作者念茲在茲的教育關懷之所在了。事實上，爲了「服務」中小學數學教師，他還特別在這一本加強版中，爲每一篇素描補寫了問題與（教案）申論，鼓勵讀者延伸閱讀或設計教案，本文一開始索引的三則，只不過是其中一小部分而已。

這種書寫風格，也曾出現在前述 Carl Boyer 的 *A History of Mathematics* 與 Bunt 等人所寫的 *Historical Roots of Elementary Mathematics* 之中。由於前書比較像是一部數學史的教科書，因此，Boyer 在他的每章之後所設計的問題，就少了數學教育方面的關懷。對比之下，Bunt 等人的著作中的問題（幾乎每一節後都有佈置），內容就顯得多樣多了，也是除了數學史本身的問題之外，也納入了與數學教學有關的問題了。這樣看來，*Math through Ages* 一書應該是基於類似 Bunt 等人的考量吧，只是作者 Berlinghoff 與 Gouvea 似乎未曾察覺吧！

儘管如此，本書作者還是引述了多達 141 筆文獻，其中所涵蓋的範圍，除了古代數學文本、數學史的專業著述之外，還有 HPM 的論述以及數學科普作品。這些文獻雖然內容多元，訴求不一，但都充分發揮了數學知識的人文價值與意義，而這想必可以透過教師容易親近的「歷史素描」發揮一點啓蒙的效果吧。其實，本書第三部分的「延伸閱讀」(What to Read Next)，也針對書末的參考文獻或網頁甚至其他媒體資訊，提供了簡要的說明與推薦。無論如何，本書內容完全『貼近』第一線教師的主要考量，的確是我們 HPM 專業工作者應當努力效法的目標吧。（以上引文）

本書有機會以中譯本形式問世，五南文化事業的出版興趣相當關鍵。經過我們與主編黃秋萍小姐的積極聯繫，我們決定組一個團隊負責翻譯，並由英家銘擔任協調，大約是 2007 年 7 月開始動工，分工合作，於 2008 年 1 月完稿。在定稿之前，全文由英家銘與我作最後確認。

值此《HPM 通訊》即將邁入第一百期（2008 年 10 月）之際，本書中譯本之問世，實在相當令人興奮，因爲這是一本 HPM 味道十足的普及作品，可以爲 HPM 的發展，提供一

個重要的見證。事實上，本書在 2007 年 MAA 的十大暢銷書目中，名列第一，可見，它備受歡迎與矚目。儘管讀者對象比較著重在教師身上，然而，我們希望一般讀者也有機會閱讀這一部著作，一起來欣賞體會數學史如何可以溫柔才是！

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎭中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（家齊女中）劉天祥（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

微積分教學與極限單元的比重

蘇惠玉
台北市立西松高中

前言

數學教師在實際進行微積分的教學之前，作為微分與積分的先備知識之一，一定會先進行極限單元的教學。然而，在課程進行時間有限與學生學習成效的壓力下，極限單元的教學內容與份量，該如何掌握與拿捏，不只是課綱制訂者必須細心思量，教科書編撰者，或是實際進行教學的第一線教師們，也常因為本身所持的理念不同，而有不同的意見。在極限單元的教學時，到底應只針對微積分的教學需要，而講授必要的極限概念即可？或是將極限當成一個獨立的數學概念教學，將極限理論有系統、完整地，在有限的時間內讓學生盡量學習？各種說法見仁見智，以下，是筆者自己在進行完這個部分的教學時，對極限單元的比重所作的一點教學反思。

一、 微積分與極限的關係

微積分這一門學問，身為數學教師的都知道，主要在處理無窮的問題，可能是無限小的逼近，或是無窮大的分割問題，藉由微積分的課程，將高中數學從處理有限步驟的數學，提升到處理無窮的境界。然而，在高中課程中進行微積分的教學時，數學教師如果按照課程安排進行教學時，很容易會讓學生對整個課程架構與定義方式一頭霧水又抓不到頭緒，例如，為何一開始要進行數列與函數的極限？在學了許多極限的計算之後，導數的定義又為何要定義成$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$？微分除了在數學上單純的求切線斜率、讓我們瞭解函數的遞增、遞減以及求極值之外，又能實際解決什麼問題？為了讓學生對微積分這一數學分支有更全面性的瞭解，在課程的一開始，說明一下這門學科的起源問題，是有必要的。

在數學的發展上，隨著解析幾何的發明與函數觀念的採用，微積分技術的出現似乎已水到渠成，而當時十七世紀科學研究與應用的需求，更為微積分技術的產生增強了社會脈絡面向的因素。在當時，主要的問題有四個類型：

I. 求瞬間速度與瞬間加速度。

在當時運動物體所涉及的速度與加速度是隨時間而變化的，已不能像計算平均速度時一般以距離除以時間來計算。

II. 找曲線之切線與法線。

由於透鏡設計的需求，當時研究光學的科學家們，如費馬、笛卡兒、惠更斯與牛頓等人必須知道光射向透鏡的角度，才能引用折射定律，因此，必須求出曲面的法線，而法線垂直切線，也轉換成求切線問題。另外，同樣來自於運動學的研究，運動物體在任意瞬間的運動方向，就是運動軌跡在那一點的切線方向，這也促進了曲線的切線求法之研究。

