HPM通訊

第十一卷 第九期 目錄（2008年9月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

十年一躍洋洲夢 贏得清流博新名

劉柏宏
國立勤益科技大學

提筆寫這篇祝賀《HPM 通訊》十年的文章，心情既喜亦怯。喜的是這樣的冷門刊物經歷十年考驗竟仍屹立不搖，且效用逐漸發酵，這在國內日趨競爭與現實的學術環境中著實不易。怯的是唯恐無法意到筆隨，而有負《HPM 通訊》團隊的貢獻。

首先談一下個人與 HPM 結緣的過程。1998 年《HPM 通訊》創刊，這一年也恰是個人學術生涯發展的起點。想當初只憑藉一股莫名的衝動就負笈美國留學，攻讀的是自己之前完全不曾接觸的數學教育領域。事實上當初曾計畫赴美攻讀數學史，只是當時與洪老師素昧平生，不敢多所叨擾請教，又不熟悉美國博士學程的設計方式，始終找不到門路，因此改爲申請數學教育學位。但由於對數學史的興趣，時時提醒自己未來的教育研究一定要結合數學史，只是當時尚不知道有 HPM 這一回事。

到美國之後前兩年忙於修課，對 HPM 雖開始略有所知，卻無暇顧及它的發展。直到 2000 年初在思考博士論文的方向時，由於指導教授「自由民主」的作風，允許我自行決定論文題目，因此便毫不考慮實踐當初自我許諾的初衷—從事 HPM 的研究。在知道 HPM 2000 年會議即將在台北召開後，便開始構思論文主題與內容，打算在 HPM 2000 年會議發表。只是當時一方面要準備資格考，一方面又要撰寫會議論文，蠟燭兩頭燒，實在無法在截止日期前提交論文。這時只好硬著頭皮從美國寫了封 email 給洪老師，請求寬限幾天，好讓我完成生平第一篇 HPM 論文。沒想到洪老師一口答應，而後來也接受了那篇相當「青澀」的文章，讓我第一次有機會參與 HPM 的舞台。也就因爲這個好的開始，使得這些年來有機會繼續在這個領域從事研究工作，並獲得充分的支援。由於對洪老師的提攜之情銘感於心，雖不曾直接受教於洪老師，卻始終以老師相稱。

《HPM 通訊》的每一篇文章雖不是千秋大作，但是從字裡行間都可以看出作者當初費心爬梳數學史料的鑿痕與結合教育的真誠。這些年來看著《HPM 通訊》期數逐月增厚，內容逐期充實，也感受到其所累積的能量正逐漸擴散。《HPM 通訊》團隊的成果不僅在國內數學教育界無人不知，在華人圈也已建立起一定的名聲。今年四月隨洪老師到香港參加研

討會，香港的教育行政官員和中小學教師就對於《HPM 通訊》團隊的成就讚譽有加，甚至表達來台參訪交流的意願。更值得一提的是，個人近年參加國際各項與 HPM 相關的學術會議時發現，許多學者雖然由於不識中文而不曾閱讀過《HPM 通訊》的文章，但對於洪老師和《HPM 通訊》團隊的表現都顯現敬佩之意，讓我這位《HPM 通訊》團隊之友與有榮焉。

個人的教學與研究受益於《HPM 通訊》甚多，付出卻相對少得可憐。所以著手寫這篇文章是要表達一種真實的回饋，絕無矯情溢美之詞。十年來《HPM 通訊》團隊已經培養出不少長江後浪，未來十年將會見識到這些後浪所捲起的壯闊波濤。然而個人認爲《HPM 通訊》的真正價值不在於累積多少篇文章和造就多少位人才，而在於那股無私的傻勁。在當今眾相追逐卓越的學術環境中，不時聽聞學術圈互相攻訐與掣肘的情形。而《HPM 通訊》團隊所展現出來的反而是一種素樸的感動，適度地結合國際視野和本土觀點將研究成果默默地推上國際舞台。這真可以說是「十年一躍洋洲夢，贏得清流博新名」。

加油！《HPM 通訊》團隊，你們個個都是 **H**igh **P**erformance **M**embers！

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至　suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

無限與微積分概念學習單的模組設計

II. 微積分的概念學習單

蘇惠玉
台北市立西松高中

一、 前言

在高中進行微積分單元的教學時，其中大部分教師以及教科書內容都是直接進入函數的極限定義，例如以「x 趨近於 2 時，函數 f(x)趨近於多少？」這樣的例子，來啓發引導學生學習函數的極限概念。然而，微積分的學習爲何與極限有關？甚至更基本的問題是，微積分這門學問，與學生之前學習過的其他數學知識有何不同？當對無窮大與無限小還一知半解時，學生如何對極限的學習賦予意義？

再者，在進行到多項式函數的導數教學時，同樣地，大部分教師以及教科書內容都是直接定義導數，然後，再說明導數的幾何意義與物理意義。這樣的教學順序容易讓學生產生疑問，「導數」這個東西是怎麼跑出來的？我們都知道，在數學發展的過程中，數學家絕不會先莫名其妙的定義一個新東西，然後再去尋找它的意義。科學或是數學的發展都告訴我們，通常是先有問題產生了以後，科學家或數學家們在嘗試解決的過程中，才會有新的發現或發明產生。因此，當學生開啓一段新知識的學習之旅時，告訴他/她我們爲何會走上這樣的旅程，這段行程和其它的有什麼不同，將能讓學生在這段學習旅程中更懂得欣賞其特殊之處，並對譬如微積分這門學科的風貌有更深刻的體會。

本文試著從數學史的角度切入來看導數的定義方式，配合學習單的學習形式，希望讓學生能夠接觸與學習在微積分產生之初時，費馬以及牛頓面對問題時的解決策略，從而期待學生能夠更充分地了解微積分的精神所在，以及使用極限概念來處理導數定義的數學發展過程與優勢。

二、 史料說明：問題的來源

在數學發展史上，隨著解析幾何的發明與函數觀念的採用，微積分技術的出現似乎已水到渠成，而當時十七世紀科學研究與應用的需求，更爲微積分技術的產生增強了社會脈絡面向的因素。在當時，主要的問題有四個類型：

