

# HPM 通訊

第十一卷 第十一期 目錄 (2008年11月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ 台灣數學博物館建置緣起
- ▣ 台灣數學博物館網站導覽
- ▣ 敦煌算書的算學特色
- ▣ 立體動態幾何軟體 Cabri 3D 簡介

## 台灣數學博物館建置緣起

洪萬生

台灣師範大學數學系

本博物館之建置 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)，主要得自國科會科教處所贊助的三年期研究計畫－「數學文化工藝虛擬博物館」（2008/08-2010/07，歸屬大眾科學學門），以及本系學術資源之支援。我謹代表本建置團隊，向國科會與台灣師範大學數學系，表示由衷的謝忱。同時，我們也必須向顧問群趙文敏教授、黃文達教授、蔡天鉞教授，以及黃福坤教授致意，希望大家隨時賜教指正，讓本館之經營，得以盡善盡美。

建置此一博物館，乃是基於我們分享數學知識/活動的價值與意義之願景，至於發展之利基，則是由於

1. 本系所擁有全國數學系中最豐沛的數學、資訊統計、數學教育與數學史之相關資源，同時，基於培育中學師資的傳統學風，絕大部分師資都極樂意適時地為數學的正規教育與大眾科學教育貢獻心力。本系所專任師資目前達 38 名（可望維持在 40 名左右），其中大約每年有 4-6 名可以投入本博物館之建置、後續維護以及進一步發展之工作。如能再結合已退休、外系或校外學者，則每年至少保持十名教授人力分配使用。
2. 本系所從 96 學年度開始，每學期至少舉辦十場「通往數學聖殿講座」(<http://www.math.ntnu.edu.tw/admin/mathtalk/>)，積極經營一個溫馨的數學文化環境，藉以豐富數學知識活動的多元面向，並期待師生都樂意分享數學的價值與意義。
3. 本系所同仁有意在本數學館（建築物成 L 形）後方規劃數學文化園區。此一構想將與本博物館之實體建築連成一氣，同時，研發、教育及展示也可以充分結合。
4. 筆者十年前創刊《HPM 通訊》，訓練了七十多名擁有數學史/HPM 素養的中學教師，這些可觀的人力資源，可以保證這一博物館的永續經營。

儘管如此，台灣教育界、文化界乃至其他民間的人力和物力，仍然是我們打算積極結合的對象。我們將秉持「分享」的願景，在華人社群中，為數學知識的普及，樹立一個指標性的標竿。

目前，本館仍處於草創階段，一切都在摸索與實驗，至盼閱聽人隨時批評與指教。

最後，基於分享的原則，本館展品歡迎轉載或使用。不過，它們當然都受到智慧財產權相關法令的保護，因此，如有前述之打算，請與各該作者或本館相關管理員聯繫，以便處理。

## 網站導覽

洪萬生

台灣師範大學數學系

歡迎咱大家入館參觀！基於數學教育者的「分享」之核心價值，這一虛擬博物館的展覽設計與空間規劃，希望可以滿足所有喜好數學知識活動的心靈。由於面向一般大眾，所以，尖端的數學研究活動不在我們考量範圍之內。在那之外，我們的展品完全針對 9-99 歲者設計，從摺紙剪紙、胃痛問題、魔術方塊、正多面體、數學步道、文本解析到科普評論與寫作等等，應有盡有，只要敞開心胸，保證大家都會滿載而歸！

一般博物館都會規劃導覽動線，方便時間匆促的現代人，在最短的時間內吸收最多的資訊！嚴肅地說，我們不希望參觀者來去匆匆，因此，開館的主張就是希望一開始讓大家隨興瀏覽，多享受一點閒暇，說不定你會發現連連的驚奇！當然，首度參訪也許沒有預留足夠時間，走馬看花自是在所難免。但是，請你不要忘了再度光臨，這也是我們的期待與榮幸！未來，我們將就某些主題研發展品，屆時一定規劃參訪路線，滿足大家的期待。

現在，既然你已經入館了，我們還是提供一點即時的資訊，請你參考指教。首先，如果你喜歡數學普及書籍，請你進入「科普特區」，觀賞我們提供的深度書評或新書介紹。由於大部分科普書寫策略都離不開歷史敘事，因此，你或許也有興趣到「HPM」、「數學史」和「數理文本解析&導讀」等專櫃逛一逛，沾染一點數學發展的時間維度。當然，如果你對數學遊戲有興趣，那麼，「胃痛問題」也好，「魔術方塊」也好，「正多面體」也好，「Nash 棋」也好，都應該可以適當滿足你的胃口才是。再不然，如果你是老師，正在搜尋一些可用的教學材料，那麼，「動態幾何」、「曲線與曲面」、「數學步道」、「數學劇本」、「數食店月刊」、「尺規作圖」等專櫃，一定多少可以呼應你的需求。這些與第一線教學有關的專櫃，大都是由中學教師所負責，他（她）們的實際經驗一定可以提供一些貼心的建議，為關心數學教育成效者分憂。其中，我們尤其希望有創辦類似「數食店月刊」的老師，願意與我們分享他（她）們的奉獻與成果。

本館草創伊始，簡陋在所難免，因此，非常希望大家的大力支持與不吝指教！如有同好願意出面經營專櫃或擔任志工，請與我們聯繫！讓我們一起攜手，永續經營這一個分享數學知識活動的平台，讓它成為台灣數學教育者的共同記憶。

最後，我們還要再一次感謝國科會科教處的贊助，本系同仁人力資源的挹注，以及許多中學教師的奉獻。此外，同仁與志工在這幾週全心全力的投入，也是本館規模初立的保證，願共勉之！

# 敦煌算書的算學特色

陳敏皓

國立蘭陽女中

## 摘要

本文擬從調查西域諸民族的學識出發，進而討論敦煌算書文本，並且分類算書的形式，重點著重這些算書的算學特色，如九九歌訣的出現、《甲種敦煌算書》的價值與特色、《田積表》的價值與功用、基本單位的確定。分類並比較考古出土的新疆出土文物，將數學史料、古典文獻資源、考古成果結合，希望能對敦煌算書的特色有進一步認識，做一點彌縫補缺的工作。