III. 求函數的極大值與極小值。

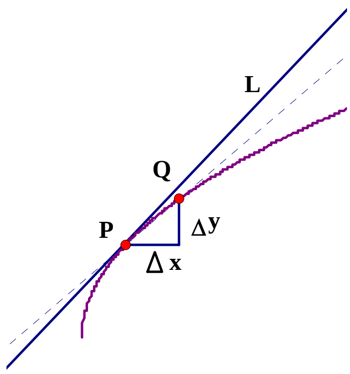
如在拋射運動中，求能得到砲彈最大射程的角度，以及拋射的最大高度。研究行星與太陽、地球之間的最大、最小距離。

IV. 求曲線的長度、曲線所圍的面積、曲面所圍的體積、物體的質量重心等。

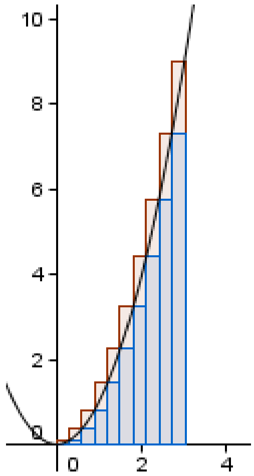
希臘人本來已有用逼近法求體積與面積，但方法缺乏一般性，又常無法得到正確的答案。在阿基米德的作品（拉丁文譯本）在歐洲廣為流傳時，計算體積、面積及質量重心的興趣又再度興起。

在前面的四個問題類型中，前面三個問題本質上都是一種變量的瞬間變化率，而第四個問題為前三個的逆問題。以求瞬間速度為例，當物體以變速運動時，每一瞬間此物體都有一個瞬時速度，若用平均速度的求法來看，此時移動距離是 0，所花的時間也是 0，而 $\frac{0}{0}$ 是無意義的。然而，時間與位移的變化都是連續的，我們可以讓此時的變量時間有一段微小的變化（即微小的時間間隔），藉此來討論運動體在這一點左右的平均速度的變化。當這個微小的增量極微小，或是說可以無限小時，位移與時間的變化率所逼近的數，即為所求的瞬時速度。

求切線問題也是如此。當我們要求過曲線上一點 P 的切線時，由於切線與曲線只有一個交點，並沒有辦法讓我們表達出這條切線橫座標與縱座標的變化（即斜率），因此，同樣必須先藉由橫座標的一個微小增量△x 與此時縱座標增量△y 的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$（即變化率）來表示割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 斜率，由於曲線是一個連續的變化，因此當△x 無限小時，變化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所逼近的數，即是切線的斜率。



然而，當你假設微小的增量然後順利求出變化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之後，又該怎麼讓這個微小的增量「消失」呢？此時，就必須藉由極限理論來幫我們解決這個問題了。在學習微分之前，學生必須瞭解函數如何求極限，尤其是有理函數形 $\frac{f(x)}{g(x)}$，當變數 x 在某一數 a 時，代入分子 f(x)與分母 g(x)都是 0 的那一種極限類型。因此，通常在課程的架構上，在進行導數的概念教學之前，必須先學習函數的極限，以及利用極限來定義何謂連續函數的概念。



微積分發展起源的第四個問題，在於求曲線形的面積或是體積之類。其實希臘人很早就有如何解決這一類問題的概念，即是利用直線形去進行分割。例如，阿基米德在求圓面積公式時，已經知道當我們作圓內接正多邊形或圓外切正多邊形時，可以一直作到讓正多邊形跟圓的差距可以任意小。因此，利用矩形來分割曲線下的面積，再求這些矩形面積和，然後來「逼近」曲線下的面積也是很自然的發展。然而，要分割到什麼程度？當然分割得越細越好，也就是我們可以將橫座標的區域部

分分成 n 等分，再讓 n 趨近於無窮大即可。因此，在進行定積分的教學之前，學生必須有無窮數列以及級數的極限概念，同時，也可以將此極限概念帶入函數概念的教學中。顯然，在微積分的課程架構中，先安排數列與函數的極限教學是一種合理的安排，只是數學教師必須把這種合理性先告知學生，如此一來，學生才能對數列與函數極限的學習賦予意義。

二、88 高中課程綱要中的極限單元

今年高三為最後一屆使用 88 課程綱要的年級，其中，微積分的課程放在數學甲下冊，課程內容及其備註如下：

一、極限的概念 1. 數列的極限 2. 函數的極限 3. 連續函數	 1. 以數線上的變動，直觀說明即可。 2. 多舉多項函數、有理函數為例，以圖形說明左、右極限。 3. 僅以圖形說明概念，含多項方程式的勘根定理。
二、極限的應用 1. 導數的基本概念 2. 多項函數的導數 3. 函數的遞增與遞減 4. 極值問題 5. 曲線下的面積	1. 介紹 $f'(x)$ 這個符號，但不介紹 $\dfrac{dy}{dx}$ 。 4. 一階導數判別。 5. 用極限來求，當作極限的應用，以一次函數、二次函數為例，不出現積分符號。