I. 求瞬間速度與瞬間加速度。

在當時運動物體所涉及的速度與加速度是隨時間而變化的，已不能像計算平均速度時一般以距離除以時間來計算。

II. 找曲線之切線與法線。

由於透鏡設計的需求，當時研究光學的科學家們，如費馬、笛卡兒、惠更斯與牛頓等人必須知道光射向透鏡的角度，才能引用折射定律，因此，必須求出曲面的法線，而法線垂直切線，也轉換成求切線問題。另外，同樣來自於運動學的研究，運動物體在任意瞬間的運動方向，就是運動軌跡在那一點的切線方向，因此，也促進了曲線的切線求法之研究。

III. 求函數的極大值與極小值。

如在拋射運動中求能得到砲彈最大射程的角度以及拋射的最大高度；研究行星與太陽、地球之間的最大與最小距離。

IV. 求曲線的長度、曲線所圍的面積、曲面所圍的體積、物體的質量重心等。

希臘人本來已有用逼近法求體積與面積，但方法缺乏一般性，又常無法得到正確的答案。於是，在阿基米德的作品在歐洲廣爲流傳時，計算體積、面積及質量重心的興趣又再度興起。

在前面的四個問題類型中，前面三個問題本質上都是一種變量的瞬間變化率，而第四個問題爲前三個的逆問題。以求瞬間速度爲例，當物體以變速運動時，每一瞬間此物體都有一個瞬時速度，但是若用平均速度的求法來看，此時移動距離是 0，所花的時間也是 0，而 $\frac{0}{0}$ 是無意義的，所以，必須讓此時的變量時間有一段微小的變化（即微小的時間間隔），藉此來討論運動體在這一點左右的平均速度變化率。當這個微小的增量極微小，或是說可以無限小時，變化率所逼近的數，即爲所求的瞬時速度或切線斜率。然而，當吾人假設微小的增量然後順利求出變化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之後，又該怎麼讓這個微小的增量「消失」呢？以下，筆者將簡單介紹在微積分發展之初，幾位重要的數學家在這些問題上使用的方法，包括費馬、牛頓與萊布尼茲，由他們對無窮小量的使用與解釋，我們即可看出在微積分的基礎尚未穩定之初，這樣的技術所引發的爭議。

費馬與 *adequate*

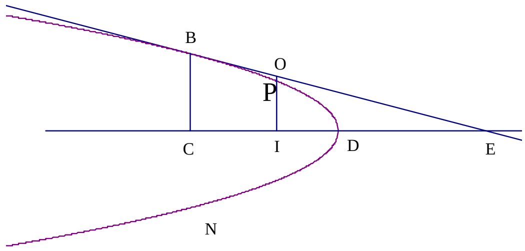
我們先來看看費馬求最大值以及切線的方法。在費馬於 1637 年寄出的一封信中，包含了他如何求函數最大值的方法，其中並收錄了他於 1629 年發現的切線求法：

> 求極大值與極小值的全部理論以二個未知量和下述法則為基礎：
> 設 a 是問題中的任一未知量，讓我們用包含 a 的次方的諸項來表示極大值或極小值。現在用 a+e 來代替原來的未知量 a，並且用包含 a 和 e 次方的諸項來表示極大值或極小值。然後使這兩個極值表達式相逼近（*adequate*，Diophantus 的術語，表示盡可能的逼近一個數)，並消去公共項，...用 e 或 e 的高次方除各項，使 e 從至少有一項中消失，然後捨棄所有仍有 e 的項，使兩邊的剩餘項相等。...最後這個方程式的解所產生的 a 值，代入原來的表達式就可得出極大值或極小值。
>
> 這裡舉一個例子：
> 將線段 AC 分成兩段，分段點 E，使得 AE×EC 有最大值。

如設AC=b，分成的兩線段長中一段爲a，所以另一段長爲b-a，它們的乘積AE×EC即爲 $ba-a^2$ ，我們要的就是這個積的最大值。現在設b的第一條線段爲a+e (e爲微小的變化量)，第二線段將爲b-a-e，它們的積 $(a+e)(b-a-e)=ba-a^2+be-2ae-e^2$；**這個表達式必須逼近前一個表達式**，即 $ba-a^2+be-2ae-e^2 \sim ba-a^2$，消去公共項後，得 $be\sim 2ae+e^2$，**再消去e**得b=2a。爲了解決所提問題，最後必須取a爲b的一半。我們很難指望有更一般的方法了。

費馬求最大值的基本想法，就如同刻卜勒在《測量酒桶的新立體幾何》中觀察到的結果一樣：「在最大值附近，在兩端的減少開始變得難以察覺」。所以，當 a 為最大值產生時的線段長，那麼在 a 的附近，如果增加了微小的長度 e，那麼，增加後的乘積（函數值）與原本的差異「難以察覺」，於是，費馬只好以「將他們盡可以的逼近」的說法來表達。

在同一封信中費馬也提到「應用上述的方法來求一條曲線在給定一點的切線」。如圖BDN為一拋物線，D為頂點，CD為直徑（對稱軸）。過拋物線上一點B作切線為BE，E為切線與直徑的交點。要求得過B點的切線，現在只要知道E點的位置（即CE的長度）即可作出。但是當橫座標增加或減少一個微小量時，如圖中的C減少到I，此時函數對應的點P，它的縱座標IP與IO非常的接近，所以可以用IO「逼近」IP。於是費馬選擇切線BE上一點O，過B與O作直徑的垂線，分別交於C與I，由於O點在拋物線外部，可得$\dfrac{CD}{DI}>\dfrac{BC^2}{OI^2}$，[1]但是因為三角形BCE與OIE相似，$\dfrac{BC^2}{OI^2}=\dfrac{CE^2}{IE^2}$，所以$\dfrac{CD}{DI}>\dfrac{CE^2}{IE^2}$。由於B點為給定的點，所以縱坐標BC已知，橫坐標CD也已知，設CD=d為已知量，CE＝a，CI＝e（減少的微小量），我們可得$\dfrac{d}{d-e}>\dfrac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$，即$da^2+de^2-2dae>da^2-a^2e$，「**讓他們盡可能的逼近**」，利用上一個方法，消去公共項，得到$de^2-2dae\sim -a^2e$，即$de^2+a^2e\sim 2dae$，同除以e，得$de+a^2\sim 2da$，「**將*de*項忽略不計**」，剩下$a^2=2da$，即a=2d。[2]



