HPM通訊

第十一卷 第七、八期合刊 目錄（2008年8月）

「第 12 屆東亞科學史國際研討會」會議報導
無限與微積分概念學習單的模組設計：I.無限的學習單設計
書籍評論與介紹：數學教師如何放輕鬆？

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

「第 12 屆東亞科學史國際研討會」會議報導

英家銘
台師大數學系博士班研究生

2008 年 7 月 14 日至 18 日，「第 12 屆東亞科學史國際研討會」 (The 12th International Conference on the History of Science in East Asia) 在美國東岸巴爾的摩郊區的約翰・霍普金斯大學 (Johns Hopkins University) 舉行。這次研討會有來自 17 個國家，超過一百位的學者與研究生參加。本次會議的大會演講與論文發表，包含東亞數學史、醫學史、科學史、技術史等不同領域。

除了大會演講與少數海報展示之外，本次會議主要是採「專題討論小組」的方式進行。我所參與的討論小組就在會議首日進行，這是由清大歷史所琅元 (Alexei Volkov) 老師帶領的小組 - Science across the Boarders: History of Transmission of Scientific Expertise in East and South-East Asia。這個討論小組的論文發表，是由法國第七大學林力娜 (Karine Chemla) 教授擔任主席，小組成員還有清大歷史所的徐光台老師、毛傳慧老師，以及大會分配到這個小組的另外兩位中國學者和韓國博士生，他們在小組中論文發表的主軸，是中西科學知識的交流，以及中國的數學知識對朝鮮與越南的影響。至於我報告的主題，則是朝鮮數學家南秉吉的《九章術解》- The *Kujang Sulhae*: Nam Pyŏng-Gil's Explanations of the Mathematical Methods of the *Jiuzhang Suanshu*，分析南秉吉對《九章算術》所作註解的特色。這篇論文其實大部分的內容是《HPM 通訊》團隊在 2002 ~ 2003 年的研究結果，只有少部分是我自己的看法。報告完畢之後，李約瑟研究所的古克禮 (Christopher Cullen) 教授、首爾大學的林宗台教授，以及內蒙古師範大學的郭世榮教授都對我有所指教，讓我收穫很多，而他們對這篇報告的稱讚，其實應該歸功於《HPM 通訊》團隊全體。

這次會議有許多數學史領域的學者與研究生來發表論文，其中讓我覺得印象深刻的，有琅元老師講的中國數學與數學教育對越南的傳播，清大研究生陳佩瑩發表的珠算歌訣的演化，以及古克禮教授報告有關兩漢時期「數學」工作者的背景。這些論文都讓我學到很多東西，感覺不虛此行。

在其他的領域，也有很多來自歐美及亞洲各地的學者發表，我覺得醫學史在這次的研

討會中是佔據最多版面的領域。由於我對醫學與醫學史知識的不足，所以無法在這裡提供對論文內容的報導。

除了報導研討會內容，我們也來看看主辦學校與城市。這次舉辦研討會的學校 – 約翰‧霍普金斯大學 – 是美國國內第一所研究型大學，在十九世紀末時以德國大學為雛形建立的。他們有美國一流的醫學院，所以很自然的也有一個很好的醫學史研究所，這次醫學史所與科技史系合辦這次盛會，吸引了很多研究東亞科學史的西方學者參與。

約翰‧霍普金斯大學所在的巴爾的摩市，是在距離華盛頓特區不遠的港口城市，雖然跟其他許多有歷史的美國城市一樣，她也有舊城區破落與族群差異的問題，不過，她仍不失為一個有歷史與文化氣息的城市。內港灣區有美麗的風光，市中心有高聳的華盛頓紀念碑、許多古老有歷史的建築物與博物館，很適合對歷史有興趣的觀光客到此一遊。當然，她也有美國國家娛樂 – 棒球 – 的隊伍在此，我抽空看了一場巴爾的摩金鶯隊的比賽，也算一圓從小希望看美國大聯盟棒球的經驗。

這次會議中，我接觸到了世界各地研究東亞數學史的學者，也交到了許多對台灣文化有興趣的朋友。希望未來有機會，能夠跟這些學者合作做研究，也希望這些對台灣有興趣的朋友們能夠到台灣旅遊、工作。

與內蒙古師範大學郭世榮教授合影

中央為劍橋大學李約瑟研究所古克禮教授、左方為匹茲堡大學博士生傅良瑜

Information

CERME 6 is the Sixth Conference organised by the European Society for Research in Mathematics Education. It is designed to foster a critical and communicative atmosphere. Hence, it deliberately moves away from oral presentations towards collaborative group work. Papers are available in the website before the conference in order to be read by all those participating in a WG (Working Group). CERME 6 gathers 15 thematic groups whose members work together in a common research area. Each participant must choose one of these WG's and participate in its work during the whole meeting.