從這兩章的名稱「極限的概念」與「極限的應用」就可以看出，在這個課程綱要中，以極限為主軸來進行微積分的教學，所以，在第一章中數列與函數的極限佔了相當大的份量。但是，如果我們從有利於微積分的學習，減少學生學習的負擔，並讓學習時間做最有效的運用的角度來看，88 年課綱課程內容所涉及的部分，有些太過龐雜，且對目前現階段的學習而言沒有需要。以下，是筆者覺得有待商議的課程內容：

(1). 完備性公設與夾擠原理

在數列極限單元中，除了一些基本的、簡單的數列如等比數列之外，還有有理型（分式 $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ ，其中 f(n)與 g(n)為 n 的多項式或 n 的根式）。事實上，如果數列不是這些簡單的形式，要判斷數列收斂或發散，並不是一件容易的事，所以，此時教材會再提及實數完備性公設以及夾擠原理。有這兩個「工具」，確實在說明一個數列收斂時較為方便，如面積求和時會需要知道上和與下和收斂，並利用夾擠取極限求得曲線面積。但是，在課程進行中僅能以直觀用讓生瞭解，似乎也只需要一些簡單的例子即可，此時課本中「創造」出來讓學生「練習」這兩個工具的例子，似乎有點多餘與妨礙學習，以下為在一般教科書中常見的例子：

設一數列<a_n>，其中 $a_1=\sqrt{2}$ ， $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},\ n\in N$ ，則

(1) 試證<a_n>是遞增數列且有上界

(2) 求<a_n>的極限值

像這樣的例子，學習過了以後，是否要求學生在遇到一個不熟悉的數列時，都要能證明其有界以及遞增或遞減？這個似乎不是現階段的學習目標，對微積分的學習也沒有幫助。

再者，有關夾擠原理的部分，應該也是以直觀的簡單的例子，讓學生瞭解即可，然而，在課程中出現的一些例子同樣會造成學習目標的混淆，下面的例子同樣出現在教科書中：

(1) 試證 $n^2 \le 2^n$ 對所有大於 3 之自然數 n 均成立

(2) 試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$

事實上，就一個中等程度的學生而言，他/她學習過完備性公設與夾擠原理之後，在面對一個陌生的數列時，要他/她獨自去判斷利用哪一個工具去證明收斂，並且完成證明這件事，在現階段幾乎是不可能達成的。如果在高中教材中，「數列的極限」這個單元定位爲微積分學習的先備知識，只是幫助學生在微積分學習的一開始，容易瞭解其定義方式，以及利用定義求極限的方式而已，那麼，完備性公設與夾擠原理的練習，似乎就沒有其必要了。

(2). 函數的極限中無窮遠的極限與極限爲無窮大

以高中教學的目標以及學生的能力來說，函數的極限這個單元如果放在整個爲微積分教材的架構下，學生的學習目標應該在於幫助微積分定義的瞭解，以及可以利用定義方式得出導函數的公式。因此，某些不需要用到的極限理論的部分，似乎不該在此時出現，例如，在某教科書中提及的「極限中無窮遠的極限與極限爲無窮大」的部分。在此課本中，定義了 x 趨近於±∞的函數極限，並舉了個例子練習：

設 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x\in R$ ，求極限值 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 。

其實當 x 趨近於∞時，若 f(x)是多項式或根式以及這兩者的分式形式，在「數列的極限」單元中 n 趨近於∞，就已經充分練習過了，學生對此也不會有疑慮。就高中微積分的學習而言，這個部分是不需要且無意義的。同時，此課本也用重點框標示當 x 趨近於 a 時，函數 f(x)的極限值爲±∞的情形，並花了相當多的篇幅在解釋當 f(x)或 g(x)的極限爲±∞，f(x)g(x)的極限值是∞或-∞，並且還加上證明。這些部分的內容實際上是不需要的，且容易妨礙、混淆學生的學習。

(3).連續函數中三角函數的例子

在高中的微積分教材中，課程綱要的部分已經侷限在多項式函數，只提到多項式函數的微分，以及一次二次函數曲線下的面積，因此，在函數的極限與連續函數的單元中，其實不需要舉三角函數的例子，來增加學生的學習負擔，尤其是在「連續函數」的單元。此單元接在「函數的極限」之後似乎順理成章，同時，由於可微分的必要條件爲連續，因此，確實有需要以極限的方式來定義連續函數。但是，就三角函數而言，學生以圖形的直觀的方式，來瞭解三角函數爲連續函數，並沒有障礙與妨礙後面學習，因此，似乎不需要再以極限定義的方式，來證明三角函數爲連續函數，例如下列例題：