在費馬求最大值與切線的方法中，我們可以看出他對於瞬間變化率的處理方式，基本上我們現在也是用同樣的方法，只是在當時對於微小增量（費馬所用的 e）的解釋不盡完善：費馬先將兩邊同除以 e（此時 e 不等於 0），接著，又將剩下中含 e 的部分忽略不計（此時 e 等於 0），以及「讓他們盡可能的逼近」的這些部分，費馬只能經由幾何來解釋他的正確性，然而，他也知道他並沒有辦法有一個完善的理論解釋，所以，沒有將他的方法形成一般的性的技巧與理論，這個部分就交給牛頓與萊布尼茲了。

牛頓的流數

基本上，牛頓用的方法與費馬一般無異，例如牛頓在《曲線求積術》中求x^n的流數（即導數），在變量x增加了一微小增量成為$x+o$的同時，x^n將變為$(x+o)^n$，利用二項式定理展開得[3]

---

[1] 在此由於費馬選擇的拋物線型如 $4cx=y^2$，固有此比例。

[2] 費馬選擇此拋物線的原因可能在於阿波羅尼斯的《錐線論》的第一卷命題 33 即是此結果：CE（稱為次切距）為橫座標的兩倍。

[3] 牛頓將此方法稱為無窮級數法，我們一般稱為冪級數。他在《以無窮多項方程式進行分析》中將無窮級數的應用更向前推進，常以一種「無窮多項式」的形式來處理不能表示為單變量的有限多項式的代數關係式，例如$y=\dfrac{1}{1+x^2}$。

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$$

減去x^n後，剩下 $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$ 與o之比等於 $\frac{f(x+o)-f(x)}{o} =$ $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \ldots$ 接著，令含有增量o的項「消逝」，得到它們的最終比將等於 nx^{n-1} 。

在牛頓發明微積分的那幾年中，他所使用的技巧基本上都一樣，只是針對微小增量 *o* 這個備受爭議的基礎，他的想法與解釋一變再變，我們可以從他幾份重要論文中一窺究竟。牛頓首先於 1666 年撰寫了一份手稿，後來被稱爲《流數簡論》(*Tract on Fluxions*)，成爲牛頓發明微積分的重要論證。在其中，牛頓以運動學以及源自於運動的無限小的「瞬間」爲基礎來解釋他的方法，然而，在 1669 年寫成的《以無窮多項方程式進行分析》(*De Analysi Aequationes Numero Terminorum Infinitas*，一般簡稱《分析》)中，他不再以運動學的形式解釋，改以變元 x 來取代運動解釋的時間 t，在過程當中，常直接令微小增量 *o* 爲 0，此時他的微小增量是一種不能分割的量，在此篇論文中他說他「只做簡短解釋，不做精確證明」。

然而在 1671 年，牛頓爲改寫《分析》而寫成《流數法與無窮級數》（*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*，簡稱《流數法》)，其中再次恢復運動學的觀點，將變數 x 視爲連續的變化，o 爲變量（他稱爲流量）的「瞬」，在此篇論文中，牛頓嘗試去「證明」他的流數的求法，他說：

> 因設 o 是無限小，它可以表示量的瞬，那些包含它作因子的項，相對其他項而言將等於 0，所以我將它們捨棄而得到…

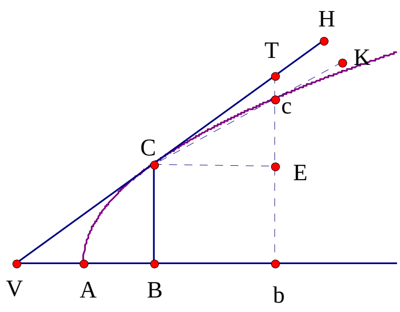
在 1693 年寫成的《曲線求積術》（*Tractatus de quadratura Curvarum*），[4]他的想法改以以「首末比」的方式提出，他說

> 流數非常接近於在相等但卻很小的時間間隔內生成的流量的增量，確切地說，它們是初生增量的最初比（they are the *first ratio* of the nascent augments），但可用任何與之成比例的線段來表示。

然後他又說：

> 為了同樣的目的，現在把流數理解為消逝部分的最終比 (It comes to the same purpose to take the fluxions in the *ultimate ratio* of the evanescent parts)。…

牛頓以切線來解釋他的「首末比」。作直線 Cc 並延長至 K。令縱坐標 bc 回到原先位置 BC，當與 c 趨合時，直線 CK 將與切線 CH 趨合，消逝三角形 Cec 的最終形式將變得與三角形 CET 相似，其消逝邊 CE，Ec 和 Cc 相互之比最終將等於另一三角形 CET 的邊 CE，ET 和 CT 之比，…若點與 c 之間相差任意小，則直線 CK 與切線 CH 同樣將相差任意小。爲使直線 CK 與切線 CH 重合，並能求出現段 CE，Ec，Cc 的最終比，點 C 與 c 必須趨近，並且完全重合。



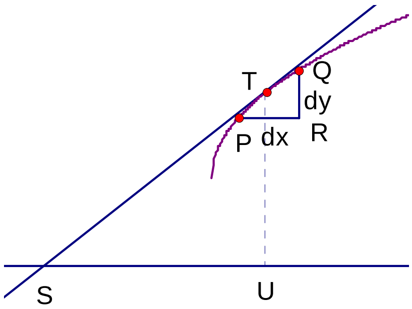
牛頓的「首末比」的方法，其實已有現在我們使用的極限想法在內。而在 1687 年的