January 27 - February 1, 2009
CERME 6
European Society for Research in mathematics Education
University Lyon 1, **France**
http://ermeweb.free.fr/
Group 15: Theory and research on the role of history in Mathematics Education
Chair: Fulvia Furinghetti (Italy)
Call for papers

無限與微積分概念學習單的模組設計：

I.無限的學習單設計

蘇惠玉
西松高中

一、 前言

目前高中教材中，有兩個部分涉及「無限」。一個當然就是微積分的單元，通常課程排在高三自然組；另一個部分卻排在高一上學期有關數列與級數的部分。在此單元中之前，國中教材中的數列與級數，通常只到數列中的部分項如何求（觀察規則），以及等差數列與級數的相關問題，一般課本中連「等比數列」的名詞都沒有，更遑論「無限」的概念。而高一一開始即是從數系開始，所以到數列與級數的單元時，學生才正式開始接觸到「無限」的概念。而這個部分的教材內容，通常是先數列的極限，再來是無窮等比級數的求和，最後是循環小數化成分數的問題。

接著是高三的微積分課程，這個部分可以說是初等數學通往高等數學的重要入口。學生必須從處理有限的直線形問題，進入到處理無限的曲線形。例如在高二上的圓與高二下的圓錐曲線單元中都會碰到切線與求切線方程式的問題，雖然課本上是以一個較為嚴謹的方式來定義切線，即過曲線上一點P的切線，將其定義為過P點的割線另一交點為Q，當Q點沿著曲線越來越靠近P點時，這一條割線L_0就會逼近一條直線，此直線即為過P點的切線。但是由於此時還無法處理「逼近」，即斜率的極限值，所以仍以「直線（切線）與曲線只有一交點（重根）」的代數方式來求切線方程，一直要到微積分的課程時，才學習如何以這樣的定義方式求切線方程式。

再者，現在教科書的微積分內容，以「極限」的形式為主軸呈現微分的意義與應用，[1]然而在高一與高二的課程中，學生對「無限」（包括無窮大與無窮小量）與「逼近」實際上是沒什麼機會接觸的，對概念的了解也還停留在直觀上，所以對「極限」常常會有些錯誤迷思，例如「$0.\overline{9}=1$」，以及$\frac{0}{0}$型式的極限，都是在學習微積分的第一道關卡--「極限」的過程中常會出現的問題所在。如何幫助學生更容易與更清楚的學習微積分的課程，一直是高中數學教師在尋求的問題解答。本文試著從數學史的角度切入來看極限以及導數的定義方式，配合學習單的學習形式，以期讓學生能夠更充分地了解微積分的精神所在，以及使用極限概念來處理導數定義的數學發展過程與優勢。

二、 史料說明：潛在無限與實在無限

由於季諾悖論的影響，自希臘以來，西方數學家在面臨「無限」的問題時，總是小心翼翼、謹慎有加的斟酌處理。在當時亞里斯多德就已非常大智慧地將「無限」分成「潛在

---

[1] 目前高三數甲下微分的課程，兩個章節名稱分別是「極限的概念」與「極限的應用」，而 95 暫綱中選修II 微積分的課程內容，已將名稱改為「多項式函數的極限與導數」、「導函數的應用」與「多項式函數的積分」。

無限 potential infinity」與「實在無限 actual infinity」。所謂「潛在無限」指的是「可以一直作下去」的一個過程，例如一段線段可以一直分割下去；或是自然數可以一直加 1 得到下一個，這樣一直作下去，不會有所謂的「盡頭」即是潛在無限。而「實在無限」即是一個完整的存在，例如自然數的全體即是實在無限。「實在無限」的概念要一直要到康托（Cantor, 1845~1918）以後才較為清楚的被了解，而「潛在無限」則一直被數學家們運用在有關無限的許多題材中，例如阿基米德在證明圓面積公式與拋物線弓形面積中，也都利用了「潛在無限」的觀念，將曲線圖形與越來越逼近此曲線的直線形間的關係來加以討論證明。從希臘以來的數學處理方式，其實也暗示著學生在學習有關無限的概念時，實際上「潛在無限」的這樣子的接近無窮的「程序」性質，確實比「實在無限」更容易掌握。

舉例來說，學生在學習循環小數時，常在選擇題中碰到型如「$0.\overline{9}=1$」的判斷真假問題。這個問題就如同季諾悖論一樣讓人覺得是是而非，無法讓人確實的信服。有許多人直觀的反應一定是「$0.\overline{9}<1$」，他們會形成這樣的印象大概可以歸納成幾個原因：

(1) 最簡單的質疑意見來自於數字比大小的根深蒂固觀念，因為不管 0.99999…後面的「…」有多少個，都是零點多，一定比 1 還要小。

(2) 在無窮等比級數的單元中，我們學習利用無窮等比級數的求和，將循環小數化為分數，而

$$0.9999\ldots=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots$$

此無窮等比級數的和為 $\frac{9/10}{1-1/10}=1$。雖說它的「和」是 1，但是大家都知道這個公式實際上是一個取極限的過程，它來自於 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{10}(1-(\frac{1}{10})^n)}{1-\frac{1}{10}}$，所以 1 是 0.999…的極限值，0.999…並不等於 1。

