

# HPM 通訊

第十一卷 第六期 目錄 (2008年6月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）  
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 專訪：洪萬生老師
- HPM 介入的數學史著述
- 丟番圖的故事
- 書評：《用直覺了解數學》
- 《數學訓練營》(The Phantom X)書評

## 專訪：洪萬生老師

洪士薰

唐書志

台南市台南女中

台北市百齡高中

編者案：本文原收入洪萬生，《孔子與數學：一個人文的懷想》，台北：明文書局，1991。  
 今特重刊於此，以饗讀者。

生：老師曾經提過「數學教育」中，「數學的有趣」比「數學的美」更重要，為什麼？

師：什麼叫美？數學的美是什麼？

生：一般人總是認為數學是結構完整，經得起邏輯的分析。

師：數學的美是從結構的觀點來講，基本上是建立在跟數理論有關的幾個特色上。比如，從數學公設的角度來看，「內在的一致性」（本身沒有矛盾）「完備性」（基於幾個很簡單的假說，就能推演出很豐富的理論系統），數學家認為這個很美。或是有某個定理證明技巧非常深刻，而且你發現這個定理連繫了好幾個不同層面的定理，於是，你們會覺得這個定理非常美。但問題是，假定你教的不是一個準備要當數學家的人，數學學習能力比較弱，那麼，強調「邏輯的一致性」或「理論結構的完整性」，或許就沒有意義了。這裡面牽扯到認知結構的問題：「在學習新知識的時候，必須隨時照顧到它的意義。」我一直強調數學的「意義」很重要，這個意義在不同的脈絡中，應做不同的解釋。比如說，對一些人而言，數學也許很有用，「有用」對他來講是很重要的意義，所以，教師必須強調這個數學理論是有用的。如果你教的東西一點用處都沒有、或者你不能說明用處，那學生當然覺得數學一點意義也沒有。我們在數學史上看到太多的例子，說明了數學理的被接受與否，不在邏輯上沒有問題，而是究竟有沒有用。這些數學史上的結論可以給我們很多啟發：數學理論不是講得很漂亮、很完整、傾囊相授，你的學生就會感激你，把它講得很有趣才是最重要的。所以，強調數學有趣、很有用，恐怕是數學教學裡面最重要的部分。有趣當然跟美有關係，但也不盡然，數學理論本身的有趣，是因為數學理論本身有抽象性，在這種情況下，可以滿足吾人在抽象層次上的思考。可是，我們也不要忘掉這些思考最後的目的，是要提供原來的問

題一些解決的方案。尤其在中等學校教書，這更是重要，這個抽象理論是怎麼導引出來的，然後在抽象層面上做理論研究後，希望在回到原來問題時，能對問題的解決有幫助。也就是說，我們不能單純地把理論數學和應用數學作個截然的劃分，數學應該是一個整體。從一個教數學的眼光來講，數學只有好數學跟不好的數學，而不應該說應用數學就比較差。從整個數學史來看，或許搞應用數學的人地位比較低微，搞理論數學的人地位比較崇高，我們當年唸數學的時候，也多多少少會有這種偏見，其實這是錯誤的。

生：那什麼叫做好，什麼叫做不好？

師：不好的意思，就是說它本身沒有發展性，跟其他的數學理論之間沒有關係；或者說，理論本身非常瑣碎，也就是說「一個問題一個解法」，像補習班老師教的每個解法都是妙招，而這些妙招之間有沒有關係呢？如果有關係，能不能用一個理論將它們串連起來？誠然，數學還是要學技巧的，但問題是把技巧教完而不教理論，這是很糟糕的事。教學應該要針對個別差異因材施教。但現在中學教育制度，不給予教師有任何彈性，爲了處理個別差異，動不動就統一考試。教師對學生的教學，應該有全部的自主權，在這種情況下，一個教師能發揮的空間其實很大。可是，由於整個教育環境品質的惡化，使得有理想的教師，根本沒有發揮的空間。還有一個問題，就是教師授課時數太長。現在一個國中老師一星期要教 18-20 小時，每班學生人數五十個，這對老師來講是很大的負擔，光認識這些學生就認識不完，更遑論處理學生的個別差異了。

生：老師可不可以談談求學過程。

師：我一九六七年進師大，可是我到高三才決定要把數學系的志願填上去。

生：爲什麼？

師：我小時候文史傾向很強，可是唸建中時，學校社會組只有三班，醫科三班，其他全是甲組。而且家庭環境也不允許我唸自己想唸的東西，加上文史傾向又壓抑得厲害，所以，有一些東西我都沒有好好唸，後來能考上台師大數學系實在教我十分驚喜。由於我們那幾屆的學生都在搞新數學 (SMSG)，進師大後爲了追求時髦，就找了很多數學邏輯的書來看。其實，上大學後我看的書很雜，文史的書尤其多，如余光中的散文、詩、殷海光的著作以及存在主義的書等等。除了以上這些外，何秀煌的著、譯作，對我的影響也很深。如他的《現代社會與現代人》、《0 與 1 之間》、《邏輯》和《科學的哲學》。因爲沒有人指導，一切都得靠自己。尤其何秀煌翻譯的文字頗爲晦澀——但爲了求精確，他不得不如此。那時候，對有些東西的印象十分模糊，一直到唸研究所，甚至到美國留學有機會正式修這些課的時候，才豁然開朗。我當時之所以無法讀懂這些書，是因爲我不了解它們的發展。卡爾·巴柏爾講過一句話：「一本書之所以讀不懂，是因爲你不曉得它的目的在哪裡。」那時候我還訂了幾年的《純文學》、《現代文學季刊》，自己也寫些東西。我喜歡和同學討論數學知識的本質，對數學基本結構的思考也非常有興趣，因爲沒有人指導，也不知道思考的方向對不對，到了圖書館去就胡亂看，很多東西根本看不懂，其原因在於：第一、文字本身是一個障礙，第二、本身數學的成熟度還不夠，自己的數學知識就這麼一點點，怎麼可能懂得它的本質是什麼？