4 以往認爲此篇的著成年代爲 1676 年。參考李文林主編之《數學珍寶》。

《自然哲學的數學原理》中，他已將微小量「瞬」稱爲「瞬逝的可分量」(evanescent divisible quantities)，視爲可以無止盡減小的量了。

萊布尼茲的 *dx* 與 *dy*

不同於牛頓處理微小增加量比值的想法，萊布尼茲直接處理 x 與 y 的無限小增加量，即他的微分 dx 與 dy，並決定它們之間的關係。在 1680 年的論文中，他的 dx 成爲橫座標的差分，dy 則是縱座標的差分，他說「現在 dx 和 dy 被當作無限小，或是在曲線上距離小於任意長的點」，dy 是縱座標 y 在 x 移動時的「瞬間增加量 (momentaneous increment)」，而求切線的最佳途徑即是求 $\frac{dy}{dx}$。如圖，要求過曲線上的 T 點的切線時時，在曲線上 T 點附近找點 P、Q，P 與 Q 點的距離可以任意小，萊布尼茲認爲弦 PQ 可視爲曲線在 P、Q 之間的部分，也可視爲切線的一部份。但這個無限小的三角形 PQR，卻保持與三角形 STU 相似，因此 $\frac{dy}{dx}=\frac{TU}{SU}$。對他而言，當 dx 與 dy 減少時，會達到近乎消失的小，或是無窮小的值，此時 dx 與 dy 的值不是 0，但是比任何給定的數都還要小。



無限小量的鬼魂

在微積分的技術與理論發展之初，備受攻擊的，就是無限小量的使用與解釋的含混不清。所以，牛頓一直改變他對軌跡、變化率以及微小增量的解釋，同樣的，萊布尼茲更不厭其煩地回答別人對他的質疑，尤其常常從哲學的角度來解釋他的想法，例如他在 1687 年寫給貝爾 (P. Bayle) 的信裡曾經提到：「在結束於某終點的任何假想過渡過程裡，我們可以引入一種廣義推理，將最後的終點也涵蓋在內。」所以當兩點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 越移越近時，他解釋這種過程：

> 但是我們可以想像有種過渡狀態，或者一種消逝狀態，此時雖沒有達到真正精確的相等或靜止，...但正要進入這種狀態，其差小於任何可指定的量；...
>
> 當談論無窮大（或更嚴格的，無止盡）的量，或無窮小的量（亦即，在我們知識範圍內最小的量）時，我們的意思是，它們只是用來指不確定的大或不確定的小，亦即想取多大就有多大，或想取多小就有多小，使得任何人可指定的誤差小於某個指定的量。

然而，不管種種的努力與辯解，無窮小量一直還是備受攻擊的焦點，其中以哲學家柏克萊主教提出的批評最爲嚴厲，他說：「如果我們假設增量消失了，當然也就必須假設它們的比例、它們的表示式，以及任何其他依此假設而導出的東西都將隨之消失。」他批評牛頓的瞬逝量的比值說：「它們既不是有限的量，也不是無窮小的量，又不是完全沒有，難道我們不能稱它們為消逝量的鬼魂嗎？」他也一視同仁的批評了萊布尼茲的無窮小量：

> 萊布尼茲和他的追隨者在他們的微分學裡毫不嚴謹，先是假設有、然後又捨去無窮小的量，這在理解上能算是多清晰，在推理上能算是多公正？任何思考者只要不預存支持他們的偏見，都可輕易看得出來。

以現在我們的後見之明來看，極限理論似乎是針對「無窮小量」問題的最適當解決之道。然而在當時，當柏克萊的批評引來相當多的回應時，許多的數學家確實也想要替微積

分建立嚴格的基礎，嘗試將「無窮小量」的概念說明得更清楚、更精確，這其中包含歐拉、拉格朗日等等。當然其中也有過一些人嘗試用「極限」概念來說明，例如十八世紀的達朗貝 (d'Alembert, 1717~1783)在《百科全書》的「極限」條目就曾指出：「極限理論是微分真正的形上學基礎」。然而，一直到十九世紀初柯西決定將微積分的基礎放在極限的概念上，微積分基礎的嚴格化才在他的努力下，稍微有點重要成果出現。

三、 學習單的設計

本學習單的設計目標，主要在於讓學生透過費馬與牛頓解決問題的策略與過程，看清問題的本質。例如在處理極值問題時，如何呈現極值點與周圍其他點之間的關係；處理切線問題時，如何確切地得到過某一點的切線等等。並從這兩位偉大數學家的想法與解決過程中，瞭解與體會在課程中導數定義方式的必須性，進一步讓學生建立起學習微積分的意義，與充分瞭解微積分所處理問題的本質，以及瞭解微積分與過去所學的「有限數學」不同之處。

本學習單的使用時機建議爲極限單元之後，並以此學習單當成微積分課程的入門。

四、微積分的概念學習單

Card 1　費馬 (Fermat, 1601-1665) 求極大值與極小值的方法

十七世紀由於科學的蓬勃發展，所產生的問題主要有四類：

(1) 求瞬間速度與瞬間加速度　(2) 求曲線的切線（法線）

(3) 求函數的極大值與極小值　(4) 求曲線的長度，曲線所圍的面積、體積，及物體的質量重心

以下我們來看看十七世紀初數學家們所用的方法，這些方法都促進了微積分方法的發明與理論的完整。

下面的方法摘錄自費馬 1637 年的一封信，其中，並收錄了他於 1629 年發現的切線求法。求極大值與極小值的全部理論以二個未知量和下述法則爲基礎：

> 設 a 是問題中的任一未知量，讓我們用包含 a 的次方的諸項來表示極大值或極小值。現在用 a+e 來代替原來的未知量 a，並且用包含 a 和 e 次方的諸項來表示極大值或極小值。然後使這兩個極值表達式相逼近 (*adequate*，Diophantus 的術語，表示盡可能的逼近一個數)，並消去公共項，…用 e 或 e 的高次方除各項，使 e 從至少有一項中消失，然後捨棄所有仍有 e 的項，使兩邊的剩餘項相等。…最後這個方程式的解所產生的 a 值，代入原來的表達式就可得出極大值或極小值。
>
> 這裡舉一個例子：
>
> 將線段 AC 分成兩段，分段點 E，使得 AE×EC 有最大值。