關鍵詞：敦煌算書、算學特色、算經

## I. 前言

筆者利用《舊唐書》的史料發現，西域諸民族雖然算學能力不若漢民族，但是，也並非完全無數學概念，這是數學史論述容易忽略之處。此外，敦煌算書的九九歌訣出現籌算計算，也是筆者深究之處。針對 P. 2667《甲種敦煌算書》中「營造部第七」的問題，筆者比對蕭默所著的《敦煌建築研究》，發現其中問題中的形狀竟與敦煌常見「宮闕」一致。有關 P. 2490《田積表》的意義與功用，筆者也提出自己的推論。筆者發現 S.0930《立成算經》中的長度與面積單位，與《孫子算經》類似，至於重量與容量單位，竟與王莽新嘉量單位不謀而合，原因為何？可能需要更多的考古資料。有關金屬密度比重方面，筆者也利用史料與考古記錄，針對金銀銅鐵的比重問題提出說明。上述諸論點為筆者初探敦煌算書所獲得的研究成果，尚請諸方家指正。

## II. 文獻探討

數學史家李儼（1892-1963 年）早在 1926 年於《中大季刊》發表〈《敦煌石室》算書〉論文，接著，陸續刊出〈中算術錄〉、〈敦煌石室《算經一卷并序》〉、〈敦煌石室立成算經〉等相關專文，<sup>1</sup>為敦煌算書研究的先驅。其校注考釋敦煌算書各卷，則可參見李儼〈唐代算學史〉，收入氏著《中國算學史論叢》（台北：正中書局，1954），頁 26-99，該文至今仍是研究唐朝算學的經典論述。另一方面，許康的〈敦煌算書透露的科學與社會信息〉（發表於《敦煌研究》），討論敦煌算書的科學意義與社會面向的連結。李並成的〈從敦煌算經看我國唐宋時代的初級數學教育〉（發表於《數學教學研究》），從敦煌算經本身來論述的數學教育與蒙學教育。郭正忠的兩篇論文〈《甲種敦煌算書》的考校與釋補〉（發表於《自然科學史研究》）、〈一部失落北朝算書寫本〉（發表於《中國學術》），重新考釋甲種敦煌算書文本，對於重新詮釋敦煌算書有直接的貢獻。本篇論文基於前述學者的努力，從算書本身的所呈現的價值與特色出發，筆者試圖重新評估敦煌算書在數學史上的地位。

## III. 敦煌的歷史背景

根據唐史專家杜希德（Denis Twitchett, 1925-2006）教授的論述，<sup>2</sup>他認為這些敦煌殘

<sup>1</sup> 關於敦煌算書研究相關論文可參閱鄭阿財、朱鳳玉主編，《敦煌學研究論著目錄（1908~1997）》（台北：漢學研究中心，2000），頁 475。

<sup>2</sup> 關於杜希德教授生平與著作可參閱賴瑞和，〈追憶杜希德教授〉，《漢學研究通訊》，第 26 卷第 4 期，（台

卷的年代應落在 406 年與 995 年之間。<sup>3</sup>筆者首先概論敦煌的歷史背景，從以下三個面向切入，來說明敦煌算書所處的歷史背景與地理位置，並從調查敦煌西域諸民族的學識，以釐清敦煌西域諸民族並非全然是化外之民。

### III.1 敦煌的歷史時期分類

據賴瑞和教授的分類，敦煌的歷史時期，大致可分為三個階段，一是隋唐時期（581-755），此時的敦煌及西域地區大致上是隋唐兩朝的版圖，直到公元 755 年爆發安史之亂；二是吐蕃時期（786-848），此時的敦煌霸主為吐蕃贊普；三是歸義軍時期（848-1036），此刻的敦煌掌控權為張義潮、曹議金家族，<sup>4</sup>直到 1036 年西夏佔領沙洲（今敦煌）。<sup>5</sup>

### III.2 敦煌的地理位置

敦煌位於甘肅省西端（東經 95 度，北緯 40 度附近），是中國古代絲綢之路要道，據《通典》卷一百七十四州郡四所載：「燉煌，...去西京四千八百里，去東京五千六百五十里，戶二千二百三十七，口八千七百五十六。」<sup>6</sup>唐代的旅行速率是有限制，如《唐律疏議箋解》卷十〈職制〉中所載：「公式令：<sup>7</sup>諸行程，馬日七十里，步及驢五十里，車卅里。其水程，重船溯流，河日卅里，江四十里，餘水四十五里。空十船河四十里，江五十里，餘水六十里。重船、空船順流，河日一百五十里，江一百里，餘水七十里……」<sup>8</sup>所以，唐代庶民若想從長安騎馬前往敦煌，至少需費時兩個多月；騎驢前往的話，則至少需三個多月。<sup>9</sup>因此，由於所處位置之遙，所以，我們不難理解為什麼敦煌的算經僅有區區十一部，另也正由於位置偏遠，使得敦煌文獻躲過唐武宗李炎在位期間（840-846），推行一系列「滅佛」政策，讓研究者有幸研究敦煌算經的相關議題。

### III.3 敦煌西域諸民族的學識調查

《舊唐書》卷一百九十六上列傳第一百四十六上〈吐蕃上〉稱：「其國人號其王為贊普，相為大論、小論，以統理國事。無文字，刻木結繩為約。」又文中：「時吐蕃使奏云：『公主（案：金成公主）請毛詩、禮記、左傳、文選各一部。』制令祕書省寫與之。正字于修烈上疏請曰：『聞吐蕃之性，剽悍果決，敏情持銳，善學不迴。若達於書，必能知戰……』」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-泥婆羅〉稱：「泥婆羅國，在吐蕃西…俗重博戲，好吹蠡擊鼓。頗解推測盈虛，兼通曆術……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-黨項羌〉稱：「黨項羌，在古析支之地，漢西羌之別種也…無文字，但候草木以記歲時……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-高昌〉稱：「高昌者，漢車師前王

---

北，2007），頁 24-34。

<sup>3</sup> Denis Twitchett, "Chinese Social History from the Seventh to the Tenth Century: The Tunhuang Documents and Their Implication", *Past and Present*, 35 (1966): 35.