生：老師在求學過程中有沒有比較深刻的經驗體會？

師：大一、大二時每天都在想什麼叫 Geometry 因為 A. Cayley 講過一句話：「射影幾何是一切幾何學的基礎，所有幾何學都可以看作是射影幾何學的一個分支。」那時，我始終不了解射影幾何的意義，因為射影幾何一開始的公設都違反常識。直到大三下，林義雄老師回師大兼課，自從修他開的課後，我才有機會開始整理以前胡思亂想的東西。開始知道「分析」這門課（尤其像賦範向量空間）究竟在幹什麼。後來，就請林老師開書單，自己再找一些書來看。因為對幾何學一直很有興趣，所以，就特別找了一本林老師介紹的書—O'Neill 作的 *Elementary Differential Geometry*。那本書的習題我並沒有很認真做，所以，有一些協變微分及張量微分有關的東西，一直沒有下很深的功夫。但那本書有個好處，它在每一章的後面有個 Summary，我將 Summary 讀得滾瓜爛熟，讀完了那本書才真正懂得什麼叫微分幾何，什麼叫幾何。（雖然我微分幾何曾被當掉，而當掉的原因是不懂 first fundamental form 和 second fundamental form 有什麼不同）這本書說：「第一基本式決定幾何學的內在性質，我們叫它內稟幾何，第二基本式是決定它在三度空間中的形狀，但形狀不能決定它的尺度，尺度是由曲面的內在性質所決定。」我就是爲了這句話被當掉，因為怎麼想都想不通，再往下讀，更是興味索然。直到把 O'Neil 的那本書讀完後，才真的是豁然開朗，這是我上大學後比較難忘的經驗。後來一些基本訓練是上研究所後逼出來的，我利用碩士資格考試的那段時間把 Apostol 的高微澈底唸了一遍，這對我來講是很重要的機會。經過這些訓練後，我要求自己對數學要有全面性的看法，數學有很多科目雖然不一樣，但它們基本的結構和精神是相通的。當你在一門學問上有較多心得時，就比較容易觸類旁通。這樣的體會跟我後來走上數學史研究極有關係，在大二的時候，我就對數學史非常有興趣。因為一直想去了解數學知識的發展究竟是怎麼一回事。好早以前就知道一本數學史的書，作者是 Carl Boyer，這本數學史寫得很好。大二時我沒有辦法讀這本書，一方面是偷懶，另一方面也是沒人指導。直到進了研究所後，多看了一些書以後，數學的想法才比較成熟。大概到美國正式接受數學史的專業訓練之前，我所經歷的就是這些了。

生：老師那時間好像打過筆戰？

師：那時候有一個國文系的僑生寫文章罵何秀煌，因為何認爲整個國家根本不重視人才，所以，人才外流的情形很嚴重，國文系那個同學把何秀煌罵了一頓。我因爲那時很崇拜何秀煌，就寫了一篇文章修理回去，這是唯一的一篇，此外，在《師大青年》上我也常寫一些文章，而在寫文章時才開始自己消化，對一些早期唸的東西，也比較有概念了。

生：老師會不會覺得現在的學生沒有以前用功？

師：這樣說是不公平的。不過，我覺得我那時候求知是抱著一種飢渴的心，我每天花很多時間在書店裡面，很渴望得到新的知識。我不曉得現在你們這樣，大概書太多不好下手。我覺得很多學問都應該去了解一下，不管懂不懂。

生：其實有蠻多同學也想唸書，只是不曉得怎麼找老師指導？

師：有一個方法是自己摸索，到了問題比較明確再找老師討論，一個好的教育環境，就是

讓人不要走冤枉路而得到最好的訓練。舉例來說吧，我的科學史指導教授 Joseph W. Dauben 在大學雙修數學和英國文學，但是，研究所到哈佛唸科學史。在進哈佛之前，他對科學史一片空白，但是，在哈佛的最好環境訓練之下，五年後他脫胎換骨。我想我們的努力方向，就是要努力經營一個「讓每個人可以最有效學到想學的東西」的環境。我給同學的建議是，系裡面好的老師很多，同學主動一點，不管什麼問題，老師不會隨便拒絕的。尤其同學要出去當老師，不只是照本宣科，還要針對學生個別差異，解決學生問題，這些都是我們該去接觸的。

生：這樣說來，系上幫助我們摸索中學教育的課是不是太少？

師：整個來講，我覺得可以開一些跟數學史、數學哲學，以及學習心理學有關的課，這樣對數學的觀念會有一個比較全面的了解。我覺得對不想當數學家的人來說，大三、大四可以做一些改變，怎麼活用大一、大二的東西，或是做轉行的準備。當然教書很值得投入，但轉行也沒什麼不好。我們也應該學一些其他的東西。我在美國唸研究所時有主修、副修，（數學史、科學史是主修，數學哲學和科學哲學是副修。）副修不是隨便修的，它要當成博士資格考的一部分。所以，就這個角度來看，大三、大四可找另一門來修。師大要搞出一個自己的方向來，可以往這個方向做漸進的改變。其實大一、大二好好唸，當數學家也不難，高微、複變好好唸，重要的題目和理論都做過、學過，保證你分析呱呱叫。尤其代數、高等代數多唸一點，上研究所直接唸博士班都沒有問題。重要的是那門課的深度，而不是修了很多課。要當數學家，大一、大二好好唸，絕對足夠。