問題：

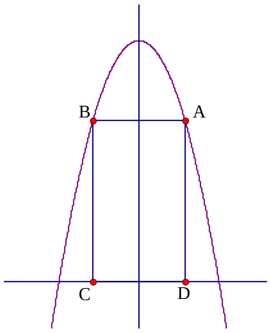
1. 設 AC=b。請用以前你學過的方法，求出使得有最大值的 E 點位置，及最大值爲何？
2. 以下是費馬的方法，請完成下列的各空格：

 設 AC=b，分成的兩線段長中一段爲 a，另一段長爲____________，它們的乘積

爲______________ 。我們要的就是這個積的最大值。現在設 b 的第一條線段爲 a+e(e 爲微小的變化量)，第二線段將爲_____________，它們的積將爲_______________；這個表達式必須逼近前一個表達式，消去公共項後得_________________，再消去 e 即得 a=_________ 。

3. 請用費馬的這個方法求下列問題的極大值：

有一拋物線 $y=9-x^2$ ，如圖，若 A（x, $9-x^2$ ），求內接矩形 ABCD 面積的最大值，此時 x＝？

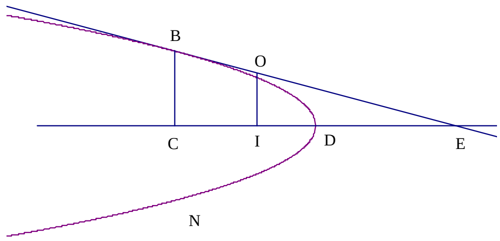


4.在費馬的一般解法中，他說「現在用 a+e 來代替原來的未知量 a，並且用包含 a 和 e 次方的諸項來表示極大值或極小值。然後使這兩個極值表達式相逼近」，你覺得這句話的意思是什麼？請解釋。

5. 你覺得費馬的方法正確嗎？有沒有什麼地方你覺得有問題？有的話請寫出。

Card 2　費馬求切線的方法

BDN 爲一拋物線，D 爲頂點，CD 爲直徑（對稱軸）。過拋物線上一點 B 作切線爲 BE，E 爲切線與直徑的交點。



選擇切線 BE 上一點 O，過 B 與 O 作直徑的垂線，分別交於 C 與 I，由於 O 點在拋物線外部，可得 $\dfrac{CD}{DI}>\dfrac{BC^2}{OI^2}$ ，但是因爲三角形 BCE 與 OIE 相似，$\dfrac{BC^2}{OI^2}=\dfrac{CE^2}{IE^2}$ ，所以 $\dfrac{CD}{DI}>\dfrac{CE^2}{IE^2}$。由於 B 點爲給定的點，所以縱坐標 BC 已知，橫坐標 CD 也已知，設 CD=d 爲已知量，CE＝a，CI＝e，我們可得 $\dfrac{d}{d-e}>\dfrac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$ ，

即 $da^2+de^2-2dae>da^2-a^2e$

「**讓他們盡可能的逼近**」，利用上一個方法，消去公共項，得到

$de^2-2dae\sim-a^2e$ ，即 $de^2+a^2e\sim 2dae$ ，同除以 e，得 $de+a^2\sim 2da$ ，

「**將 *de* 項忽略不計**」，剩下 $a^2=2da$ ，即 $a=2d$。

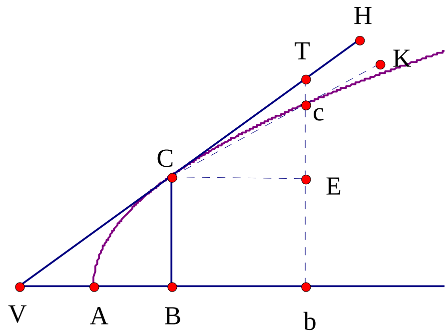
問題：

1. 若將拋物線 BDN 的直徑（對稱軸）放在坐標平面的 x 軸上，D 爲原點，假設正焦弦長爲 1，則拋物線 BDN 方程式爲何？
2. 在上述作法中，若要使得不等式兩邊「盡可能的逼近」，要如何才能做到？
3. 要「將 de 項忽略不計」，需要在什麼條件下才能如此作？
4. 你覺得費馬的這個方法，所求出過拋物線上一點的切線正確嗎？

Card 3 牛頓：《Tractatus de quadratura curvarum》（曲線求積術）

下面的方法出現在牛頓的《曲線求積術》，撰寫逾 1693 年，並於 1704 年作爲《光學》一書的附錄正式發表。牛頓以求切線的策略與方法，說明他的「流數方法」，並舉函數爲 $y=x^n$ 爲例，實際演練操作他的方法。

1. 設坐標BC從原處移動到新位置bc，作矩形BCEb，並畫直線VTH與曲線接觸於C，同時與直線bc和BA延長相交於V和T。Bb，Ec和Cc將是橫坐標AB、縱坐標BC和曲線Acc的生成增量；三角形CET的邊構成這些被認爲是初生增量的最初比，因此AB，BC、AC的流數比[5]將等於三角形CET的邊CE，ET和CT之比，並可用這些邊來表示，或同樣，可用與CET相似的三角形VBC的邊表示。



2. 爲了同樣的目的，現在把流數理解爲消逝部分的最終比(It comes to the same purpose to take the fluxions in the *ultimate ratio* of the evanescent parts)。…

作直線 Cc 並延長至 K。令縱坐標 bc 回到原先位置 BC，當 C 與 c 趨合時，直線 CK 將與切線 CH 趨合，消逝三角形 CEc 的最終形式將變得與三角形 CET 相似，其消逝邊 CE，Ec 和 Cc 相互之比最終將等於另一三角形 CET 的邊 CE，ET 和 CT 之比，從而線 AB，BC 和 AC 的流數也構成相同的比。若點 C 與 c 之間相差任意小，則直線 CK 與切線 CH 同樣將相差任意小。爲使直線 CK 與切線 CH 重合，並能求出現段 CE，Ec，Cc 的最終比，點 C 與 c 必須趨近，並且完全重合。在數學中即使是最微小的誤差也不應忽略。