(1)用圖解法說明：不等式 $|\sin x|\le|x|$ 對一切實數 x 恆成立。

(2) 利用(1)式的結果證明 $\lim\limits_{x\to c}\sin x=\sin c$ ， $\lim\limits_{x\to c}\cos x=\cos c$ ，其中 c 是任意固定的數。

同時，似乎也不需要利用連續函數的性質，去找三角函數的極限值，此時不是太過直觀，

就是沒有必要，例如：

計算下列的函數值：(1) $\lim\limits_{x\to1}\sin(2x^2+3)\pi$　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\cos\dfrac{(x^2+x)\pi}{x^2-x-2}$ 。

最後，再從指定考科數甲曾經出現過的試題，來探討極限單元中的適切內容。雖然說以後出題的確實內容不可知，但是，我們可以從過去出現的一些試題，看出此單元在教學時應著重的部分。從 88 課綱實施之後，指定考科從 91 年到 96 年中，極限與微積分單元出現的試題數如下表：

年度	91	92	93	94	95	96
題數	2	2	3	1	2	3

其中有關極限的部分如下：

91 年：

設n爲正整數，座標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是(0, 2)，$(\frac{1}{n}, 0)$，$(-\frac{1}{n}, 0)$。假設此三角形的外接圓直徑長等於D_n，則$\lim\limits_{n\to\infty}D_n$ ＝？

92 年：

n是大於 1 的整數，座標平面上兩個橢圓區域$\dfrac{x^2}{n^2}+y^2\le1$與$x^2+\dfrac{y^2}{n^2}\le1$共同的部分以A_n表示。請選出正確的選項：
(1) A_n的面積小於 4　(2) A_n的面積大於 π　(3) A_n的面積大於 5　(4) 當n趨近於無窮大時，A_n的面積趨近於 4

93 年：

將 $\tan x = x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$ ＝？

94 年：

考慮雙曲線 $y^2-x^2=1$圖形的上半部，取此雙曲線上x坐標爲n的點與漸近線y=x的距離，記爲d_n，其中n爲正整數。則$\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot d_n)$ ＝？

95 年：

考慮多項式函數 $f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$ ，試問以下哪些選項是正確的？
(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{f(k+100)}=0$（k 爲正整數）　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$
(3) 函數 f 在區間$[\frac{1}{2}, 1]$遞增　(4) 若 x≧0，則 f(x) ≧0
(5) 在坐標平面上 y=f(x)的圖形與直線 y=3 恰有兩個交點。

96 年：

試問下列有關極限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$的敘述何者正確？
(1) 極限不存在　(2) 極限爲 0　(3) 極限爲 1　(4) 極限爲 5　(5) 極限爲-2

從這幾年的考題我們可以看出，出題著重在於極限的基本概念與基本求法，並沒有太繁瑣

的變化與計算，因此，就此單元與微積分的學習與教學的關係來看，88 課綱在課本的教材呈現上，似乎多出了許多不必要的部分。

三、95 暫行綱要課程中的極限單元

在 95 暫行綱要中，將微積分的課程放在選修 II 的課程中，此部分爲自由選修，不過，預計自然組的班級應該都會選這門課程，其課程內容與備註如下：

主題	主要內容	說明
一、多項式函數的極限與導數	1.函數及其圖形	1-1 複習一次函數與直線方程式。 1-2 複習二次函數與拋物線方程式。
	2.極限概念	2-1 引入 Δx 並以直觀說明極限的意義。
	3.割線與切線	3-1 引入 Δy 及 $\Delta y/\Delta x$ 討論函數割線的斜率，並說明在運動學上的意義。 3-2 以二次函數說明割線斜率的極限是切線的斜率。 3-3 複習拋物線的光學性質。
	4.導數與切線的斜率	4-1 定義導數及切線方程式。 4-2 說明導數在運動學上的意義。 4-3 以二項式定理或分解因式求極限得出多項式的導函數，並介紹導函數常用的符號。
二、導函數的應用	1.函數圖形的描繪	1-1 函數圖形的遞增、遞減和臨界點。 1-2 函數圖形的凹性和反曲點。
	2.函數的極值	2-1 函數極值的一階二階檢定。
	3.三次函數的圖形	3-1 含對三次多項式實根個數的瞭解。
	4.極值的應用	
三、多項式函數的積分	1.黎曼和與面積	1-1 直觀說明黎曼和對一再細分的分割所取的極限是面積。 1-2 在等分割時，對 $y = x^2$ 求出黎曼和的極限。

主題	主要內容	說明
	2.求多項式函數圖形與直線 $x=a$ ，$x=b$ ，和 $y=0$ 圍出的面積 3.定積分及其應用	2-1 介紹定積分符號，反導函數（反微分）符號。 3-1 以求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式爲主。
附錄一	微積分基本定理	
附錄二	以牛頓法求整數開平方根的近似值。	