(3) 有些人在將循環小數化成分數時，用的是乘以 10 的次方將其進位的方法，如
令 x=0.999…，兩邊同乘以 10，得到 10x=9.999…=9+0.999…=9+x，
兩邊同時消去 x，所以 9x=9，即 x=1。
在這樣的過程中，讓人質疑的是 x 可否消去的問題，因為若 x 消去後，得到的 9x，但是 x=0.999….，乘以 9 以後，得到的應該是 8.999….，且最後一位數字（如果有的話）應該是 1，當然不會等於 9。

$0.\overline{9}$ 是否等於 1 的這個問題，追根究底就是「實在無限」與「潛在無限」的兩派看法。從「實在無限」的角度來看，即是將 $0.\overline{9}$ 看成一整個實體，如同 $\sqrt{2}$ 一般，我們同意 $\sqrt{2}$ 是一個數，而這個數是一個無窮小數，等於 1.41415…，不管此小數後面的「…」有多少個數字，又是什麼樣的數字，$\sqrt{2}=1.41415\ldots$。而數字 1 就和 $\sqrt{2}$ 一樣，1 這個數的另一個無窮小數的表示法就是 $0.\overline{9}$，所以 $0.\overline{9}=1$。然而有些人從「潛在無限」的角度來看 $0.\overline{9}=0.999\ldots$，他們會將後面的「…」看成一個「過程」，所以可以一直寫下 9，雖然要多少個就可以寫下多少個，但是還是 9 這個數字，當然 0.999…不等於 1。

潛在無限的概念，相較於實在無限來說，確實是較爲直觀而容易了解的，同時又能夠符合我們在有限世界所習慣的數學原則，所以微積分在發明之初，當數學家們面對無窮小量與無窮小量的變化率時，有許多觀念的解釋即是來自於「潛在無限」的觀念。

三、學習單的設計

本學習單設計的學習目標，在於讓學生可以思考「無限（無窮大與無限小）」的特性，以及突顯出因爲這些特性而形成的與「有限」的認知衝突。再者，藉由對「潛在無限」與「實在無限」的認識，讓學生可以體會到數學家在處理微積分相關問題時，以「潛在無限」的概念，小心翼翼地藉由「越來越逼近」的「程序性」手段，來處理「無限小」與「無窮大」這類的棘手問題。以下爲筆者所設計的學習單內容，使用時機爲高三微積分課程上課之前。

參考文獻：

Richman, F. (1999), “ Is 0.999... = 1?”in *Mathematics Magazine*, **72** , pp.404-408.

Heath, Sir T.(1949), *Mathematics In Aristotle*. Oxford: Clarendon Press.

Katz, V.J. (1993). *A History of Mathematics—an Introduction*. New York: HarperCoollins College Publishers.

李文林主編(2000), 《數學珍寶》，台北：九章出版社。

Kline, M.(1983),《數學史—數學思想的發展》，林炎全、洪萬生、楊康景松譯。台北：九章出版社。

Kline, M.(2004), 《數學確定性的失落》，趙學信、翁秉仁譯。台北：台灣商務印書館。

附録：「無限」概念學習單

Card 1　希爾伯特的無窮旅館：無窮集的特性

假設有一間旅館，有無窮多個房間，每個自然數都是某個房間的號碼。

問題：

1. 今有一位旅客來要個房間，但所有房間都客滿，在不能併房的條件下，如果你是旅館老闆，該如何重新安排房間，讓新來的旅客能住下？

2. 如果來了一個「無窮旅遊團」，他們的成員編號用光了自然數，需要有無窮多個房間，在不能併房的條件下，又該如何重新安排房間？

Card 2　季諾（**Zeno of Elea**）悖論：運動是不可能的！

季諾爲了反駁「所有事物可以分割成更小粒子」的觀點，提出了以下的兩個悖論：

『二分悖論』（**Dichotomy**）：

There is no motion because that which is moved must arrive at the middle (of its course) before it arrives at the end.

（運動是不可能的。因爲必須再到達另一邊的端點時，必須先經過路徑的中點。）

「阿基里斯(Achilles)悖論」

This asserts that the slower when running will never be overtaken by the quicker; for that which is pursuing must first reach the point from which that which is fleeing started, so that the slower must necessarily always be some distance ahead.

（較慢者絕不會被較快者追趕過去。因爲追趕者必須經過在前頭跑者經過每一點。所以較慢者一定在較快者的某一段距離之前。）

問題：

1. 請問你贊成季諾的說法嗎？爲什麼？

2. 如果你要反駁季諾的說法，你會如何說明？

Card 3　$0.\overline{9}<1$？

請比較一下 $0.\overline{9}$ 與 1 的大小。

問題：

1. 你認爲 $0.\overline{9}$ 大於、等於或是小於 1？爲什麼？

2. 請 $0.\overline{3}$ 將化成分數(請寫出計算過程)。

3. 下面有 2 種算法，你覺得是對或是錯？爲什麼？

   算法一：

   因爲 $0.\overline{3}=0.3333\ldots.=\dfrac{1}{3}$

   $0.\overline{3}\times3=0.9999\ldots.=0.\overline{9}=\dfrac{1}{3}\times3=1$

   算法二：

   設 $0.\overline{9}=x$

   即 $0.99999\ldots.=x$　，等號二邊同乘以 10，得

   $9.9999\ldots=10x$，即 $9+0.\overline{9}=10x$，$9+x=10x$，$9=9x$，所以 $x=0.\overline{9}=1$