3. 設量 x 均勻地流動，並設問題是要求 x^n 的流數。

在量 x 因流動而變爲 $x+o$ 的同時，量 x^n 將變爲 $(x+o)^n$，根據無窮級數法，就等於

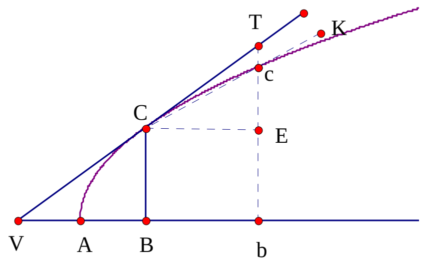
$$x^n+nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}oox^{n-2}+\&c$$

增量 o 與 $nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}oox^{n-2}+\&c$ 之比等於 1： $nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}ox^{n-2}+\&c$

現在令增量消逝，它們的最終比將等於 $\frac{1}{nx^{n-1}}$。

問題：

1. 就你所學過的，切線的定義爲何？
2. 在牛頓的方法敘述中，哪一段文字與你學過的切線定義雷同？
3. 設 C 點的座標爲 $(x, f(x))$，c 點的座標爲 $(x+o, f(x+o))$，



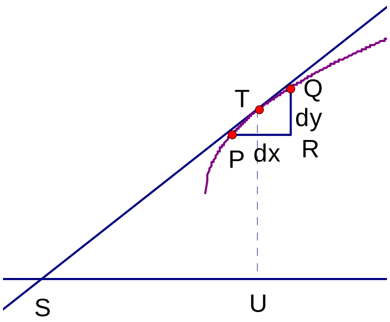
[5] 牛頓的「流數」，我們可以簡單的理解成兩變量。間的微小變化量的比值，即現在我們所稱的「導數」

則 $\frac{Ec}{CE}=?$

4. 令 $f(x)=x^n$ ，代入 3.中的 $\frac{Ec}{CE}$ ，化簡可得 $\frac{Ec}{CE}=?$
5. 你覺得牛頓的方法正確嗎？有沒有你覺得有問題的地方？有的話請寫出。

Card 4 萊布尼茲：差分 dx, dy

在 1680 年的論文中，萊布尼茲將 dx 當成為橫座標的差分，dy 則是縱座標的差分，dy 是縱座標 y 在 x 移動時的「瞬間增加量（momentaneous increment）」，而求切線的最佳途徑即是求 $\frac{dy}{dx}$ 。如圖，要求過曲線上的 T 點的切線時時，在曲線上 T 點附近找點 P、Q，P 與 Q 點的距離可以任意小，萊布尼茲認為弦 PQ 可視為曲線在 P、Q 之間的部分，也可視為切線的一部份。但這個無限小的三角形 PQR，卻保持與三角形 STU 相似，因此 $\frac{dy}{dx}=\frac{TU}{SU}$ 。



問題：

1. 你覺得萊布尼茲對切線求法得策略，與牛頓是否相同？
2. 你覺得為何萊布尼茲要特別說明三角形 PQR 與三角形 STU 相似？

參考文獻

Calinger, R. ed. (1995). *Classics of Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Katz, Victor J. (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCoollins College Publishers.

李文林主編 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。

Kline, M. (1983).《數學史—數學思想的發展》（林炎全、洪萬生、楊康景松譯），台北：九章出版社。

Kline, M.(2004).《數學確定性的失落》（趙學信、翁秉仁譯），台北：台灣商務印書館。

你也可以是牛頓

洪萬生
國立台灣師範大學數學系

書名：你也可以是牛頓：數理能力訓練
作者：岡部恆治、鈴木敏史
中譯者：朱立真
審訂者：楊遵榮教授（台灣師範大學物理系）
出版社：商周出版
出版年份：2004
出版資料：平裝，214 頁
國際書碼：ISBN 986-124-224-4

一、前言

剛開始翻閱這本書，就看到作者引述諾貝爾化學獎得主福井謙一的學問之道：

> 我們無法知道所學的知識會以怎樣的形式對我們產生幫助，把學問比喻為植物的話，每一種學問的地下莖總會在我們料想不到的地方有所連結。……所以我們更應該更廣泛學習。
>
> 在大學教書的時候，我總會對即將展翅高飛的學生提起這個比喻，告訴他們廣泛學習的意義。我總是勸學生要專心學習乍看之下與研究方向無關的專門知識，甚至是與所學截然不同的學問。與所學差距愈大的學問，對我們將來要從事的創意工作愈是有重大的意義。聽起來有些大言不慚，但這是我根據自身經驗所深切感受到的。

這一段話呼應了傑出女數學家桑雅．卡巴列夫斯基 (Sonya Kovalevsky) 的心路歷程：

> 我了解你們會覺得奇怪，為什麼我能一邊忙文學，一邊搞數學。很多人由於從來沒有機會通曉更多的數學，都把數學和算術弄混在一起，而認為它是一門枯燥乏味的科學。實質上，它倒是一門需要大量想像力的科學呢。本世紀一位數學家領袖就曾非常正確地陳述這種情形。他說：要成為數學家，不可能不是心靈上的詩人。當然，為了領悟這個定義的精確性，我們必須拋棄古代人那種認為「詩人總是無中生有，且發明與想像力乃是同一回事」的偏見。對我來說，詩人只是感知了一般人所沒有感知到的東西，他們看的也比一般人深。其實數學家所做的不也是同樣的事？我這一輩子始終無法決定，到底是那個偏好較大些，是數學呢？還是文學？只要我的心智逐漸為純抽象的玄思所苦，我的大腦就會逐漸立即偏向人生經驗的省察，偏向一些美好的文藝作品；反之，當生活中的每一樣事開始令我感到無聊且提不起勁來時，只有科學上那些永恆的律則才能吸引我的興緻。[6]