生：教書時遇到很排斥數學或認知發展較慢的學生怎麼辦呢？

師：可以先進行補救教學，從最簡單的東西談起。能救多少算多少，正課還是要照進度，不能老是教小學算術，尤其有些只是學習習慣不好，搞到後來很多知識無法接受。在這種情況下，要告訴他「任何的數學，都是來自於日常生活」。

生：這種想法是出去再接觸還是在大學裡就要注意？

師：在大學裡可以看到相關的書，一個好的數學老師應該是常識很豐富。基本理論當然要會，但是若常識豐富，教學時要講什麼都可以，所以，大學教育的目標到底是培養還是通才？我覺得一個中學老師常識豐富絕頂重要，中學數學算什麼，只要修過高微，即使被當掉也可以教。常識包括你對數學的方法、精神及本質的了解。數學知識的本質是什麼？和科學知識的本質有什麼不同？會不會有變化？和歷史有沒有關連？過去人們和現代人的認知方式有沒有相通之處？所有這些東西都必須廣泛閱讀之後才能發現。當一個「有趣」的教師不太容易，有時候，你對學生的啟發就是幾句閒話而已。

生：有一些老師曾說：「國中生不學數學也不會死掉」。

師：對！

生：那我們努力的方向應是使學生對知識有興趣，而不是硬塞給他們，可是現在似乎相反。

師：這是教育環境惡化的結果。不給老師自主權，這種事是無法避免的。另一方面，老師也要尊重自己的專業知識，在教學時發揮成效，人家就不得不尊重你了。

生：可是要尊重，要先在面對數學有充分的信心，其實我們也不很懂。也許爲了掩飾，而

故意教得很沒有破綻。

師：其實重點在於第一，啟發學生的好奇心，第二，建立他們尊重專業知識的心態。說到這裡，其實就扯到大學裡的人文精神：對所有的知識尊重，而好奇心可以得到充分滿足，相信對宇宙之間的各種共通性。況且一個大學生是社會的棟樑，所以，必須受到相當的通才訓練。一畢業能擔當重任的機會太少了，也許在公司職員的角色中，你貢獻你的專才能力，但是，有更多的時候你在扮演公民的角色。所以，大家都受過通才訓練，我們的社會才會愈來愈進步。反之，若有太多人在某領域上是專家，而其他方面是個白痴，那是很可悲的。尤其你們，也許習題做很多，很會考試，但是連一般的數學常識都沒有，變成很笨拙的教師，甚至和別人相處都有問題。其實，如果您進入中學教書，沒教好別人反而被帶壞，不但沒有把惡劣的環變得好一點，還被人家拖著鼻子走，那大學教育就沒有意義了！事實上，通才教育不用牽扯很???，可以只和數學拉上關係就可以了。

生：可是我們的通識都是人文的！

師：所以，這是個很可笑的事。我開的「數學和人文」你們不能選。系上有可能的話，我想開一些科學史，科學哲學的課。受一點哲學訓練腦筋會更清楚。尤其唸書的時候，有些矛盾或隱晦不明的話，你很容易就看出來，所以我很鼓勵你們去學一點科學哲學。

生：謝謝老師接受訪問。

師：不客氣。哪裡。

## Information

CERME 6 is the Sixth Conference organised by the European Society for Research in Mathematics Education. It is designed to foster a critical and communicative atmosphere. Hence, it deliberately moves away from oral presentations towards collaborative group work. Papers are available in the website before the conference in order to be read by all those participating in a WG (Working Group). CERME 6 gathers 15 thematic groups whose members work together in a common research area. Each participant must choose one of these WG's and participate in its work during the whole meeting.

**January 27 - February 1, 2009**

*CERME 6*

European Society for Research in mathematics Education

University Lyon 1, **France**

<http://ermeweb.free.fr/>

*Group 15: Theory and research on the role of history in Mathematics Education*

Chair: Fulvia Furinghetti (Italy)

[Call for papers](#)

## HPM 介入的數學史著述

洪萬生

台灣師範大學數學系

這幾年來，HPM 的學術活動，顯然在數學家社群激起了不少的漣漪，因此，不少數學家積極介入 HPM，較之數學教育專業學者，可以說是有過之而無不及！譬如，本刊上一期介紹《溫柔數學史》，就是提供一個範例，與更多的讀者（尤其是中小學數學教師）共勉與分享！

《溫柔數學史》的特色之一，是它與一般的數學史著述不同，此一區隔確實容易凸顯後者的不夠平易近人 (accessible)。不過，數學史的專門著作（尤其是專業數學史家的論述）的確有必要劃清邊界，以免讓「稗官野史」魚目混珠。

儘管如此，一旦數學史著述涉及 HPM 關懷，那麼，作者的體例與風格就很可能大異其趣了。眼前就有一個例子：Israel Kleiner 的 *A History of Abstract Algebra*。

Kleiner 教授任教於加拿大 York 大學數學與統計學系，他在本書自序中，開宗明義就說本書書寫之目的，在於「給出抽象代數的許多基本概念、結果和理論之說明。而這一說明將會裨益相干課程的教師、他們的學生，乃至於廣大的數學公眾。」因此，本書除了提供古典代數 (1)、群論 (2)、環論 (3)、體論 (4) 和線性代數 (5) 的歷史論述，以及愛咪·涅特 (Emmy Noether) 和抽象代數的降臨 (6)、幾位傑出數學家小傳 (8) 之外，還特別安排第 7 章〈歷史所啟發的抽象代數課程〉，現身說法作者為在職中學數學教師所開授的一門抽象代數課程。

在這一門課中，Kleiner 利用五個問題的討論，將他的學生逐步地引進抽象代數學的脈絡之中：

- I. 為何  $(-1)(-1)=1$ ？
- II.  $x^2 + 2 = y^3$  的整數解為何？
- III. 只用尺規可以三等分 60 度角嗎？
- IV. 我們可以運用根式求解  $x^5 - 6x + 3 = 0$ ？
- V. 「爸爸，你可以將三元數相乘嗎？」（“Papa, can you multiply triples?”）（按：這是漢彌頓在探索三度空間的複數結構時，他的兒子相當體貼的問候）