說明：選修(II)課程是以多項式函數為主體，引導學生了解微積分學。

從選修 II 的綱要的主要內容與備註來看，已經將極限單元的份量大幅減少，此份綱要在微積分課程教學的重點，就直接擺在微分與積分上。但是，由於要說明微分與積分的概念與定義，極限的概念仍然不可少，但備註中說明僅以直觀處理。

由於目前 95 暫行綱要只實施到高二，因此，高三選修 II 的部分除了一個版本以外，各家出版社都還沒看到樣書，所以，各家出版社教科書執筆者對於綱要與備註的解釋到何種程度仍不得知，目前僅能就已經有樣書的這個版本來分析。有關數列的極限部分，由於高一在數列單元已有簡單的極限概念，因此，選修 II 不再重複，而在積分課程中會用到極限概念的地方，僅在求上和與下和的極限值有需要，但是，利用直觀或高一學過的概念就足以瞭解，因此，選修 II 中僅再針對函數的極限，以一節的份量來說明。而就此版本來看，函數極限的部分扣緊微分問題的來源，也就是瞬時速度與切線斜率來說明極限的概念，並以函數圖形的直觀性，來說明函數的極限以及函數的連續，例題的練習也僅止於多項式或是多項式的分式。確實這樣的份量與內容，就足以應付高中的微分教材的學習。

如果僅就高中學生學習微積分所需的先備知識來看，95 暫綱課程中的極限單元所處及的份量與內容，可以說剛剛好足以應付。就目前僅有的教材呈現來看，似乎著眼在減少學生學習負擔，不需要的就不用學。但是，在學生的學習過程中，會不會變得太過表面，僅像浮光掠影邊的點到爲止，學生在這麼短暫的學習過程中，並沒有賦予極限或是連續函數更深層的意義？不過，如果想要讓學生到大學時，再學習完整的極限概念，那麼，95 暫綱課程中的這樣的極限內容與份量，確實也就足已應付高中的微積分學習了。

文藝復興時期的通才--達文西

蘇意涵
國立蘭陽女子中學學生

一、生平簡介

李奧納多‧達‧文西 (Leonardo da Vinci, 1452-1519)出生於佛羅倫斯文西小鎮的安契阿諾 (Anchiano) 小村。為塞‧皮耶羅 (Ser Piero) 與一名農家女卡提瑞納 (Caterina) 短暫私通所生下的孩子，一名獨生子。達文西的父母最終沒有結婚，達文西家族甚至安排卡提瑞納嫁給另一個男人。出自家庭上的壓力與丈夫的堅持，卡提瑞納幾乎不能探望達文西，可悲的是他們仍舊生活於同一個村子，即使見了面也無法交談。而這也使得達文西憎恨自己的母親，這樣的童年造成他人格上的某些特質，包含他的性傾向以及對生育的厭惡。

雖然我們無法得知他在搬到佛羅倫斯與父親同住的確切日期，但可以確認達文西是在 1469 年進入維羅奇歐 (Verrocchio) 的工作坊學藝，開始了他的藝術生涯。當時的佛羅倫斯是由商人與貴族所掌控，而在這之中最顯要的便是麥第奇(Medici) 家族，這個家族在佛羅倫斯扮演了極重要的角色，贊助並扶持了當時許多重要的藝術家，使他們得以綻放光采。然而 1469 年繼位的洛倫佐‧麥第奇(Lorenzo Medici) 卻毫無重用達文西的意思，於是達文西在 1482 年離開此地前往米蘭定居。

在他尚未遷居米蘭，當時的佛羅倫斯有一項奇特的制度，允許市民將冤屈、牢騷寫在特別設計過的箱子上公佈出來，這些箱子被稱作「鼓」(tamburi)或「真理喉舌」(buchi della)，散佈於整個城市中。而在 1476 年初，達文西與另外三名年輕男子被指控侵犯一位名叫賈可布‧沙特瑞里 (Jacopo Salterdli) 的人，這顯然是因為政治因素而虛構出來的事件(當時被起訴的人中正好有和麥第奇家族相關的人士)，而達文西對此一無所知。雖然這場控訴意圖破壞麥第奇家族名譽的陰謀失敗了，但這卻對達文西造成了很大的影響，使得他後來對於他人的不信任。

來到米蘭後，達文西受到魯多維科 (Ludovico) 的重用，於早期擔任其宮廷畫師，後來又兼任了許多職務。其中除藝術方面亦涉及軍事與建築工程等等。在米蘭達文西擁有屬於自己的工作室，並收了不少學徒。1490 年夏，他收留了一名名為賈可牟 (Giacomeo) 的十歲男孩，不久後便暱稱他為「沙來」(Salai，「魔鬼」之意)。沙來在這段時間是達文西最親密的助手，達文西也花費了許多金錢在這個男孩身上，而這之中可看出達文西對於沙來的寵愛。然而於 1499 年法軍推翻魯多維科後不久，達文西便離開米蘭。