[6] 引Lynn Osen，《女數學家列傳》(Women in Mathematics)（彭婉如、洪萬生合譯，邱守榕審訂）（台北：九章出版社，1997），頁 136-137。

兩相對照，讓我們得以體會廣泛的通識學習與追究事物本質的數學之重要性。

事實上，正如作者在〈前言〉中自述：

> 學習數學可以讓我們從結構了解事物，並且深入追究事物的本質。追溯本質聽起來有一點難，但它卻能幫助我們有效解決身邊的問題。
>
> 這是因為在解決數學題的過程中，我們將學會分辨本質的重要程度，知道哪些可以忽略不去計較。……只要你能分辨出真正重要與可以忽略的部分（不重要的），便能看清複雜的問題，直接針對本質解決問題。
>
> ……
>
> 理科也是從結構來理解事物，並回溯本質來做思考。另外，理科不在意細節，而是著眼於現象之間的共通點，藉以推測肉眼所看不到的機制與結構。

本書之中心思想便是數理知識「結構」的重大意義，這對於中小學目前國內的數理教學，應該也有莫大的啓發才是。

二、內容簡介

本書共分九章，目錄依次如下：

第1章　先動手做再說

第2章　抽象化的重要性

第3章　挖掘地下莖

第4章　類推與推測的重要性

第5章　理解差異

第6章　概略思考

第7章　對稱性的重要

第8章　培養靈感

第9章　數學與理科的學習法

從標題來看，這九章的主題有理論 (theory)，有實作 (practice) 兩個面向，其中又有數學教育關懷。所有這些，其實都在呼應「從做中學」(learning by doing) 的精神，這是數學普及作品的書寫策略之一，作者顯然也意在貼近設想讀者的需求。

現在，我們就依序簡介本書各章內容。

在第 1 章中，作者開宗明義就指出這是一個「忽視計算的時代」（第 1 節），作者認爲過渡依賴電算機的結果，會在中小學教育階段帶來令人擔憂的後遺症，因爲「電子計算機的計算流程屬於黑箱作業，我們看不到進位、退位等計算的結構，卻能瞬間得到答案（跟算盤完全不同）。領導世界數學的小平邦彥老師便警告：『太依賴電子計算機，以後就沒有人會製造電子計算機了。』確實透過研究我們已經清楚知道，一直被忽視的單純計算事實上對腦有很大的刺激作用。」因此，作者主張：「在這個忽視計算的時代，有疑問應該先提筆計算，用身旁的工具做實驗－這種積極、大膽的行動力對培養數學、理科能力更顯重要。」計算涉及動手做，而後者當然是理科實驗之必須。尤其「理科是以自然爲對象的科學，上課教的只是自然的骨架，所以實際面對自然這個對手時，光靠課本的知識根本不夠。唯有實際動手嘗試錯誤，在解決問題的同時爲知識增加血肉，才是學好理科的重要態度。」

基於此，作者一再強調「做了再說」、「就是要動手做」，並提供幾個動手做的訓練題。

抽象化爲什麼重要？在第 2 章中，作者指出：「抽象化是找出理論本質的方法，使得結果在條件設定稍微偏離現實的情形下也能成立，有助於化繁為簡。也因此，抽象化的用途很廣。」作者在本章中引述了好幾個入學考試題目和「週刊謎題」，以說明許多解法的抽象思考面向之不足。此外，作者也指出：「不只是數學，理科也需要抽象化。在我們周圍存在許多現象，只將注意力放在現象的差異上，對於學習理科會有負面的影響，有時候我們需要把事物之間的細小差異去除掉，觀察現象之間的『共通性』。」爲了說明這種共通性，作者連結了日式庭園中的竹架、間歇噴泉、板塊型地震，甚至於舊式馬桶構造，藉以點出它們之間的「相似性」。最後，還設計「教人如何走到某地」的例題，進行抽象化的訓練。

第 3 章標題－挖掘「地下莖」－令人耳目一新！我們在前言中轉引了福井謙一的一段話，就是針對地下莖的說法。正如前一章，作者先舉兩個數學例題之後，再說明理科的「地下莖」：

> 學習物理的時候，理解現象之間的相似性要比理解其相異性更為重要，從看起來完全不同的現象中，發現其間共通的原理（即福井先生所謂的「地下莖」）是物理的目的。

針對此一特性，作者還指出：

> 到高中階段為止所學的理科科目中，物理學是最強調找出「地下莖」的學科，其次是化學。其實所有最頂端的自然科學研究，都是不斷地重複在尋找「地下莖」的研究，即使是社會科學（經濟與法律、社會學等）、人文科學（文學、哲學、歷史、地理學、心理學等）也是如此。

作者所舉的理科例子分別涉及「不穩定平衡」、「相似立體」和「角動量守恆」。至於數學地下莖，則是以等差級數爲例，不過，它的地下莖卻延伸到了「平面截斷立體體積」之計算。這是利用連續的立體體積去「模擬」等差級數求和的範例，值得吾輩仿效，以其數學本質一也之故。

上一段提及的最後範例，其實也涉及「類推」，而這正是第 4 章的主題之一。不過，在本章中，作者主要討論如何進行推測工作，仿前幾章體例，本章仍安排訓練題目，用以訓練本章主題－推測能力。

在第 5 章中，作者主要討論「理解差異」的能力。有關這一點，作者一開始就邀請「讀者與第 6 章一起閱讀，因為『注意差異做有創意的思考』與『忽視無關緊要的差異綜觀整體結構』都很重要。」換句話說，這有點接近一般人常說的「同中求異」與「異中求同」。不過，根據作者在本章所舉的例子，他們比較強調「比較思考」中所掌握的「誤差」之意義。由於誤差的處理也涉及「概略思考」，所以，在本書第 6 章，作者反過來要求我們「不要在意細節」！這是因爲要磨練我們對數學的感覺，與其（如例題所示）拘泥形式，「不如概略看問題，思考問題的本質何在，會比較有效且實用」。譬如說吧，誠如作者所指出，「『忽視細微處』的原則，在微分積分裡是很重要的。」因此，「藉由將『越來越小的數值當作 0』，使微分與積分的關係式等逐漸確立。在各個點用顯微鏡放大曲線，圓滑的曲線看起來就像一條直線利用這樣的觀點，於是有了切線的想法。」