Card 4　潛在無限與實在無限

亞里斯多德將「無限」分成「潛在無限 potential infinity」與「實在無限 actual infinity」。所謂「潛在無限」指的是「可以一直作下去」的一個過程，例如一段線段可以一直分割下去；或是自然數可以一直加 1 得到下一個，這樣一直作下去，不會有所謂的「盡頭」即是潛在無限。而「實在無限」即是一個完整的存在，例如自然數的全體即是實在無限。

問題：

在下列各個方法的敘述中，哪些部分使用到類似「潛在無限」的概念？請用畫底線的方式標示出來。

(1) 數學歸納法的證明：

數學歸納法證明：$\forall n \in N,\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

證明程序如下：

①證明起始點 n=1 成立

②假設 n=k 成立，利用其證明 n=k+1 成立

③ 最後由數學歸納法原理可知$\forall n \in N,\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

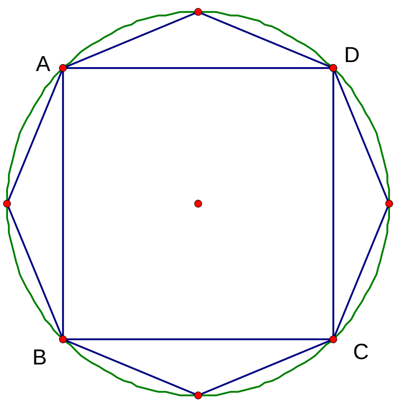
(2) 阿基米德的圓面積公式「任一圓的面積等於以該圓的半徑和周長爲兩直角邊的直角三角形的面積」的證明：

如果可能，設圓面積大於 K。

作圓的內接正方形 ABCD，平分弧 AB、BC、CD、DA，然後等分其半（如有必要），繼續分下去，直到以分點爲頂點的內接多邊形各邊所對弓形面積之和小於圓面積與 K 之差。

弓形和＝圓－內接多邊形<圓－K

這樣，多邊形面積大於 K。



(3) 費馬求最大值的方法

設 a 是問題中的任一未知量，讓我們用包含 a 的次方的諸項來表示極大值或極小值。現在用 a+e 來代替原來的未知量 a，並且用包含 a 和 e 次方的諸項來表示極大值或極小值。然後使這兩個極值表達式相逼近(*adequate*，表示盡可能的逼近一個數)，並消去公共項，…用 e 或 e 的高次方除各項，使 e 從至少有一項中消失，然後捨棄所有仍有 e 的項，使兩邊的剩餘項相等。…最後這個方程式的解所產生的 a 值，代入原來的表達式就可得出極大值或極小值。

這裡舉一個例子：

將線段 AC 分成兩段，分段點 E，使得 AE×EC 有最大值。

設AC=b，分成的兩線段長中一段爲a，所以另一段長爲b-a，它們的乘積AE×EC即爲 $ba-a^2$ ，我們要的就是這個積的最大值。

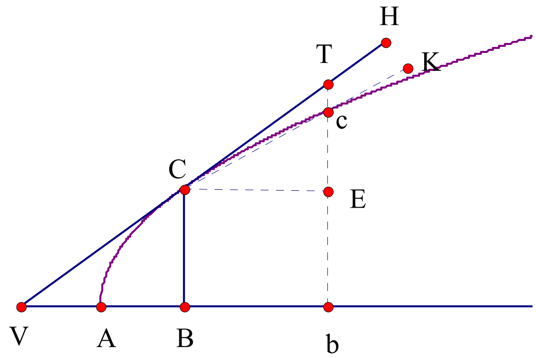
現在設b的第一條線段爲a+e(e爲微小的變化量)，第二線段將爲b-a-e，它們的積 $(a+e)(b-a-e)=ba-a^2+be-2ae-e^2$；

這個表達式必須逼近前一個表達式，即 $ba-a^2+be-2ae-e^2\sim ba-a^2$

消去公共項後得 $be\sim 2ae+e^2$，再消去**e**得b=2a。爲了解決所提問題，最後必須取a爲b的一半。

(4) 牛頓的首末比

作直線 Cc 並延長至 K。令縱坐標 bc 回到原先位置 BC，當與 c 趨合時，直線 CK 將與切線 CH 趨合，消逝三角形 Cec 的最終形式將變得與三角形 CET 相似，其消逝邊 CE，Ec 和 Cc 相互之比最終將等於另一三角形 CET 的邊 CE，ET 和 CT 之比，…若點與 c 之間相差任意小，則直線 CK 與切線 CH 同樣將相差任意小。爲使直線 CK 與切線 CH 重合，並能求出現段 CE，Ec，Cc 的最終比，點 C 與 c 必須趨近，並且完全重合。