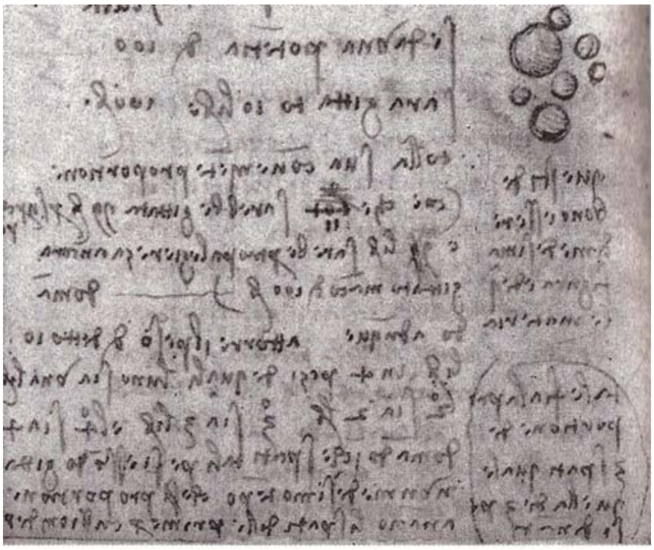
1500 年，達文西重新回返佛羅倫斯並於 1503 年著手繪製「蒙娜麗莎」。但於 1506 年接受法軍米蘭總督邀請重返米蘭，在他剛回到米蘭不久就與隆巴迪貴族之子法蘭契斯科‧梅爾茲 (Francesco Melzi) 變成形影不離的夥伴。1513 年夏，他決定再次搬家，這次的目

標是羅馬，是受教皇的哥哥洛倫佐・麥第奇的長子朱里安諾召喚至此。在達文西的札記中表示他認爲自己可能生病了，然而這極有可能只是他個人的痛苦或感傷，他的症狀顯示他在抵達羅馬後不久可能曾經中風。1516 年，他開始出發前往他生命中最後一個國家—法國。在這些年中他的身體快速老去，其中一隻手因關節炎而苦(或許是兩隻手)，這影響到他的繪畫與寫作，但卻沒有阻止他繼續工作，他在 1518 年末寫道：「我將繼續工作。」而此時梅爾茲顯然成爲達文西的助手與書記，後來梅爾茲更取代了沙來成爲達文西最親密的夥伴。1519 年 5 月 2 日，達文西逝世於克盧城堡，享年六十七歲。

二、科學成就

達文西在科學方面的成就爲數眾多，不論在解剖、軍事以及物理上均有留下可觀的紀錄。達文西在波動方面清楚了解光和聲音可能經由一種他描述爲「陣顫」(tremor) 的媒介所傳導，當附近媒介被干擾時，會從一處到另一處不斷重複釋放訊號。他描述了整個過程：

> 我認為若將兩個小石頭同時擲向一潭靜止湖水，會發現它們形成兩個相衝突的圓形，最後逐漸擴大、相互滲透並融合為一，但它們卻分別維持原先由石頭所造成的中心點。原因是雖然水似乎在移動，卻沒有離開原先位置，因為石頭破水而入所造成的張口很快就會闔攏了。水所造成快速擴張與結束所導致的撞擊，只能被稱為陣顫而非運動。為了了解我的意思，你可以觀察稻草的葉身，因為它輕如鴻毛，所以可以漂浮在水面上，不管水波如何因漩渦流轉，它也不會離開原先位置。因為和水的互動是陣顫而非運動，所以當水流相遇時，無法互相擊破，這也正是水的本質；它藉由陣顫來傳導，所以不會改變其位置。水雖然停留在原處，卻可以輕易將陣顫傳導到鄰近部份，反覆而行，直到力量逐漸減弱消失為止。



達文西描述波動與擲石入水的傳導記載

在光學方面，他亦有所紀錄，推翻了古代有關視覺是因微粒從眼中釋放出來的觀念，並進一步澄清光是需要從光源出發所進行的時間，所以寫道：

> 眼睛不可能因光線而反射出視力，當眼睛一睜開，(眼睛的)前方開始放射並抵達物體面前，這需要一些時間。當眼睛想要觀看物體時，無法進行得像太陽般快速。眼睛一看見太陽，就必須追尋並永遠維持眼中到太陽間的不間斷線條，並在太陽與眼睛間形成如金字塔的底座與頂峰的形狀。如果真是如此，視覺會包括上百萬的世界，這將不夠在反射中使用；如果光穿行空氣如香味一般，風可能會將其曲折並把它帶到其他地方。事實上，我們看見巨大太陽和一厄爾(ell，一種測量單位)之距物體的速度一樣，