在每個問題之後，Kleiner 再加上一些他所謂的「酬勞」(payoffs)，藉以帶動學生的深入理解。現在，針對本書讀者，Kleiner 在本章最後還對此一課程提供了備註，以方便有興趣的數學教授參考借鏡。

本書按主題分章書寫，本來就不太符合數學史的一般著述，在中算史著述中，梁宗鉅的《數學歷史典故》差可比擬。然而，它是一本數學概念史 (conceptual history of mathematics) 的著作，殆無疑問！因此，本書納入第 7 章，在體例上可以說相當地非傳統 (non-conventional)，而書商竟然還有興趣出版，可見，HPM 的確「鬆懈」了數學史的一些制式的傳統，值得我們注意！

# 丟番圖的故事

蔡育知

台灣師大數學系畢業

## 人物介紹

利兒：自小失去雙親，帕姆莉帶回扶養。

丟番圖：生於亞歷山大里亞城，長於文字、雕刻、數學、天文等科。

帕姆莉：丟番圖之妻。

丟裕：丟番圖夫婦之子，自小跟隨父親左右，42 歲不治身亡。

尼奧：10 歲左右的少年，膽大聰明活潑。

柏那：與尼奧一同長大的好友，細心怕事。

帕斯：長者。

莫古拉：該地唯一的祭司，能通靈並與往生者對話。

阿努比斯：狐狼面型的神，為奧西利斯的塗香油防腐者，將死者帶入另一世界，並守護他們的墳墓。

奧西利斯：埃及尼羅河神之一，死而復生，埃及人的生存與他息息相關，他的生命與埃及人的生命與自然連繫。

## 故事

「走開！」

利兒只得拖著步子，輕輕的把門掩上。

「還是一樣沒吃？」

「沒有，桌上的些甜芋和黃瓜都還攔著哪！」

利兒說完就往穿堂過去了。

丟番圖獨自在房間中，對喪子之痛的他而言，怎麼能想像與自己一同生活 42 年的愛子、朋友、同事……就在他的世界完全消失？

「神阿！怎麼可以這樣對我！阿努比斯，我要對你挑戰，你必須為你所犯下的錯誤負責，他是這樣的年輕與英勇善良…」丟番圖開始有點歇斯底里的發洩他不滿的情緒，只見他拿著桌上的草紙撕了許多不知名的文件。撕完又倒回床上。

「釀葡萄酒的季節又到了，法老有公文傳下，可是，丟番圖他……」這樣的情況已經持續了快 4 年了……帕姆莉不知該如何是好。

丟番圖之前曾任書記，為法老王服務，作為藝術和科學的守護人，也寫了些東西，教授相關的科學知識給當地的貴族。丟裕是丟番圖的衣鉢，也是他的愛子，盡傳所學，未料尼羅河的洪水左右了埃及的一切日常生活，奧西利斯的死亡象徵尼羅河河水的退去，卻也在三年前，將正值壯年的丟裕引進尼羅河一同生活。而這也加添了丟番圖的白髮。

「丟……天啊！……不……」帕姆莉用手掩住了口，防止自己狂喊出聲。

\* \* \*

亞歷山卓近郊多了一墓塚，碑文如下：

上帝恩賜他生命的 $\frac{1}{6}$ 為童年；再過生命的 $\frac{1}{12}$ ，他雙頰長出了鬍子；  
再過 $\frac{1}{7}$ 年後他舉行了婚禮；婚後5年他有一個兒子。唉，不幸的孩子，只活了他父親整個生命的一半世紀，便被冷酷的死神帶走。他以研究數論寄託他的哀思，4年之後他離開了人世。

帕姆莉在墓前佇立良久，現在他不會和自己耍脾氣，自己在也不會用自己的熱臉貼人家冷屁股，可是，少了什麼？……去了一趟邁克斯，藍天依舊，想著當時…丟番圖靜靜的趴在他那用了四十多年的棗椰桌，撕裂的草紙散落一地……