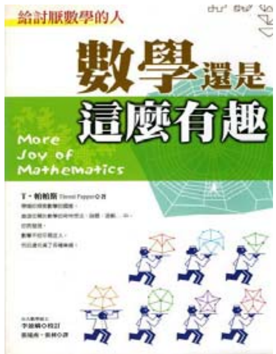


Book評論與介紹

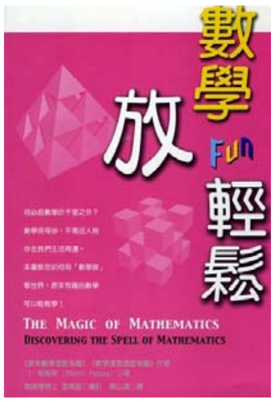
數學教師如何放輕鬆？

蔡育知
台灣師大數學系畢業

書名：原來數學這麼有趣 (The Joy of Mathematics)
作者：T. 帕帕斯 (Theoni Pappas)
譯者：張遠南、張昶 校定：李盈嬌
出版社：世茂出版社
出版日期：2003 年 7 月 初版二刷
出版資料：平裝 271 頁 定價新台幣 240 元
ISBN：957-776-457-6 (原著 ISBN：0-933174-65-9)



書名：數學還是這麼有趣 (More Joy of Mathematics)
作者：T. 帕帕斯 (Theoni Pappas)
譯者：張遠南、張昶　校定：李盈嬌
出版社：世茂出版社
出版日期：2004 年 4 月 初版三刷
出版資料：平裝 379 頁 定價新台幣 240 元
ISBN：957-776-458-4 (原著 ISBN：0-933174-73-X)



書名：數學放輕鬆 (The Magic of Mathematics)
作者：T. 帕帕斯 (Theoni Pappas)
譯者：陳以鴻 審定：李精益
出版社：世茂出版社
出版日期：2004 年 5 月 初版一刷
出版資料：平裝 317 頁 定價新台幣 240 元
ISBN：957-776-611-0 (原著 ISBN：0-933174-99-3)

一、前言

「數學不只是用來計算、平衡程式或證明理論而已，也不只是單純用來解決代數、幾何、微積分等問題，可以說它已超越了一種思考模式。」本書前言清楚的點出這樣的思維，也為了 T. 帕帕斯所寫的一系列書籍揭開了序幕，正如愛因斯坦所言：「興趣是最好的老師」，如何激發學生學習數學的興趣，一直是老師們所關心的。一旦有了興趣與熱情，學習數學將不再是恐懼與制式化的操作，而是心靈最深的一種追尋與喜悅。至於數學有趣在哪？看了 T. 帕帕斯所寫的書，其中一定有部分可以引發你直覺想像，或者覺得好玩想深

入的題目。「數學放輕鬆」吧！數學絕對不是嚴謹不破的銅牆鐵壁，反倒是你經常使用的工具，與時時刻刻在你身邊跳舞的仙子。就讓 T. 帕帕斯引領你，看到教科書公式以外的數學世界。

二、內容簡介

筆者從這三本書的目錄中，羅列數則標題提供大家參考，相信不管是誰，在看過這些後，都能很清楚的知道書中內容範圍，與可延伸的面向度到底有多廣了。至於真正的內容部分，還是有待大家親自翻開它們，打開數學的神秘面紗，就能有更深體會了。

・《原來數學這麼有趣》目錄：

哈雷彗星、地震與對數、費波那契數列、懸鍊線與拋物線、結晶-自然界的多面體、撞球桌的數學、數學與折紙、十個歷史日期、捲纏的莫比烏斯帶、那皮爾古算籌、幻方、一個非歐幾何世界、尼柯梅德斯蚌線、質數、黃金矩形、克卜勒-波音索特體、神奇的六線形、網絡、音樂的數學、四色地圖問題、超限數、螺旋-數學與遺傳學、視幻覺的歷史、迷宮、亞里斯多德的輪子詭論、算盤、數學與肥皂泡……。

・《數學還是這麼有趣》目錄：

海波的數學、七巧板、令人困惑的無窮大、π 的一個神奇公式、折一個橢圓、埃及的腕尺掌尺與指尺、馬雅人的數學、混沌理論—在混沌中有序嗎？、數學的結、「0」和「零」的創始、碼與密碼、電腦與藝術、碎形雲、多邊形數、統計學—數學的巧妙操作、咖啡杯與甜甜圈的數學、在完全數的探索中、九點圓、建築學與數學、《易經》與二進制系統、歪像藝術、骰子與高斯曲線、數學與地圖繪製、朋羅斯磁磚、你出生在星期幾？、武士刀中的指數方冪、暗箱、萬花筒與對稱、用繩栓羊的謎題、「溜溜球」玩具的數學、不可能的圖形……。

・《數學放輕鬆》目錄：

飛行的數學、再生紙的數字、數學世界是怎樣形成的、碎形世界、數學與雕像、數學與艾雪藝術、四元數和數字們的爭論、歐幾里德（得）對值數無窮的證明、蜜蜂們用數學忙些什麼、用數學註釋的花園、巴比倫人與平方根、中國弦圖、彎折形齒如何三等分一個角、網際空間虛擬實境、小費馬、生命奧秘中的紐結、富樂網格球頂和巴克球、古老的李思莫馬恰數學遊戲、本傑明・富蘭克林的幻圓……。