<sup>4</sup> 榮新江，《歸義軍史研究》（上海：上海古籍出版社，1996）。

<sup>5</sup> 另可參閱榮新江，《敦煌學十八講》（北京：北京大學出版社，2001）書中的第一講：〈中國歷史上的敦煌〉。

<sup>6</sup> 約在七世紀到十世紀，中國古籍所載的「燉煌」即現在「敦煌」一詞，原文中「西京」即「長安」為現在的「西安」，「東京」即「洛陽」，原文載於《通典》，〔唐〕杜佑撰，王文錦等點校（北京：中華書局，1989），頁 4556。

<sup>7</sup> 此公式令為敦煌發現唐天寶令式表殘卷，現藏法國巴黎國立圖書館，編號P.2504，參閱劉俊文，《唐律疏議箋解》（北京：中華書局，1996），頁 838。

<sup>8</sup> 劉俊文，《唐律疏議箋解》（北京：中華書局，1996），頁 838。

<sup>9</sup> 關於唐代旅行等相關問題可參閱李德輝，《唐代交通與文學》（長沙：湖南人民出版社，2003），頁 201-216。

之庭，後漢戊己校尉之故地，在京師西四千三百里……有文字，知書計，所置官亦採中國之號焉……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-吐谷渾〉稱：「吐谷渾，其先居於徙河之清山，屬晉亂，始度隴，止於甘松之南，洮水之西，南及白蘭，地數千里…其俗頗識文字……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-龜茲〉稱：「龜茲國，即漢西域舊地也，在京師西七千五百里……學胡書及婆羅門書、算計之事……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-疏勒〉稱：「疏勒國，即漢時舊地也……有胡書文字……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-天竺〉稱：「天竺國，即漢之身毒國，或云婆羅門地也。在蔥嶺西北，周三萬餘里……有文字，善天文算曆之術。其人皆學《悉曇章》，<sup>10</sup>云是梵天法，書於貝多樹葉已紀事，……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-康國〉稱：「康國，即漢康居之國也…俗習胡書。善商賈，爭分銖之利。男子年二十，即遠之旁國，來適中夏，利之所在，無所不到……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-波斯〉稱：「波斯國，在京師西一萬五千三百里…文字同於諸胡……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-拂菻〉稱：「拂菻國，一名大秦，在西海之上，東南與波斯接，地方萬里……百姓有事者，即以書投囊中，王還宮省發，理其枉直……」

《舊唐書》卷一百九十八列傳第一百四十八〈西戎-大食〉稱：「大食國，本在波斯之西…亦有文字……」

茲將上述諸民族的識字（有文字）、知算術、知天文曆算、善商賈與否？列表如下：

種族名稱	識字（有文字）	知算術	知天文曆算	善商賈
吐蕃	無	無	無	無
泥婆羅	無	有	有	無
黨項羌	無	無	無	無
高昌	有	有	無	無
吐谷渾	有	無	無	無
龜茲	有	有	無	無
疏勒	有	無	無	無
天竺	有	有	有	無
康國	有	無	無	有
波斯	有	無	無	無
拂菻	有	無	無	無
大食	有	無	無	無
總計（有）	9	4	2	1

<sup>10</sup> 關於《悉曇章》歌詞的研究可參考周廣榮，〈敦煌《悉曇章》歌詞源流考略〉，《敦煌研究》，1 總 67（蘭州，2001），頁 141-150。

由上表可知，西域諸民族的識字狀態高，知算術的情形約佔一半，知天文曆算與善商賈屬於少數民族特點。

#### IV. 敦煌算書的特色

就目前筆者所視，敦煌殘卷中號為算經者共有 11 部，名稱及編號與算經所置卷數如下：

法藏敦煌西域文獻			英藏敦煌文獻		
名稱	編號	算經所置卷數	名稱	編號	算經所置卷數
《算表》又名《田積表》	P.2490	14	《算經》	S.0019	1
《算書》	P.2667	17	《算經》	S.0663	2
《算經一卷》	P.3349	23	《立成算經一卷》 <sup>11</sup>	S.0930	2
			《九九乘法歌》	S.4569	6
			《算經》	S.4661	6
			《算經》	S.4760	6
			《算經》	S.5779	9
			《算經》	S.5859	9

##### IV.1 九九歌訣的出現

敦煌殘卷中有提及九九歌訣相關資料，有S.0930《立成算經一卷》、S.0019《算經》、S.4569《九九乘法歌》、S.5859《算經》。回顧中國古代的九九歌訣（或歌辭）：「九九八十一，八九七十二，……二二如四。」<sup>12</sup>共 $8+7+\dots+1=36$ 句，從戰國初年至漢朝時，九九歌訣加入「一九如九，一八如八，……一一如一。」等九句，即 $36+9=45$ 句，這就是敦煌算經S.4569《九九乘法歌》圖一所示，《夏侯陽算經》亦云：「夫乘除之法，先明九九。」而九九歌訣在中國數學教育史與珠算史上，具有舉足輕重的角色，如南宋數學家楊輝在其《乘除通變本末》卷上〈習算綱目〉一節提到：<sup>13</sup>「先念九九合數，一一如一至九九八十一，自小至大，用法不出於此。」<sup>14</sup>另元朝數學家朱世杰在《算學啓蒙》卷首〈新編算學啓蒙總括〉總括中，<sup>15</sup>首次列出與現在完全相同的九九乘法表全文，即「一一如一，一二如二，二二如四，一三如三，……一九如九，…八九七十二，九九八十一。」，稱為「釋

<sup>11</sup> 「立成算經」原名「立成芊經」。P.3349 中亦提及：「凡芊者，天地之經緯，羣生之元首。」又云：「凡芊者正身端坐，一從右膝而起，先識其位，一縱十橫，百立千僵，萬百相似，千十相望。」《孫子算經》序曰：「凡算者，天地之經緯，羣生之元首。」類比可知，「芊」即「算」。