「我……」

「51年來……有什麼意義呢？……」帕姆莉牽起利兒那小巧卻粗糙的手。

「回去吧！奧西利斯會指引他到他另一齣生命。」

「等會兒，還有這！」利兒回身抱起了四個密封了的陶罐。一雙靈活的大眼朝著帕姆莉眨了眨眼。

「到尼羅河去，還給自然吧！」帕姆莉淺淺的笑了。

「嗯！」兩人一同朝太陽的方向走去，黑色的人影於紅色的餘暉中漸漸變小……漸漸變小……

\* \* \*

經歷數百年之後。

\* \* \*

「接住！喔，尼奧！你把球丟進鬼屋了！」

「尼奧！你做什麼？不要進去！帕斯伯伯叫我們別進去……尼奧！……」

才一會兒，尼奧的身影已經消失在攀滿植物的石牆之中，柏那也只好尾隨尼奧，跟著也鑽進了鬼屋右側的破牆內。

「嘿！你在哪兒？快點出去，別在這兒了。」

「球應該就在那了，等會兒就出去。」尼奧一邊說著一邊往房屋深處走去。並且正專注的撥著蜘蛛網。

「呃，該死！什麼鬼東西？」

在尼奧腳下的是只陶罐，上頭有莫名其妙的怪花怪鳥的圖形整齊的排列著。紅色漆卻

已經剝落了許多，尼奧伸手就把他拿起，陶罐因早已有裂痕，被尼奧這樣拿起，部分的陶片又掉落下來，砸到尼奧的腳。

「呃，該死！見鬼了。」尼奧不住咕噥。

「鬼！……鬼！……」柏那生性膽小，這會兒早就坐在地上，動也不敢動，只想快點離開現場。

「帕斯伯伯說過……冤屈者的內臟……」

「是啊，見鬼了，有本怪書。你看看。」

頭也不回的，一個灰皮的怪東西往柏那的頭拋來。只見柏那臉色已由紅轉白，漸漸轉青。

「上頭的灰是千年骨灰喔！晚上會出來找你……呵呵！」尼奧仍不改往常的開著玩笑。

拿了球，尼奧拖了受驚過度的柏那出了鬼屋，太陽也逐漸西沈。

「把這些拿給莫古拉看看。」

\*                     \*                     \*

在村子的另一端，莫古拉順手寫下了一行字。

「知道這兩個空格該如何填嗎？」

「 $\square^2 + \circ^2 = 16$ ？」尼奧疑惑的皺了皺眉，搖搖頭。

「嗯！」莫古拉頓了會兒。

「將這交給有學識並且可信任的人公開吧！」

「這可能是三世紀時期丟番圖的遺願。」說完看了看尼奧迷惑的大眼，朝著他輕輕點了點頭、笑了笑。

代數學之父的傳說也就此展開。

## 附錄

丟番圖 (Diophantus) 大約公元 200~250 年生於亞歷山大里亞城。對於他的生平，我們幾乎一無所知。他的生年，是史家從 11 世紀的 Michael Psellus 的信中推斷出來的。傳說有一道算數題刻於其墓碑之上，可據以推出他生齡為 84 歲，並育有一子，但在 41 歲時即逝世長辭。

墓碑內文如下：

上帝恩賜他生命的  $\frac{1}{6}$  為童年；再過生命的  $\frac{1}{12}$ ，他雙頰長出了鬍子；再過  $\frac{1}{7}$  年後他舉行了婚禮；婚後 5 年他有一個兒子。唉，不幸的孩子，只活了他父親整個生命的一半世紀，便被冷酷的死神帶走。他以研究數論寄託他的哀思，4 年之後他離開了人世。(註一)

他的著作有下列四種：*Moriastica*、*Porisms* (凡 3 卷不傳於世)、《數論》(Arithmetica)，以及《論多邊形數》(On Polygonal Numbers)。其中以《數論》一書最為有名。本書也是丟番圖的代表著作，後世亦以他的此項成就稱為「代數學之父」。據他所言此書共有 13 卷，

但殘存的希臘文手抄稿依據 1464 蒙拿努所發現不過 6 卷，為 1、2、3、8、9、10 卷，含 189 個問題。之後，於 1973 年 Mashhad 發現 4 卷阿拉伯文抄本，鑑定為第 4、5、6、7 卷，含 101 個問題。因此，本書總計有 290 個問題，種類繁多，包括有直至四個未知量的一次確定方程，二次確定方程，及一個或多個未知量的一次不定方程等等即表示一個代數方程式，僅包含加法、乘法或取方冪的項。而所謂的丟番圖方程，係指係數屬於有理整數，而其解在有理數中且不為零。類似這些方程，要直到七世紀才被印度人提供有系統的解法。

有關《數論》(Arithmetica) 仍有一件事非常值得提起。費馬 (Pierre de Fermat, 1601~1655) 1637 年在閱讀巴歇 (C. Bachet) 校訂的丟番圖《數論》時，在卷二命題 8 (註二) 的一條頁邊批註，而提出世界上最著名的數學問題—費馬最後定理，如下所示：

把一個數的立方數分成兩個數的立方和，把一個數的四次方分成另兩個數的四次方和，或一般的，把一個數的高於二次的任何次方分成兩個數的同次方的和是不可能的。我確信已找到了一個極美妙的證明，但書旁的空白處太窄，寫不下。(註三)

希臘數學自畢達哥拉斯學派後，多以幾何為主，甚至一些簡單的一次方程式求解都要納入僵硬的幾何之中，直至丟番圖才將代數從幾何學的羈絆釋放出來。而他也是第一個將符號引進希臘代數，並運用符號代表未知量及一組不確定的數的數學家，對於西方代數的進展影響深遠。

## 註解

1. 答案為 84。 Sol:  $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x \Rightarrow x = 84$

2. II 卷 8 題：將一個已知的平方數分為兩個平方數。

例：將 16 分為兩個平方數的和

令第一個平方數為  $x^2$ ，則另一個平方數為  $16 - x^2$ ，所以  $16 - x^2 = p^2$

取一正方形面積為： $(mx - 4)^2$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

$\therefore 4 = \sqrt{16}$  不妨設其邊為  $2x - 4$ ，則正方形為  $4x^2 - 16x + 16$

$$\therefore 4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2 \quad 5x^2 = 16x \quad x = \frac{16}{5}$$

$\therefore$  兩數分別為  $\frac{256}{25}, \frac{144}{25}$

3. 著名的費馬最後定理已於 1993/6/23(三)年於英國劍橋牛頓研究所由安德魯·懷爾斯 (Andrew Wiles) 發表了沉寂約 350 年問題的證明。

## 參考書目

丟番圖 (2000). 〈算術〉，載李文林主編，《數學珍寶》(台北：九章出版社) 頁 181-189。

洪萬生教授個人網頁：數學史論壇。上網日期：民 89 年 12 月，網址：

<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/history/main.htm>。

梁宗巨 (1998). 《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

曾淑芳編 (1995). 《埃及》，台北：貓頭鷹出版社。

Simon Singh (1997). 《費瑪最後定理》，台北：台灣商務印書館。



## 書評：《用直覺了解數學》

彭建勳

台師大數學系碩士班

書名：用直覺了解數學

作者：畑村洋太郎

譯者：林立國

出版者：如何出版社有限公司

出版資料：2005年11月 初版 207頁 定價230元

ISBN：986-136-069-7



### 前言：

數學這門學科一直是許多同學心中的恐懼，在解題的過程當中，當學生碰到問題時往往不知如何往下一步思考，有時候想要向老師、或著是數學程度比較好的同學討教的時候，常常會出現一個問題：那是怎麼想到這個解法的呢？有的人這時候會回答：感覺的。或著會說，我直覺就是這樣想到。