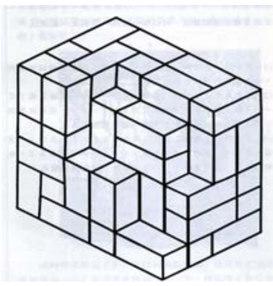
接著，我們綜合介紹這三書之內容大概。

《原來數學這麼有趣》與《數學還是這麼有趣》兩本書是一系列套書，編輯小組很用心的，將此兩本書的左上角都標上了「給討厭數學的人」，令人不禁莞爾一笑，由於過往講述式教學為主的學習風氣影響，大多數人在數學的學習過程中認為數學並不可親、更不好玩、除了計算似乎沒有別的，因此，數學是一個令人討厭的科目而不喜歡接觸。身為美國資深數學教師的作者 T. 帕帕斯，對中學教育下了很深的功夫，她還成立基金會，幫助眾多的教師啓發各類想法與形成各類不同的數學思考，也成功開發各類的產品與大眾分享，讓大家也能體會到神奇與趣味數學的魅力。《原來數學這麼有趣》(後文簡稱為《原》)、《數學還是這麼有趣》(後文簡稱為《還》)以及《數學放輕鬆》(後文簡稱為《放》)，就是

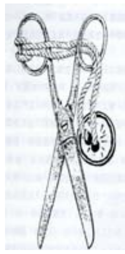
其中影響各國數學教師頗多的著作。筆者相信這三本書不但可以給討厭數學的人對數學產生好感，應該也可以加深已經喜歡上數學的人對數學的興趣。

本系列書並沒有將大家認爲數學最困難的計算與邏輯證明推理太過強調，只將邏輯做爲本書的小部分內容，著重開啓學生思考，提供學習數學的另一種方法。舉例來說，T. 帕帕斯在介紹邏輯的時候 (如圖一)，不以推理過程爲重，而是將過程略去，完全以引發讀者思考爲主；就算是數學知識建構，也是以淺明易瞭的方式略提數學知識世界的形成，例如數學思想的演化(《原》，頁 176-177)、數學的形成(《放》，頁 41-42) 等，所陳述的是歷史中的數學發現與建構過程，而非知識體系的介紹等硬梆梆的文字。

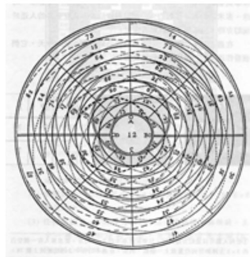
此外，文中還介紹了許多趣味遊戲提供大家遊樂，內容不是只有一般的七巧板、迷宮，像是如「三連環」(《原》，頁 49)、「奧維德遊戲」(《還》，頁 156)、「拓樸謎題」(圖二)、「翻轉遊戲」(《還》，頁 343-345) 等，書中都介紹了許多，而且每一則遊戲都蘊含的數學的意味，尤其是類似「本傑明・富蘭克林的幻圓」(圖三)，「棋盤迷」(《放》，頁 306) 的這類遊戲，不但可增進數字計算、找規則外，許多遊戲甚至可以創造出操作公式或證明，不但有趣好玩，讀者也可以更改規則、自創遊戲，輕鬆之餘還能快樂動動腦呢！



圖一 發揮你的邏輯推理能力(取自《數學放輕鬆》，頁 278)



圖二 拓樸謎題—剪刀、紐結和繩索 (取自《數學還是這麼有趣》頁 328)



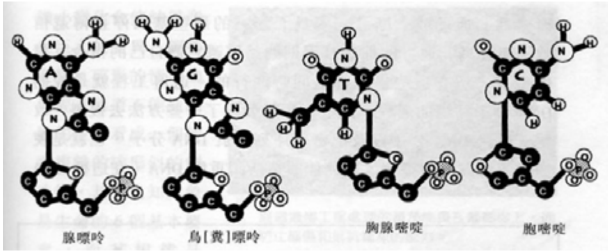
圖三 本傑明・富蘭克林的幻圓(取自《數學放輕鬆》頁 300)

除了趣味性之外，爲了能讓大家對數學更有感覺，T. 帕帕斯的書寫非常著重於「數學與自然的關係」、「數學與生活的連結」、「數學在科技的發展」，用這樣的方式呈現數學的實用性與多樣面貌。例如「哈雷彗星」(《原》，頁 24-26)、「地震與對數」(《原》，頁 35-36)、「海波的數學」(圖四)、「碎形雲」(《原》，頁 121)、「螺線—自然界中的數學」(《還》，頁 191-192)、「用數學註釋的花園」(《放，頁 119-143)、「e 和銀行業」(《還》，頁 305-307)、「數學與音樂」(圖五)、「數學與聲音」(《放》，頁 190-193)等，都顯現出他從生活中找題材的特色，也間接呈現了她擅長將數學與各領域連結，挖掘生活中各類的數學。藉這些例子激發大眾的數學直覺，間接產生對數學的喜愛，除了自然界原有的，作者也積極呈現現代的密碼工程、電腦計算與遺傳工程的數學，如「計算機、計算和電流」(《原》，頁 39-40)、「數學與遺傳工程」(圖六)，這些不只說明了數學在現代科技不可或缺的地位，中學生在