<sup>12</sup> 「如」即「等於」之意。九九歌訣爲了學童學習數學的入門，引入「如」字以合諧音律。

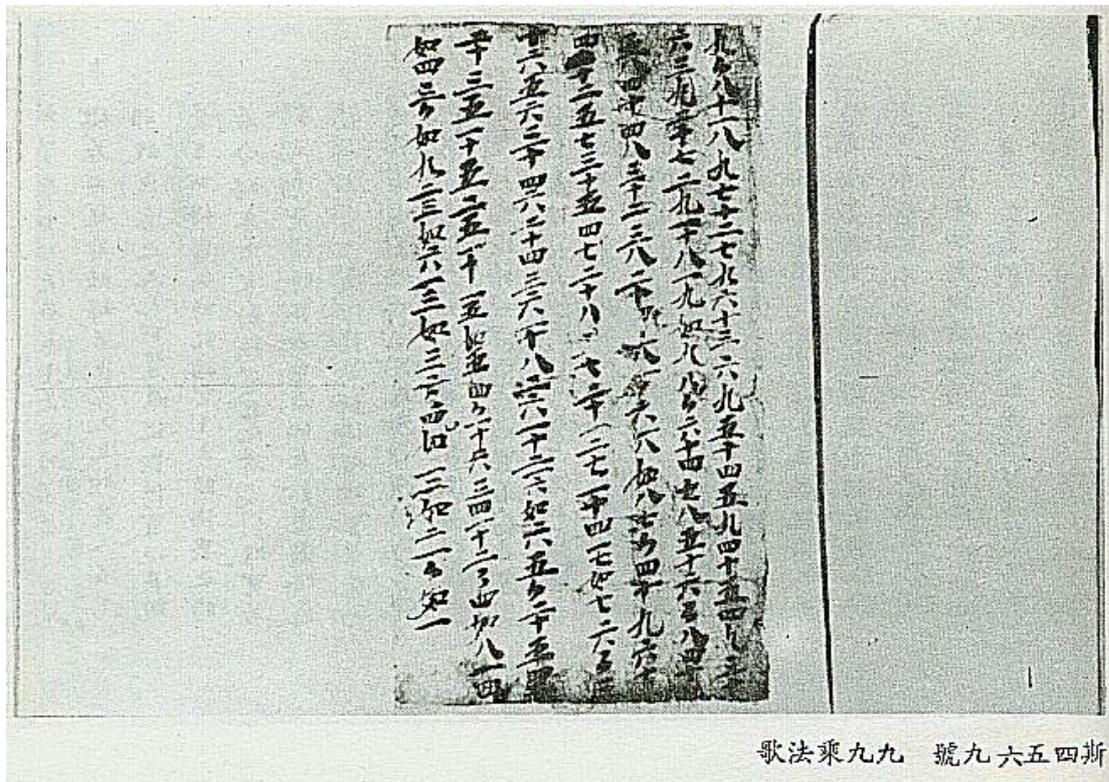
<sup>13</sup> 楊輝的數學研究的重點在於計算方面，他對籌算乘除捷演算法進行綜合性論述，其數學書共五種二十一卷，即《詳解九章演算法》十二卷（1261年）、《日用演算法》二卷（1262年）、《乘除通變本末》三卷（1274年）、《田畝比類乘除演算法》二卷（1275年）、《續古摘奇演算法》二卷（1275年）。

<sup>14</sup> 郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙—數學卷（一）》（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1-1048。

<sup>15</sup> 朱世傑，字漢卿，號松庭，燕山（今北京）人。他長期從事數學研究和教育事業，以數學名家周遊各地

九數法」。

至於九九歌訣運用到珠算可從明朝萬曆六年（1578年）柯尚遷所著的《數學通軌》卷一〈學算須知〉中「習九九數總念歌」：<sup>16</sup>「一一如一，一二如二，二二如四，一三如三，……一九如九，……八九七十二，九九八十一。」內容與「釋九數法」無異。



圖一 敦煌算書 S.4569，名《九九乘法歌》。

另一點值得注意的是，一般數學史家認為九九歌訣所代表的數學意義為乘法或累加的概念，但是，出人意料之外的是，敦煌算經中S.0019《算經》（圖二所示）卷末提到：「九九八十一，自相乘得六千五百六十一；八九七十二，自相乘得五千一百八十四，……二九一十八，自相乘得三百廿四。」驗之 $81^2 = 6561$ ， $72^2 = 5184$ ，…… $18^2 = 324$ 均無誤，這種「自相乘」的數學概念即現代數學名詞「平方」，此外，結語為「九九一凡總得三百九十六，自相乘得一十五萬六千八百一十六。」即 $9 \times (2+3+\dots+9) = 9 \times \frac{8 \times 11}{2} = 396$ ，而

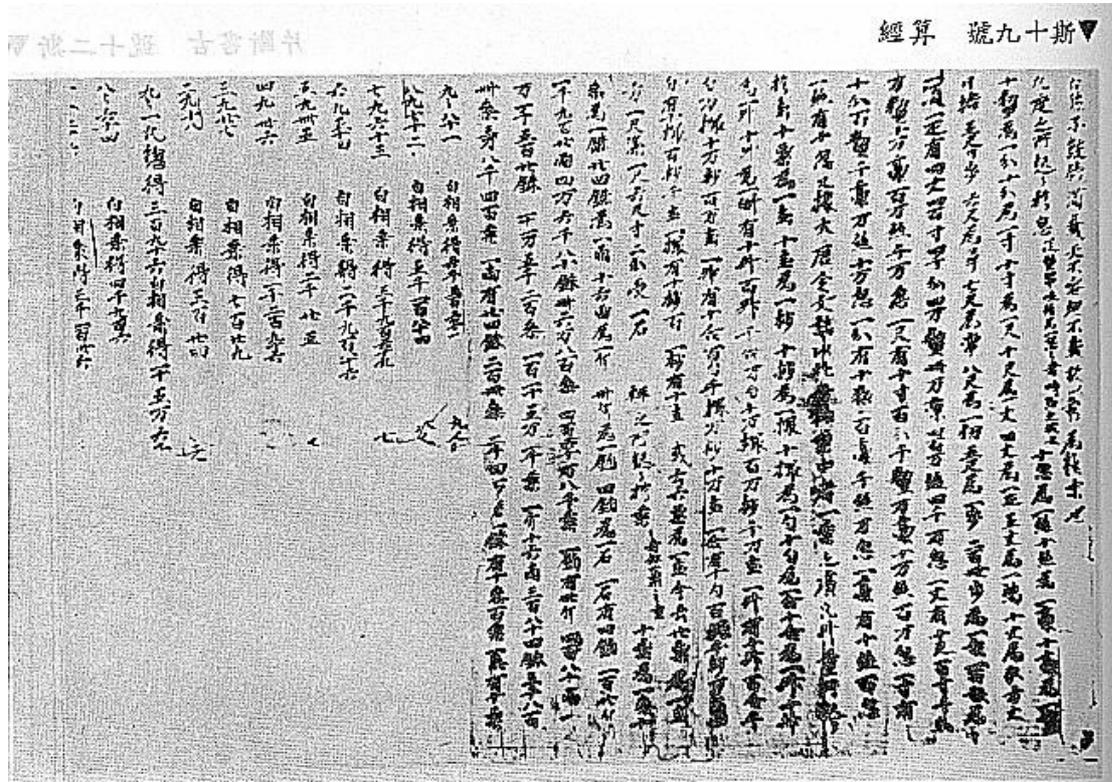
$396^2 = 156816$ ，亦無誤，此為現今級數之意涵。P. 3349 中更列舉九九歌訣中所有數值的自相乘值，正是在中原算經中少見的數學模式，可能與敦煌居民生活方式有關，因為域外中國被視為是數學能力較低，所以，當他（她）們需要自相乘值（完全平方數）時，如：貨物交易、土地丈量、土地買賣等，<sup>17</sup>這些算經所列舉的值就被當為查表或紀錄的工具。例