而視力也不會被風吹走會被其他物體所阻礙。

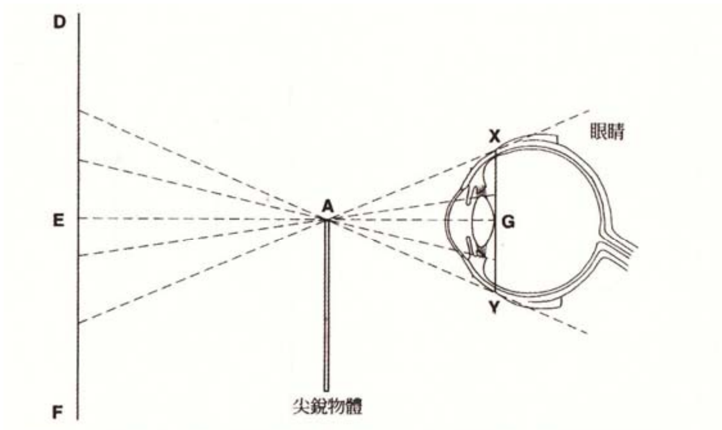
至於天空呈現藍色的原因是在解釋光學原則時的一大問題。1871 年，瑞利爵士(Lord Rayleigh)找到解決之道，他了解這是因爲陽光被空氣中分子所散射；而達文西在三百年前早已經得到這個結論。在他的《萊切斯特手稿》(*Codex Leicester*)中寫道：

我認為大氣中的藍色並非其顏色，而是因熱水氣蒸發成最小、無法看見的微粒，太陽光線將其吸引並造成亮光，並出現在環繞火的深處與黑暗區域。

這些光學上的發現，代表達文西在科學方面最佳的成就，也得以和其解剖上的發現抗衡。在關於瞳孔、透視方面，達文西相信瞳孔每部份都可以看到外界物體的影像，因此寫道:「瞳孔每一部份都具有『視覺影像』(virtue visiv)。」一反中古世紀時人所認爲，光只是進入接受區的表面後被「一般感官區」所詮釋。他一共進行三個不同的實驗以證明自己的論點。

第一，首先示範整個瞳孔都可以接受到影像；先拿一根針靠近一隻眼睛，並觀察遠方的一個物體，他發現:「眼睛前的東西看起來會較小，這個東西也不會干擾眼中遠距離的物體，雖然這個東西非常緊密，效果卻跟透明物體沒兩樣。」換言之，在遠距離物體上，光線並不會被針所阻擋，而眼睛也會從四面八方接受刺激，並且建立遠距離物體的圖像。

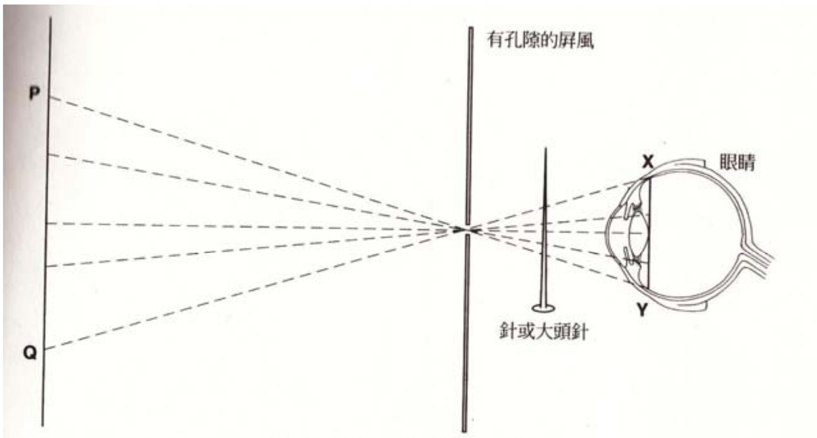
在第二項實驗中則說:「眼睛無法捕捉物體的邊緣。」他拿一個物體靠近眼睛視覺線邊緣。達文西相信在 A 點頂端無法被眼睛適當的詮釋，因爲眼睛的接收表面 (XY) 會感受到邊緣不同的背景(視覺背景區域不同的點，如 D 和 F)。相反的，眼睛將會沿著視覺中間線 (GE) 製造出清楚的影像。



達文西一系列實驗中的第二項，示範「眼睛無法捕捉物體邊緣」。

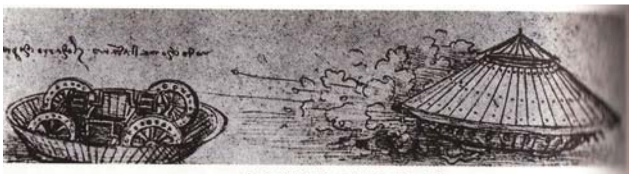
第三個實驗中則將一張有著小洞的卡片放在眼前約六吋的地方。接著又利用細瘦物體如大頭針或一根針，介於眼睛和卡片之間，平行的將卡片上下移動，而針只可以輕靠著眼皮。他發現這根針看起來就像是朝反方面運動，而且看起來就像是在卡片的後面移動。這個效果是因爲光線穿越窄小的孔隙，因使變得上下顛倒。他在 1490 年帶利用這個原理製造針孔相機。最後的這個實驗確定整個眼睛內部表面 (途中的 X 和 Y) 是用來接受外在世界刺激；當針向下移動時，就會在前方視覺背景區一連串較高部份 P 和 Q 呈現，觀察這個