學習數學時，也更能感覺到此學門在應用方面的基本價值與未來潛力。

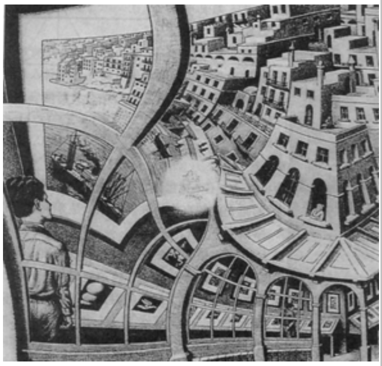
圖四 海波的數學(取自《數學還是這麼有趣》，頁 14)

圖五 數學與音樂(取自《數學放輕鬆》，頁 182)



圖六 數學與遺傳工程(取自《數學放輕鬆》，頁 237)

除了遊戲趣味與自然科技方面，「心理學」、「藝術」、「建築」與「宗教」當中所呈現的數學，在這三本當中也是非常豐富的。常用的錯視圖形就是數學在心理學最常用的，人的視覺在兩圖形比較後產生誤差，不管是判別長短、遠近都可以用分析的方式解讀，甚至也可以據此設計出不同的視覺感受，可參考「不可能的三接棍」(《原》，頁 27)、「視幻覺的歷史」(《原》，頁 200-201)、「對數學家的一次採訪」(《放》頁 31-34)；著名的藝術作品，如達文西「最後的晚餐」(《原》，頁 84)、艾雪、西雷特的眾多作品(《原》，頁 125；《放》，頁 85-88)等；更不用提數學在建築的展現與應用(參考「數學與建築」篇，《放》，頁 251-269)，在我們週遭的建築與雕塑中，每個形體的構成與空間搭配都與數學有密切相關 (參考「建築學與數學」，《還》，頁 162-164)，空間的美感比例搭配光線投影後，才會有最完美的作品呈現。而建築物在搭建過程中，如果沒有對於力學的計量，許多偉大的建築物根本建不起來。除了這些可以在周遭發現的藝術人文與數學有關，T. 帕帕斯甚至也不避諱地將一些與宗教相關的也放入書中，這樣一來也更讓人發現數學的無孔不入，主題如「數學與迷信」(《還》，335-337 頁)、數學、回教藝術與埃舍爾 (《還》，215 頁)。而她在這方面的取材，其實並不只侷限於某特定地方，而是從各國著名的藝術作品、建築等發現其數學呈現，這樣跨國際的識見不是一般教師可以比擬的，也著實令人訝異她能這樣廣泛的從各地方都能得到滋養。當然，這樣廣的視野也同樣發生在他寫數學史的相關篇章中 (參考圖八-十一)…



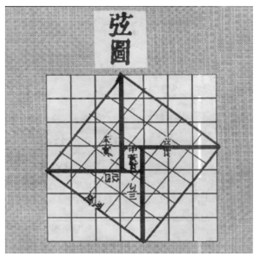
圖七 艾雪的《畫廊》(取自《數學放輕鬆》，86 頁)

T. 帕帕斯寫文章不只有在生活與遊戲中找靈感，也經常從數學史中尋找相關題材，人類歷史中與數學直接相關的多為計數符號、計算方法、工具、曆法或各地發現的文本，例如：「十進位的演化」(《原》，頁 15)、「數學符號的演化」(《原》等，頁 71)、「埃及的腕尺、掌尺與指尺」(圖八)、「馬雅人的數學」(圖九)、「中國的計算板」(《原》，頁 224)與弦圖 (圖十一)，而我們看早期的計算工具(《還》，頁 323-327)一篇，甚至就從由手算數開始 (亦可參考「用手指計算」，《原》，頁 78)，介紹印地安人結繩(亦可參考「結繩法」，《原》，頁 28-29)、中國與日本的算盤與算籌 (亦可參考「算盤」，《原》，頁 239；「日本算盤」，《還》，頁 340)、蘇格蘭人的納白爾骨算籌(亦可參考「納皮爾骨算籌」，《原》，頁 82-83)、法國帕斯卡的計算器 (亦可參考「帕斯卡的計算機」，《原》，頁 162)、美國的 H.霍勒利斯的人口普查機器與個人電腦，這類似乎都是 T. 帕帕斯的最愛。當然她也擅長用數學史中的故事來介紹數學知識，例如她在「帕斯卡三角形」(《原》，頁 58-59))的介紹當中就添加了許多帕斯卡的事蹟，對圓面積的推導也寫了一篇了「克卜勒對於圓面積的推導」(《還》，247 頁)，而在「非歐幾何」(《原》，頁 111-113)一文中也以龐加萊為主角，大談非歐。

圖八 埃及的腕尺(取自《數學還是這麼有趣》，頁 41)

圖九 馬雅日曆(取自《數學還是這麼有趣》，頁 53)