到底是什的樣的直覺，有的人能具備有這樣的直覺而能順利解決數學問題，而有些人卻要因此而困擾呢？「用直覺了解數學」這本書裡，描述著如何利用直覺想法去思考數學，不需要複雜的公理證明，不需要複雜冗長的算式，就能夠幫助學生去理解數學上一些重要的概念。

在此先為這本書每個章節做簡單的介紹：

#### 第一章：看見不存在的直角三角形——sin、cos

三角函數這個章節一直是讓學生討厭數學的一個主因，它感覺起來是那樣的艱深難懂，本章指出三角函數主要就是觀察邊和角的關係，抓住這個要點之後在去發現隱藏在真實世界中的直角三角形，並將 sin 函數波形與直角三角形做一巧妙結合，最後介紹讀者 sin 這名稱的由來。

#### 第二章：了解數字背後隱藏的意義——行列、矩陣

一直行一橫列代表著些什麼呢？在這一章節裡，作者指出行列的應用在一般生活隨處可見，例如像日本神社，信徒捐奉的名牌。一般小吃店裡的價目表，這樣的子隨手可得。所以行列與矩陣的出現應該是理所當然的。另外還提到了，在看一個矩陣運算的時候，應該要思考的不只是運算方法，而是這數字背後能有著什麼樣的涵義在。

#### 第三章：改變看法做出一個新的數——指數、對數

1000000 這個數字看起來是那樣的難以親近，那改成 $10^8$ 這樣子，看起來是不是就平易近人多了，由這樣的出發點開始介紹指數，之後再以做為乘法和加法之間的橋梁的觀點

進入對數。比喻指數與對數就像是首領和頭號部下一樣，兩者相輔相成的構造這個世界。最後引出  $e$  是一個製造出來幫助了解這個大自然世界的人工數。

#### **第四章：將兩個總括為一個——虛數、複數**

虛數本身並不是一個實際存在著的數，那為什麼我們要學習它呢？作者為我們提出這樣一個疑問，結論居然是因為大學教授們不想花時間在教授基本的複數觀念，這樣的答案大家一定很難以接受。如果一定要學，為什麼不學得更清楚，更有趣些呢？在本章作者描述了複數可以把兩個變數變成為一個的好處，也以屏風舉例說明，看到事情的角度不同，所以看到數的世界也會不同。更把虛數假想為一個壓縮的軟體，給予其多樣的比喻實例。最後在章末帶領讀者們一起窺探當初複數的創造者——高斯的偉大想法。

#### **第五章：隱藏在生活中的本質——微分、積分**

微積分聽起來就是一門有難度的學問，但實際上它的本質卻跟生活息息相關，本章以一個生活實例描述微分與積分的意涵；以金錢來思考，微分就好比我們今天從皮包裡拿出多少錢，而積分就好比皮包裡面有多少錢。換而言之，著眼點在於變化了多少的就是微分，而著眼點在於總共有多少的就是積分。之後以圖形更清晰的描述出積分與微分的數學意涵，最後再以微積分基本定理作為本章結尾。

#### **第六章：見微知著——微分方程式**

微分方程式的基本概念是什麼呢？作者在開始的地方舉了個很有趣的例子，人類皆有著強大的好奇心，假若今天牆壁上有個洞，我們會忍不住的想要從動中窺探另一個世界，並嘗試著以洞中觀察到的景象去想像整個世界的樣貌。這樣就是微分方程式的中心本質。當然，作者也在本章的開始就闡明，微分方程式多數是無解的。那我們學習這樣的工具是為了什麼呢？文中提醒了重要的一件事情，學生必須學習的是其中的概念，而非解開微分方程的運算，畢竟現代的社會裡有電腦，哪個人的頭腦能比電腦運算來的更快更好。

#### **第七章：將未來等分——機率**

人如果功利一點，是不是可以把這世界所有的事情都用金錢來稍作衡量呢？這是本章一開始所提出的觀點，為了能把未來以數學表現，機率為此需求而產生，也因此機率所表現的是一種未來的可能情況，代表的不是現在、更不是過去。而機率的大小有時也頂替了人們的思考方向。本章節將機率與生活貼近，描述機率能在生活的哪些地方見到，還有機率對我們產生的作用為何。

#### **附錄一：直覺的極致在於背誦及心算**

這個附錄是作者本身最於數學的體會，很多時候數字的變化就是那幾種，做久了把他們都記下來，或著找出其中所隱藏著的規律性，很容易就可以在很多時候把答案不假思索的給出。

#### **附錄二：努力把數量找出來吧！**

作者提到很多的人，在手邊缺乏某些工具時就無法做數學或著科學思考，像是鐵的比熱，但其實利用一些已知或著顯而易見的假設，我們可以多思考，把相近的數值給找出，那樣的過程遠比把一個死板板的值記住要來的有趣多了。