20 多年。其數學論著有《算學啓蒙》三卷（1299年）和《四元玉鑒》三卷（1303年）。

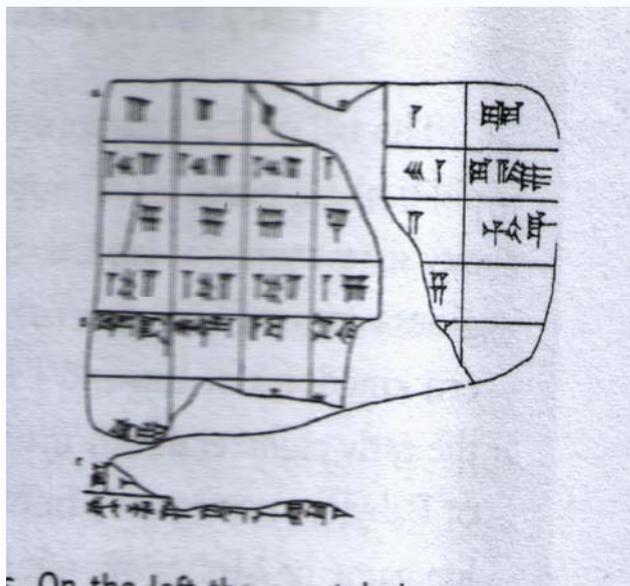
<sup>16</sup> 《數學通軌》全名《曲禮外集補學禮六藝附錄數學通軌》集之十五。

<sup>17</sup> 關於土地買賣等議題可參閱趙雲旗，〈唐代敦煌吐魯番地區土地買賣研究〉，《敦煌研究》，4 總 66（蘭州，

如：古文明美索不達米亞 (Mesopotamia, 希臘文, 意為「兩河之間」) 文化中, 蘇美人 (Sumerian)、巴比倫人 (Babylonian)、亞述人 (Assyrian) 也有類似的數值表, 如圖三所示。<sup>18</sup>



圖二 敦煌算書 S.0019, 名《算經》



圖三 美索不達米亞文化中的數值表

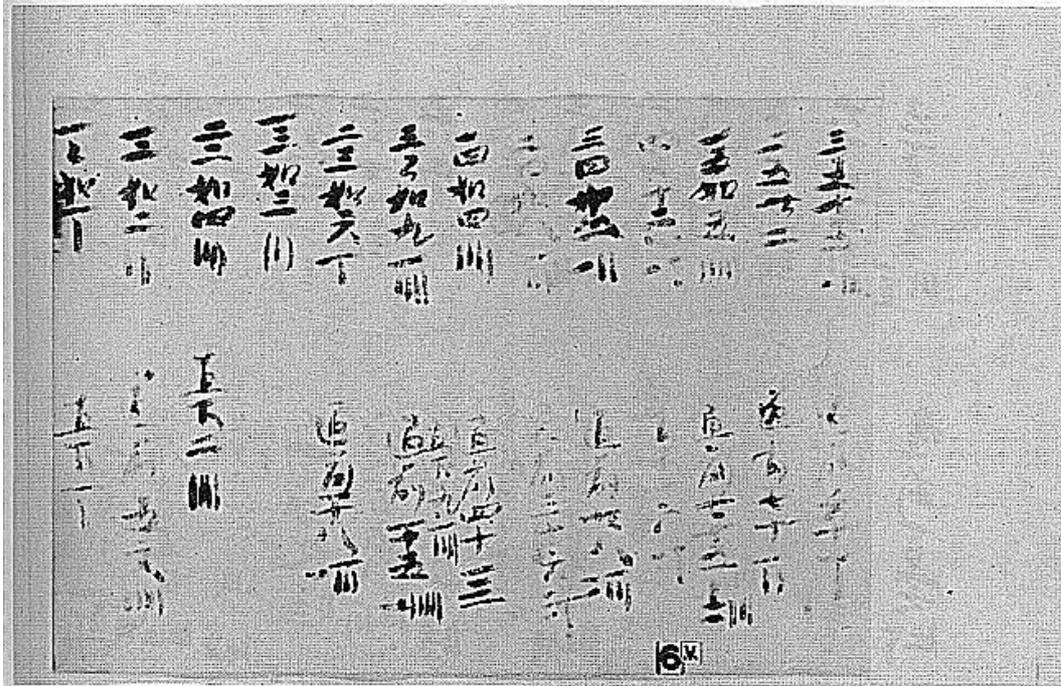
2000), 頁 112-119。

<sup>18</sup> 數值對應值可參閱Campbell-Kelly, Martin/Croarken, Mary/Flood, Raymond/Robson, Eleanor. *The history of mathematical tables: from Sumer to spreadsheets* (Oxford: Oxford University Press, 2003), pp. 23-24.