圖十 阿茲特克的太陽石(取自《原來數學這麼有趣》，頁 153)



圖十一 埃及的弦圖(取自《數學放輕鬆》，頁 158)

三、評論

筆者在閱讀過程當中，發現到 T. 帕帕斯的寫書一直是以著重寫生活數學短篇小品為主，內容也以數系計量、幾何、離散、鑲嵌為主，自成一格。將 T. 帕帕斯所寫文章與中學課程內容作比較後，我們發現書本中各數學單元的比重，的確和課本落差極大，或許因為講求直觀與趣味，所以，作者偏重幾何較多，代數和分析的部分則多略去不提。如果要拿來上課，其內容應可作為提起學生學習興趣、課堂穿插或課後遊戲等。

比較這三本書內容，T. 帕帕斯一開始在寫《原來數學這麼有趣》(1989)、《數學還是這麼有趣》(1991) 時，集合了之前所豐沛的作品與構思，想法取材跳躍，文字活潑，而後來在編寫《數學放輕鬆》的時候 (1994)，開始粗分 11 部分，作了與領域分類的修正，以便利讀者查閱，也整合先前所寫篇章內容，可說是編排上的一大進步。就內容而言，後者比先前的書更著重於現代社會與人文藝術，計算機革命、數學與藝術、歷史上的數學等面

向，然而，這樣的分類似乎也影響了部分書寫的內容，因為作品要配合分類，似乎也令人感覺到作者沒有先前寫《原來數學這麼有趣》《數學還是這麼有趣》那般隨性、快樂與自然了。這或許是一點遺憾，但絕不改大家對她的喜愛。

事實上，在中學數學領域中，已經難得有比此系列書內容涉略更多、更廣，或者內容取材更豐富、且跨國際的數學科普讀物出版。此書除了可讓數學教師對數學有更大的興趣與動力，以從事數學教學外，也非常適合用來啓發延伸學生思考。然而，筆者個人還是覺得原版的的美術編排真地有加強的空間，因為如果沒有經過推薦或閱讀，就算是放在書局顯眼的地方，也很少會吸引顧客多加留意，如果能加以細部修正文字編排與美術編輯，銷售量也許會更好。而內容則可再加深些，最重要是添加註解，這樣可提供給有興趣深入閱讀的讀者，尤其是對對數學教師而言，知道可延伸閱讀的資料便可越深入了解，因為教師對篇章越了解，就越能提供給學生更多更有趣的東西，筆者覺得這部分的加強有其必要。

從以上我們就可以大概知道，本系列書一直環繞著「趣味」二字，著重於數學趣味與直覺思考，並以短篇敘述的方式介紹多樣化的數學，融合了哲學心理、歷史文藝、藝術美學、自然科技等在其中，引發讀者想像，有如下特色：

圖十二 武士刀中的指數方冪(取自《數學還是這麼有趣》，頁 222)

- 數學思想直覺化
- 數學活動趣味化
- 數學學習生活化
- 數學觀念活用化
- 數學取材多樣化
- 數學工具科技化
- 數學視野國際化

《原來數學這麼有趣》、《數學還是這麼有趣》和《數學放輕鬆》三書最適合中學以上學生與數學教師閱讀，也極適合一般社會人士隨手翻閱。筆者將此一系列的套書評為 5 星等，除了在書中看到了以上的特色外，也因為他兼顧實用性與理想層次的恰到好處，且用詞平易近人簡單易懂，適合所有人閱讀。其內容甚至亦可做為報章雜誌每週的專欄小篇，對於中學生數學知識體系的啓蒙以及大眾對於數學的觀感，不可諱言的有著不可小覷的影響力。

相關閱讀

史都華 (葉李華譯) (2000).《大自然的數學遊戲》，台北：天下。
里翁賴爾.薩利姆、泰斯塔著；卡洛麗.薩利姆繪 (胡守仁譯) (2006).《最ㄅㄧㄤˋ的數學公式》，台北：天下。
喬治．史皮婁 (郭婷瑋 譯) (2007).《數字的祕密生命: 頂尖數學家如何工作和思考的 50 則有趣故事》，台北：臉譜。

蔡聰明 (2000).《數學的發現趣談》，台北：三民。
葛登能 (葉偉文譯) (2003).《迷宮、黃金比、索馬立方體》，台北：天下
漢斯・安森柏格 (席行蕙 譯) (2000).《數學小精靈》，台北：時報。
羅勃・伊斯威、傑瑞米・溫德漢 (蔡承志 譯) (2004).《為什麼公車一次來 3 班？81 個生活中隱藏的數學謎題》，台北：三言社。

參考資料

2007 年 6 月 20 日。取自：http://www.mathproductsplus.com/mathbooks.html。
2008 年 7 月 17 日。亞馬遜書店書摘：
http://www.amazon.com/Joy-Mathematics-Discovering-All-Around/dp/0933174659，
http://www.amazon.com/More-Joy-Mathematics-Exploring-Around/dp/093317473X，
http://www.amazon.com/Magic-Mathematics-Discovering-Spell/dp/0933174993。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）
宜蘭縣：陳敏晧（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！