背景時需要眼睛整個接受表面。

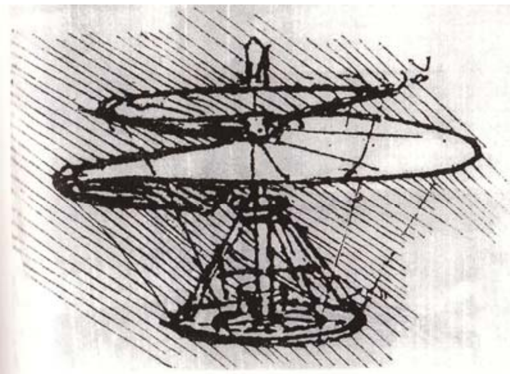


達文西視覺研究的第三個實驗。

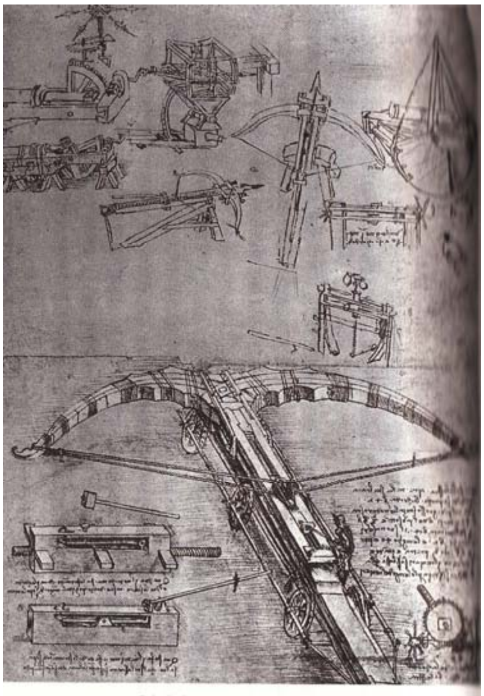
除此之外達文西還是個成功的軍事工程師，在米蘭宮廷中的設計成就包括降落傘、機械化汽車、灌溉系統以及挖掘機器。以下是他所繪製的軍事機械圖：



達文西的鐮刀車與「坦克」



達文西的「直昇機」



軍事機械工程——十字弓和投石器的草圖

三、心得感想

能夠有這個機會簡介達文西的生平以及科學層面的成就，讓我感到愉悅。當初在選擇撰寫的對象時，第一個浮現腦海的便是達文西了。雖然這之中有過掙扎，畢竟網路上的資

源始終不夠完整，書籍方面則偏向於其藝術方面的成就，很擔心是否能取得自己所要的材料，但顯然這些擔心是多餘的，這份報告撰寫過程整體而言是相當順利的。

我之所以選擇達文西，不單源於他的天賦與多方面向的學問，更多來自想解開一直以來的矛盾。幾乎是所有人都知道達文西這位通才，我們可以說對他是相當熟悉的。但就另一層意義看來，我們幾乎對他一無所知。當談論達文西時，每個人都理所當然地聯想到「蒙娜麗莎」與「最後的晚餐」，絕大多數是關於他的藝術作品。然而，我們卻不了解他的生平故事，不了解他的科學才華，他在許多方面的成就近乎被遮蔽，顯然這造成了我們對他的不了解。

透過這次的閱讀與資料整理，對於達文西也有比以往更深入的了解，希望藉由這份報告也能帶給大家一個不一樣的達文西。

參考資料

Michael White，《達文西：科學第一人》，台北:貓頭鷹出版社，2000 年。

http://www.ling.fju.edu.tw/biolinguistic/data/people/leonardo.htm

http://www.csps.kh.edu.tw/sp5/5st/5e2/e2da2.htm

MAA 2007 年十大暢銷書排名

1. *Math through the Ages*（中譯本《溫柔數學史》）by William Berlinghoff and Fernando Gouvea, 2004.
2. *First Steps fro Math Olympians* by J. Douglas Faires, 2006.
3. *The Genius of Euler* by William Dunham, 2007.
4. *The Early Mathematics of Leonhard Euler* by C. Edward Sandifer, 2006.
5. *Euler the Master of Us All* by William Dunham, 1999.
6. *Geometry Revisited* by H. S. Coxeter and S. L. Greitzer, 1993.
7. *Game Theory and Strategy* by Philip D. Staffin, Jr., 1993.
8. *Math Made Visual* by Claudi Alsina and Roger Nelson, 2006.
9. *The Mathematics of Games and Gambling* by Edward Packel, 2006.
10. *A Radical Approach to Real Analysis* by David Bressoud, 2006.

在這十本當中，有三本與去年 (2007) 歐拉誕生 300 週年有關，其中曾撰寫《天才之旅》(*Journey through Genius*) 的 William Dunham 就寫了兩本。此外，與博奕理論、幾何視覺有關的著作分別有兩本，再有，就是數學奧林匹亞，以及實變分析各一本。從這十大暢銷書的書目中，我們可以發現《溫柔數學史》最受矚目，而其主顧無疑是中小學數學教師或數學系學生。