敦煌殘卷中九九歌訣還有一個特色，便是其呈現方式除了數值（number value）之外，還別列算籌形式（如附錄 1），如圖四所示。要了解古代中國如何「佈籌」，主要參考《孫子算經》中所言：「凡算之法，先識其位，一從十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當。」<sup>19</sup>值得注意的是，此算籌數碼表示法中並無零的符號，遇有零時則以空位表示。<sup>20</sup>接下來的問題是這些算籌如何攜帶的問題？正好唐代筆記小說《酉陽雜俎》中有一〈烏賊〉條稱：「昔秦王東遊棄算袋於海，化為此魚，形如算袋，兩袋極長。」<sup>21</sup>所以，這種算籌擺置就不禁令人懷疑，這些九九歌訣的功能除了實用商業外，可能還具有教育意義，楊秀清於〈淺談唐、宋時期敦煌地區的學生生活—以學郎詩和學郎題記為中心〉文中，推論敦煌學生學習的價值觀取向，當受科舉制影響。<sup>22</sup>而唐代政府曾訂定了詳細算學修習期限與學生考核辦法。在修習期限方面：

凡算學，《孫子》、《五曹》共限一歲，《九章》、《海島》共三歲，《張丘建》、《夏侯陽》各一歲，《周髀》、《五經算》共一歲，《綴術》四歲，《輯古》三歲，《記遺》、《三等數》皆兼習之。<sup>23</sup>

因此，九九歌訣出現算籌形式應屬合宜的社會情形。



圖四 敦煌算書 S.0930，名《立成算經》

未完，下期待續

<sup>19</sup> 轉引洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻，《數之起源—中國數學史開章《算數書》》（台北：臺灣商務印書館，2006），頁 16。

<sup>20</sup> 參考王青建，《〈古籌算考釋〉研究》，《自然科學史研究》，2 卷 17（北京，1998），頁 113。

<sup>21</sup> 《酉陽雜俎》，〔唐〕段成式撰（台北：臺灣商務印書館，1965），頁 126。

<sup>22</sup> 楊秀清，〈淺談唐、宋時期敦煌地區的學生生活—以學郎詩和學郎題記為中心〉，《敦煌研究》，4 總 62（蘭州，1999），頁 139。

<sup>23</sup> 《新唐書》卷 44〈志三十四·選舉上〉，頁 1160-1161。

# 立體動態幾何軟體 Cabri 3D 簡介

林倉億

台南一中

## 一、前言

在空間向量或立體幾何的實際教學上，礙於教學工具（通常是粉筆與黑板），多數教師幾乎都是將原是三維的圖形畫在二維的黑板上後，再靠一張嘴與各式手勢，帶領學生運用想像力，去想像、掌握立體圖形的性質，或找尋解題的關鍵線索。這樣的教學方式固然可以訓練學生的空間想像力，但一遇到空間想像力較薄弱的學生，或是學生想的跟老師想的一點都不像的時候，教起來就會有不少的無力感。就在這樣的困擾下，筆者接觸到了 Cabri 3D 這套軟體，雖然現在仍是初學者，但發現它確實能夠彌補教學上的不足，在此獻醜，向大家介紹這套軟體。

## 二、什麼是 Cabri 3D？

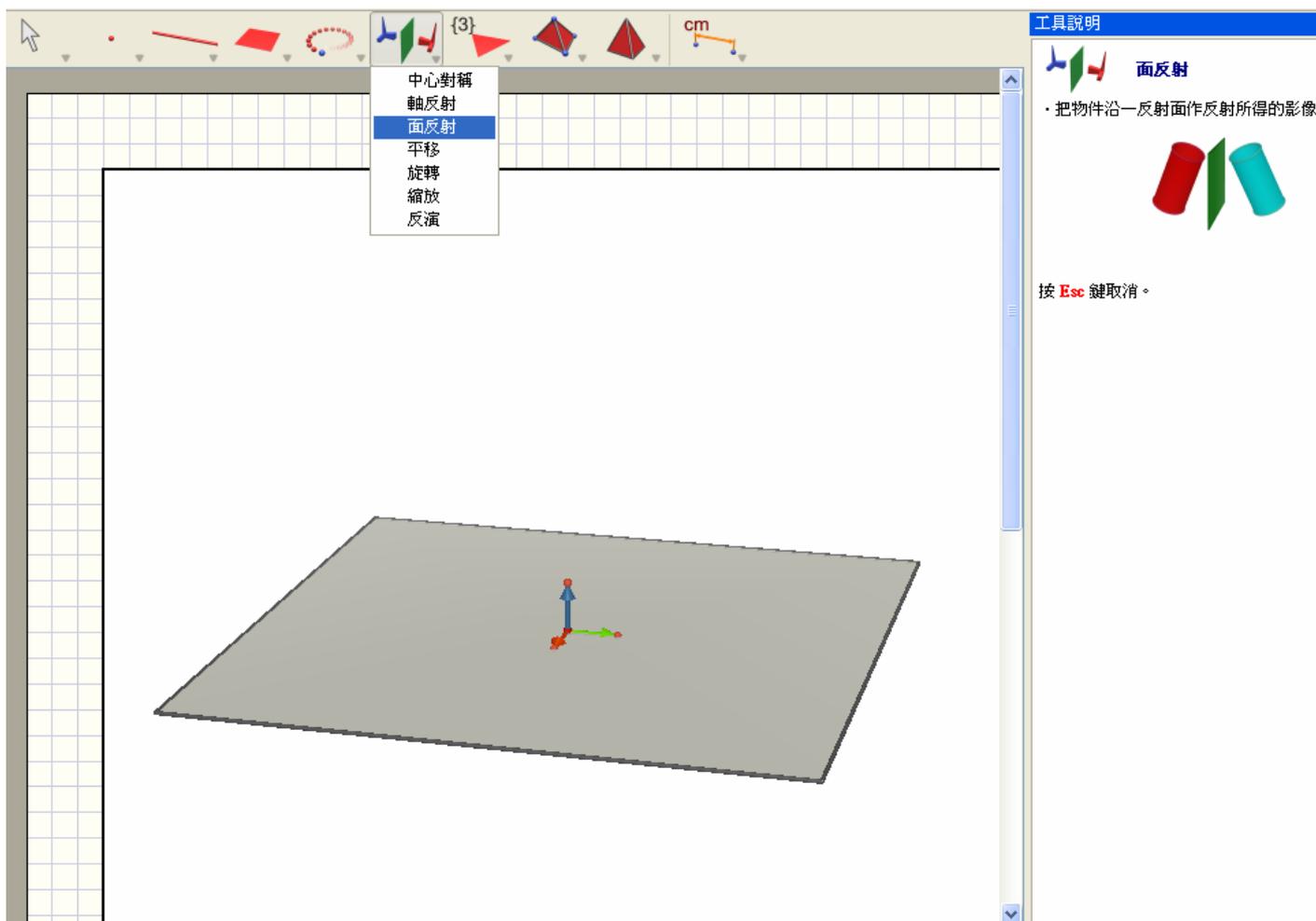
2004 年 9 月問世的 Cabri 3D，是第一套動態立體幾何軟體，它不但讓使用者可以容易地做出立體圖形，更只要按住滑鼠右鍵，就可以隨意地將圖形做三度空間的旋轉，也就是說，可隨意地改變視角；此外，也只需要操作滑鼠，使用者就可以對圖形進行簡易的動態模擬。從 2004 年至今，已有幾個升級版本，最新的一個版本是 Cabri 3D v2（文後提到此軟體，均指此一版本），已有中文化的介面，使用上更為方便。更貼心的是，使用者若對選取的功能不清楚，只要按下「F1」鍵，立刻就有簡要的中文說明。Cabri 3D 的工具列中，有下列的基本功能：<sup>1</sup>