在整本書的最後，作者還寫了一小段的問與答，是解答為什麼一般人會覺得數學艱深難懂，而數學是不是真的是一門有緣者才能進入的學問，還是其實是人人都有辦法找握住

其本質的呢？

## 評論

這本科普著作，看到他的內容簡介，應該會不少的人覺得，數學有這麼簡單嗎？會不會又是一個數學家想要努力的宣揚，其是數學的抽象世界跟一般的現實世界是一樣的簡單呢？

開始閱讀此書後會發現先前的疑問或許是多餘的了，本書的作者並非研究數學專精領域的學者，他的研究領域是在工學這方面，所以數學家的觀點在書中，有些時候作者就會表現出，那不過是一些自以為是的數學家的認定罷了的想法在其中。我想這也是很多人常在學習數學的時候所存有的想法。而作者在這本書中希望表達的，是讓一般的讀者也能了解到數學的本質與概念，它並不是那樣的遙不可及，而與生活息息相關的。像是書中在討論到微積分的時候，作者簡單的利用皮包裡的錢做為討論的開始，清楚的表達了著眼點在於變化了多少的就是微分，而著眼點在於總共有多少的就是積分這樣的概念。在談論行列矩陣的時候，作者也舉例了為什麼會想出這樣的記號與運算方式，最貼近生活的莫過於在外吃飯石牆壁上的價目表了，每一個項目為一行，爾後排成一列。在討論虛數的時候，作者巧妙的運用屏風來展示看事情的角度不同，同樣的可以應用在數學含數圖形的觀點上，把兩個存在三度空間中的波形合併為在平面上的一個圓，藉以了解複數產生的目的和其在科學應用上的威力。

而書中有許多獨特的觀點能讓讀者印象深刻，像是在介紹虛數時，作者直接的告訴讀者們，這是一個虛假的東西，是數學家們為了解決問題而硬是創造出來的，所以這東西是不真實的。但是虛數在現在的世界裡是非常實用的，許多的自然現象，或著是科技發展都與其息息相關。所以大家就承認了它。**即使是假的，只要大家都能認同的東西就是好東西。**作者這樣寫著。

在描述機率於日常生活中，很多人常常誤解機率的數學意義，會有運用的謬誤產生。像是會在地震過後詢問，發這地震的百分率是多少。明明就已經發生的事情還在思考著它的發生機率，這不是一件很奇怪的事情嗎？

書中有幾個地方，因著國情的不同，產生了閱讀上可能發生的一些小錯誤，像是在行列矩陣的部分，作者提到在日本，教師的教學當中會教導，因為行的右上方有兩個二，列的右邊為兩豎，是故，橫著看的為行，直的看法為列。這和我們一般學校所教授的內容是不同的。還有在提到關於期望值的部分時，不知道為譯者使用了期待值這樣的詞，我想這也事跟現今一般教科書事有落差的地方。在閱讀時須稍微注意一下。

我想這本書事很值得一些有心想要把數學學好，讓自己更上一層樓的學生閱讀。也很適合推薦給在職的數學老師，能夠用更淺顯生活化的語句去描述抽象世界裡的數學。就像它封底介紹上所寫著的，它就是將數學的原理與你腦海裡的印象合一，讓人產生出理解的感覺。所謂的理解，就是一種直覺，不需要算式，只要圖解與例子，任何人都可以了解數學的「為什麼」是這樣。而當能了解「為什麼」，一切的問題就迎刃而解了。

## 《數學訓練營》(The Phantom X)書評

許舜淵

台師大數學系碩士班

書名：數學訓練營(The Phantom X)

作者：卡佳坦·波斯基特(Kjartan Poskitt)

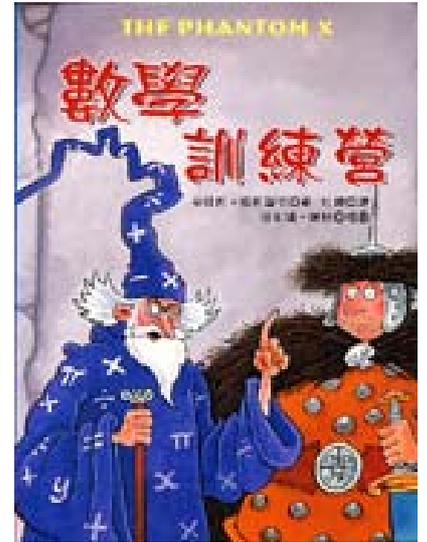
譯者：杜峰

出版社：新視野

出版年份：2005 年 11 月初版一刷

出版資料：平裝共 166 頁，定價台幣 180 元

國際書碼：ISBN 957-9472-59-9



### 前言

數學裡頭的概念都是抽象的概念，可能由具體事物抽象出來，比如：古代曾用繩結或手指頭來代表數字 1、2、3...。或是從數系的發展來看，負數和複數是由人們所創造出來的，現實生活中根本不會有 -2 個蘋果或  $i$  張考卷的出現。因此，數學的學習不是一件容易的事，也造成許多學生一聽到數學，就想放棄。然而，如果能以趣味、活潑和平易近人的方式來介紹數學概念，相信會有許多人更能接受數學，甚至愛上它。而《數學訓練營》正是一本想以詼諧有趣的方式來介紹代數，讓讀者進入他的魔幻世界學習代數。

### 內容簡介

本書的作者很特別，他是學工程出身的，又是電視兒童節目製作人，也作過舞台劇等等，根本不是數學相關背景，很令人好奇這是一本怎樣的書。而《數學訓練營》是「不可思議的數學」系列的其中一本，「不可思議的數學」目前被翻譯成二十多種語言，由此可見此系列的書籍非常受讀者喜愛。

全文以插圖搭配文字敘述來介紹代數，這裡的代數不是大學數學系的代數學，而是中學裡頭的代數。內容共分成 11 個部分，每一部分要傳達的知識都冠上有趣的包裝，例如：整理行李和緊急求助鈕、「不可思議的數學」實驗室，令人無法馬上知道這部分的內容，非得進入書本裡頭，才能一探究竟。