在第 7 章中，作者所謂的「對稱性的重要性」，主要針對理科的應用進行討論，其中

有一些例子如「作用力與反作用力」等等，都幫助我們看到對稱性的巧妙應用。至於第 8 章的「培養靈感」之內容，相對於前幾章而言，則更加強調數學教育改革某些議題（譬如綜合幾何教學）的重要性。在本章第 1 節中，作者就引述福井謙一（前引的諾貝爾化學獎得主）的「現身說法」:

> 解幾何題的時候，當然可以用分析的方式解題，但是通常靈光一現畫條補助線便可以簡單解題。
>
> 幾何的好處在於從許多解法中玩味出簡單的解法，這樣的訓練可以讓頭腦更靈活、產生新點子，而這樣的訓練也必須及時（愈早愈好）進行。

這些說法的主要訴求，顯然針對數學教育的課程改革。因此，作者在〈如何培養靈感〉一節中所彙整的本章要點如 (1) 累積基礎知識、基礎技術；(2) 先做再說；(3) 找出相似點；(4) 比較思考；(5) 接觸現實萬象；(6) 動手做等五項，就多少呼應了學習數學的一般性建議，此外，在訓練題中，也都以幾何題爲主。足見本書之主旨，確有強烈的數學教育改革之關懷。

事實上，這也充分地解釋了本書第 9 章的書寫目的。顧名思義，本章就是想要針對數學與理科提供一些學習方法。本書所謂理科，是指物理、化學、生物和地質學，不過，此處之地質學比較近於目前的地球科學。顯然爲了綜合數學與理科的學習方法，作者簡要地說明了何謂數學、數學與理科之關係，以及理科的國民素養爲何。同時，顯然也爲了博雅素養，作者指出不論是文組或理組主修學生，應該對整個科學有廣泛的認識，能夠綜觀全局的分析能力，以及對於科技帶給人類社會的衝擊具有反思能力等等，因此，作者認爲生活在二十一世紀的我們，至少應該擁有如下知識素養：

・概略的科學史
・身旁所發生的現象以及應用在日常生活的科學技術
・環境問題等社會問題
・邏輯思考力、科學方法的實踐能力

以及物理、化學生物及地質學等方面的基礎知識。基於此，作者則揭櫫數學的學習方法如下：

(1) 首先要閱讀教科書
(2) 活用筆記
(3) 解題重點

另一方面，理科的學習法則除了上述三項之外，還加上「善用題庫加強知識」和「從其他媒體吸收資訊」兩項。其中之叮嚀應該出自第一線的中學教師，而這無疑是另一作者鈴木敏史的貢獻。最後，作者勉勵讀者要「讓自己喜歡數學與理科」。

三、評論

本書表現了典型的岡部科普書寫風格－深刻、有趣且平易近人。正如其他他所出版的數學普及作品（含數學漫畫）一樣，岡部總是就近取譬，不避鄙俗瑣碎，而且說理頭頭是道，讓我們充分體會他的科普書寫功力。因此，他的數學普及作品都維持了相當的水準，也值得科普工作者參考借鏡。

就本書而言，作者的賣點當然還是五花八門、令人匪夷所思的例題。譬如說吧，下列幾題應該很容易吸引讀者的眼光：

- 世界上為什麼不可能有 20 m 的巨人和 2cm 的侏儒？
- 厚 0.01mm 的紙對折 100 次之後，其厚度相當於宇宙的盡頭！這是真的嗎？
- 為什麼我們能舒服地待在充滿 90℃ 熱氣的三溫暖蒸汽室內，卻受不了 90℃的熱水？
- 混合所有波長的光會得到白色，混合所有水彩的顏料卻變成黑色，這是什麼道理？
- 表面光滑的球跟表面凹凸的高爾夫球哪個飛得遠？

事實上，作者取材的範圍遍及數學、物理、化學、生物及地質（按即地球科學）等學科，至於其解說當然都應用了數學的結構面向知識，也就是說，作者訴諸了某些數學理論，而不只是運用了解題技巧。此外，本書取材也旁及雜誌週刊的問題與（通常是教師的投書）解答，甚至還有公務員考試題目等等。所有這些，都充分表示作者在書寫中，總是可以掌握數學知識的「有趣」與「有用」兩個面向。

不過，本書有些地方難免語焉不詳，譬如有關非歐幾何與愛因斯坦廣義相對論的連結 (p. 63)，解說就過份簡略，無法呈現挖掘「地下莖」的價值與意義。其次，有關「誤差」的不可忽略，在「理解差異」的脈絡中也未曾完全凸顯，作者無法在此說明科學革命中的「異例」(anomaly) 之意義，實在相當可惜！其實，作者既然提及刻卜勒 (Johannes Kepler) 發現第谷 (Tycho Brahe) 的火星運行數據，與火星繞日的圓周運動有 8 秒弧的誤差，然而，他們卻無意說明何以刻卜勒企圖理解此一異例，並在最終發現了橢圓軌道。(p. 126) 再有，作者在「對稱性的重要」這一章中，並未介紹對稱性在數學上的應用，尤其是群論與幾何乃至方程論之關係，誠然是美中不足。事實上，群論與量子力學之關係也極爲密切。在科普書籍中，群論淺嚐則止，大概不致於被譏爲唬唬學問吧！

最後，本書作者的教育關懷也值得注意！這種關懷使得本書最後一章讀起來有一點升學指南的味道。這也難怪，因爲作者之一的鈴木敏史，正是一位高中物理教師，而眾所周知，日本升學競爭也非常慘烈。不過，如果一般的日本高中教師和學生願意閱讀本書－可能被本書中經常提及的解題方法或策略所吸引，那麼，除了數學學習的一般建議之外，本書通過令人意想不到的精彩例題之解說，「滲透」數學知識結構的重大意義，或許才是作者真正的意圖吧！