類別	項目
點	作點、作交點
線	作直線、作線段、作射線、作向量、作圓、作弧、作圓錐曲線、作相交線（截線）
面	作平面、作多邊形、作三角形、作半平面、作扇形、作圓錐、作圓柱、作球面
垂直平分	作垂直線（面）、作平行線（面）、作垂直平分面、作角平分面、作中點、作和向量、作外積、長度轉移、軌跡
變換	作點對稱、作線對稱、作面對稱、作平移、作旋轉、作縮放、作反演
正多邊形	作正三角形、作正方形、作正五邊形、作正六邊形、作正八邊形、作正十邊形、作正十二邊形、作正五角星形
多面體	作四面體、作長方體、作角柱體、作角錐體、作任意多面體、展開多面體、用平面截多面體
正多面體	作正四面體、作正六面體、作正八面體、作正十二面體、作正二十面體

<sup>1</sup> 下表中的名稱，有些是筆者依其功能命名，與軟體中顯示的名稱不盡相同。

<b>度量與 計算</b>	量距離、量長度、量面積、量體積、量角度、求內積、 求坐標與方程式、常用的計算功能
-------------------	---

上述這些功能，筆者特別提及幾個。一是向量相關的功能，有作和向量、作外積與求內積；二是求坐標與方程式，它可直接顯示任一點或任一向量的坐標，亦可直接顯示任一直線、平面或球面的方程式；三是作圓錐曲線，可作過給定五點的圓錐曲線，亦可作與同平面五條線相切的圓錐曲線。整體看來，Cabri 3D將可提供教師許多操作簡易又功能強大的工具，若能善加利用，將對教學有莫大的幫助。讀者可上官方網站下載免費的試用版本，<sup>2</sup>親身體驗Cabri 3D的功能。



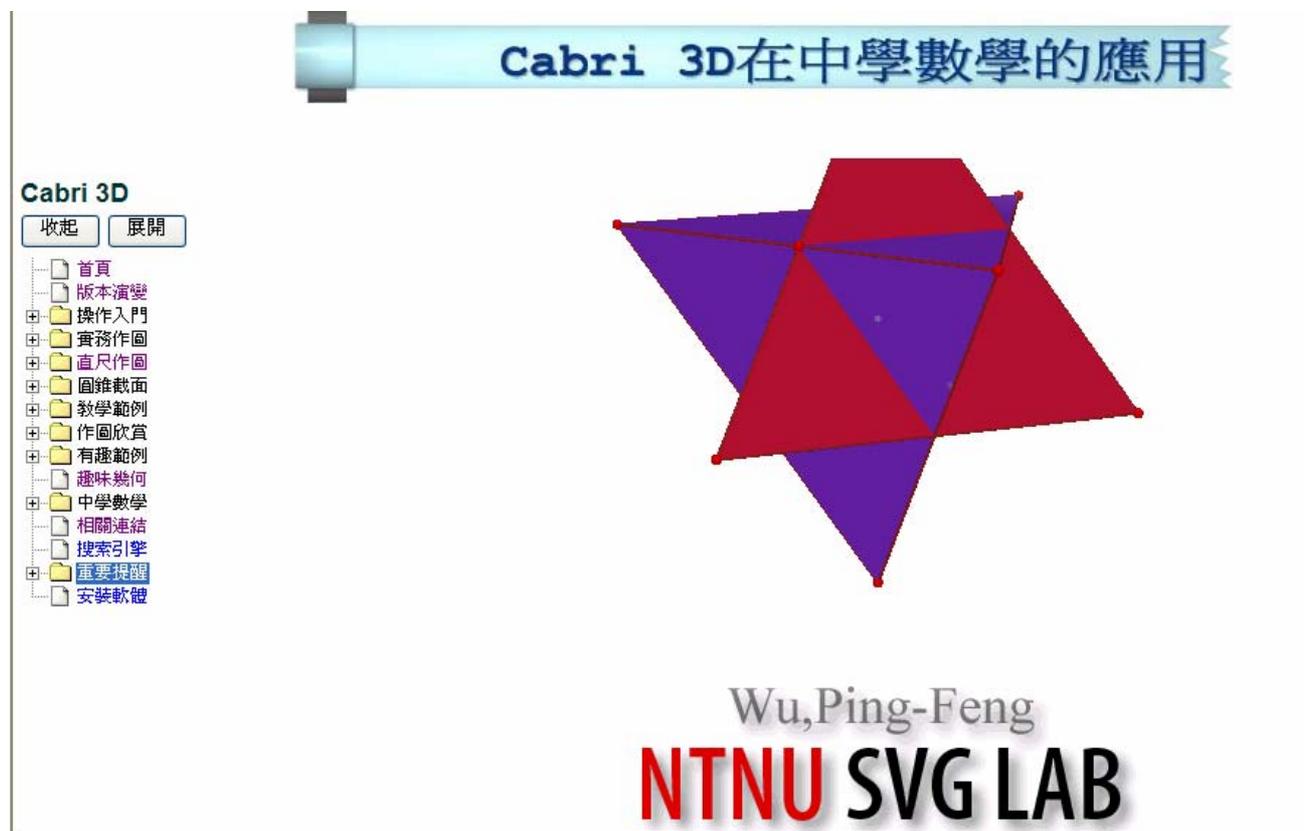
### 三、國內資源網站介紹

目前國內與Cabri 3D的網站並不多，主要有三個。一是台北市立華江高中吳秉鋒老師的「Cabri 3d在中學數學的應用」，<sup>3</sup>這可以說是目前國內最適合中學教師的網站。網站內容從最簡易的入門教學，到實務作圖、教學範例都有，也涵蓋

<sup>2</sup> 下載網址：<http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html>