【秘密武器】、【代數是什麼？】這兩部分是先介紹整本書的中心人物，魔幻  $X$ ，他將會帶領大家一起去征服未知數  $X$ 。在準備了解代數是什麼的時候，作者就先丟出一個方程式： $(q_1 - q_0)^{\frac{1}{6}} = p\left(\frac{3\sqrt{y+2z}}{7\Omega - 9.47} - 8(y^2 - \Omega)^{\frac{2}{5}}\right) + 1$ 來破題，表示在代數的世界裡頭可能會碰到這種難題。接著他用毛毛蟲的腳來介紹未知數的概念，以及慢慢引出方程式的味道。

在【狩獵市場方程式】，利用獵人要買弓箭和箭囊的問題來告訴讀者如何列出方程式與解一元一次方程式。

**【代數之父】**提到古希臘人們喜歡猜謎，比如： $p^3 + 1 = q^3$ ，你能知道  $p, q$  分別是什麼嗎？由此問題引出早在西元約 200 至 300 年間就有人利用字母和符號來解答數學題目，而此人就是代數之父—丟番圖。描述其一生的謎題正是利用字母和符號來解決。最後還提到代數中最昂貴的問題，這問題可能使你損失好多錢呢！

**【整理行李和緊急求助鈕】**在將一元二次方程作因式分解形容成整理行李，需要有條理的整理，才不會衣服都塞不下箱子。而公式解就如同緊急按鈕般，當你無法分解方程式去求解時，找公式解就對了。

而**【魔術的技巧】**則是介紹數學魔術，了解數學如何運用在魔術之中，**【不可思議的數學實驗室】**以  $\frac{(b+a)(a-b)^2}{(b-a)(b+a)(b-a)} - 1$  來表達未知數和括弧混在一起是一件可怕的事情，進而去討論去括號的問題，以及介紹巴斯卡三角形。

**【銀行時鐘】**則是用一個銀行搶案的故事去討論分針、時針走的距離。**【數軸、座標定點與愛漢堡的飛行】**在介紹平面座標、畫函數圖形和拋物線。最後的**【雙重麻煩】**和**【零的證明】**討論如何解聯立方程式，而零的證明也滿有趣的，但這證明是有陷阱的，等待讀者去發現。此外，書中常有★的記號，提醒讀者留意此重要的訊息。

## 評論

如同內容簡介一開始所提到的，作者是學工程出身的，又身兼許多角色，令人好奇他如何寫一本給一般大眾閱讀的數學書。首先，對於此書在知識內容的編排順序而言，作者以未知數作起頭，接著進到列方程式，因式分解，解方程式，在座標軸上畫函數圖形，最後處理如何解二元一次聯立方程式，中間穿插數學魔術、時針與分針的關係和零的證明。從編排順序來看，滿符合目前中學教學的順序，但在解一元二次方程式和二元一次聯立方程式的順序和中學是相反的。這點差異倒是滿特別的，對初學代數者，這或許是個不錯的安排。

就內容趣味性來說，作者在書的封底講到：「也許你對數學的枯燥乏味，早就心裡有數？方程式總令你方寸大亂？遇到等式是否不敢等閒視之？碰到代數猶如進入黑暗時代？」，從這幾句話可知讀者寫此書的用意，想讓對數學感到灰心的人重新燃起興趣。因此，他用了許多漫畫和文字來描述和傳達觀念，這樣的內容設計是令筆者欣賞的。例如：作者以整理行李必須準確的分出哪些物品屬於哪些箱子的道理運用在因式分解，例如分解  $f^2 + 7f + 10$  成爲  $(f + 2)(f + 5)$  把括號視爲箱子，而物品就是  $f + 2$ 、 $f + 5$ ，如此的比喻用的很貼切。此外，作者創造出一個一元二次方程式裂化器，只要將一元二次方程式丟入此機器，它就能幫你作因式分解。這個想法還滿特別的，我想可能是因爲他是唸工程出身的，所以才會有裂化器的產生。

然而，就書中處理數學概念的方式，筆者有些建議和疑問。其中有一個★是說「當兩數相乘時，必須注意兩數的符號是否相同。如果相同(即同爲正數或同爲負數)，那麼答案就會正數；反之，如果不同，答案則爲負數。」作者似乎將這個★視爲一個規定，並沒說明爲什麼？因爲這個概念對學生來說是複雜的，很多學生都把它視爲一個規定，並不知道爲什麼？如果作者真的能用有趣的比喻來說明這個概念，筆者認爲內容一定更爲完美。此

外，數學式子的寫法有一部分有問題，在處理去括號問題： $-(3g + 2j) = -1 \times 3g + -1 \times 2j$  中，這種寫法是學生常出現的寫法，但其實是有問題的， $+ -1 \times 2j$  哪一個才是運算符號呢？這裡對於式子的處理不夠嚴謹。此外，對於書中的【銀行時鐘】這部分，作者用了 13 頁的篇幅在引出如何解決當時針和分針交會時，分針要走多少距離的問題。在此處筆者不甚瞭解其目的為何？

綜觀作者介紹一個數學觀念或解方程式的方法，筆者認為對於一個代數初學者或數學不好的人來說仍是很吃力。書中的方法仍和一般在中學學到的方法類似，似乎只是加了許多包裝來引起動機。而對於已學過這些知識的讀者來說，它可以讓你以輕鬆活潑的方式來看代數。因此，我推薦給喜歡一邊看漫畫一邊學數學的人來閱讀此書。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬾（東京大學）

基隆市：許文璋（南榮國中）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 余俊生（西松高中）

張美玲（景興國中） 黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中） 林裕意（開平中學）

林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）

台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦

和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹

林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉（二重國小） 賴素貞（瑞芳高工）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）

鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽（永豐高中）、

鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

洪正川（新竹高商）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工） 郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（家齊女中） 劉天祥（台南二中）

台南縣：李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中） 楊瓊茹（屏東高中） 陳建蒼（潮州高中）

澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）

馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！