<sup>3</sup> 網址：<http://www.hcsh.tp.edu.tw/~math01/Cabri3D/index.html>

了趣味幾何、及各式用Cabri 3D做出來的複雜圖形或模擬圖，可看出吳老師對Cabri 3D的功力與推廣熱情。筆者從這個網站中受益良多，也建議讀者可以先從此網站瀏覽起。



二是台北市立第一女子高中鄭國恭老師的「Cabri 3D作品分享」，<sup>4</sup>鄭國恭老師將他許多的作品放在該網站中，無私地與大家分享。附帶一提，從該網站中可知，該校已購買了Cabri 3D軟體供全校師生使用，真是令人稱羨。

最後也是最多彩多姿的網站，就是清華大學全任重教授的網頁資料。<sup>5</sup>全教授在國內推行幾何軟體不遺餘力，例如中學數學教師熟悉的GSP (The Geometer's Sketchpad)軟體，全教授就花費不少心力研究、推廣及培養人材。Cabri 3D這套軟體，也得到全教授的青睞與推薦，並將其許多作品放在網頁上供人下載。不過，美中不足的是，全教授的資料或許是因為太過豐富的關係，比較零散沒有系統，讀者要多費一點時間找尋所需的資料。

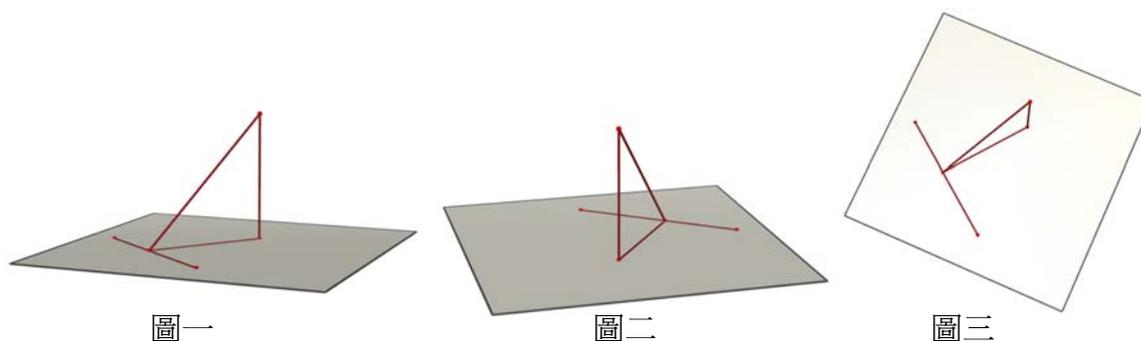
#### 四、教學常用的圖例

以下筆者提供幾個教學中常用的圖例，每一個均可在很短的時間內完成。首

<sup>4</sup> 網址：<http://www.fg.tp.edu.tw/~math/mainpages/1.htm>

<sup>5</sup> 網址：<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/gc-06/>、<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/app06/>、<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/app-06/>……等，可參看全任重〈動態幾何環境下的立體幾何〉一文。

先是「三垂線理」的圖形，圖一是一般常畫之示意圖，在 Cabri 3D 之中，只要按住滑鼠右鍵後移動，就可隨意改變視角，如圖二及圖三，讓學生從各種角度去「看到」三線垂直。

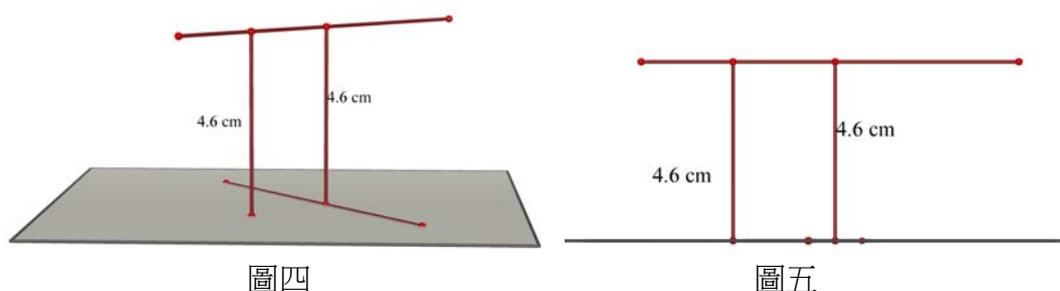


圖一

圖二

圖三

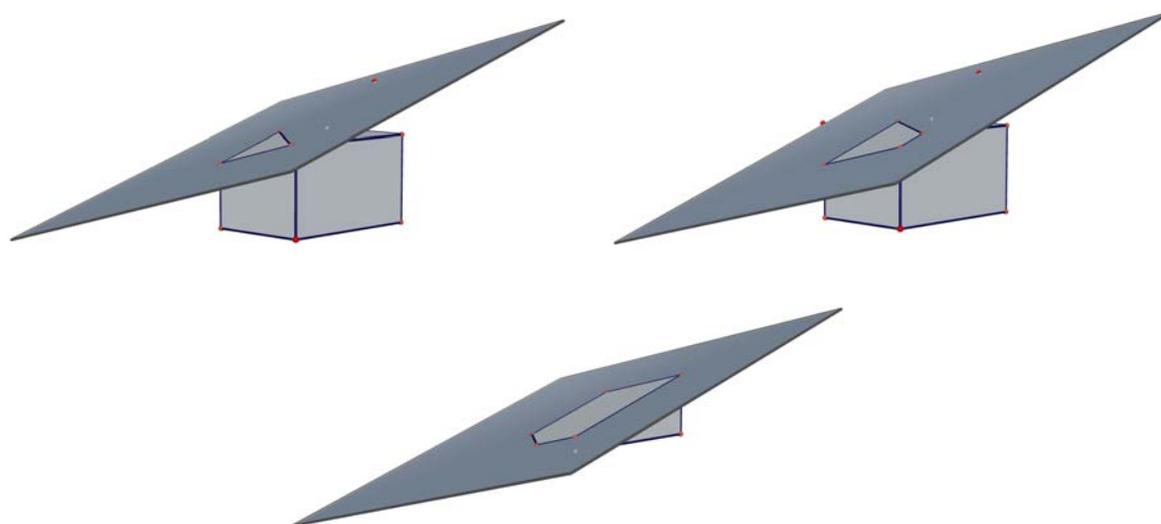
其次是「歪斜線的公垂線段長」。圖四是解題時常用策略的示意圖，利用 Cabri 3D 除了可直接量出兩段之長度，更可將視角調整成與平面等高且平行（如圖五），兩線段等長就一目了然了。



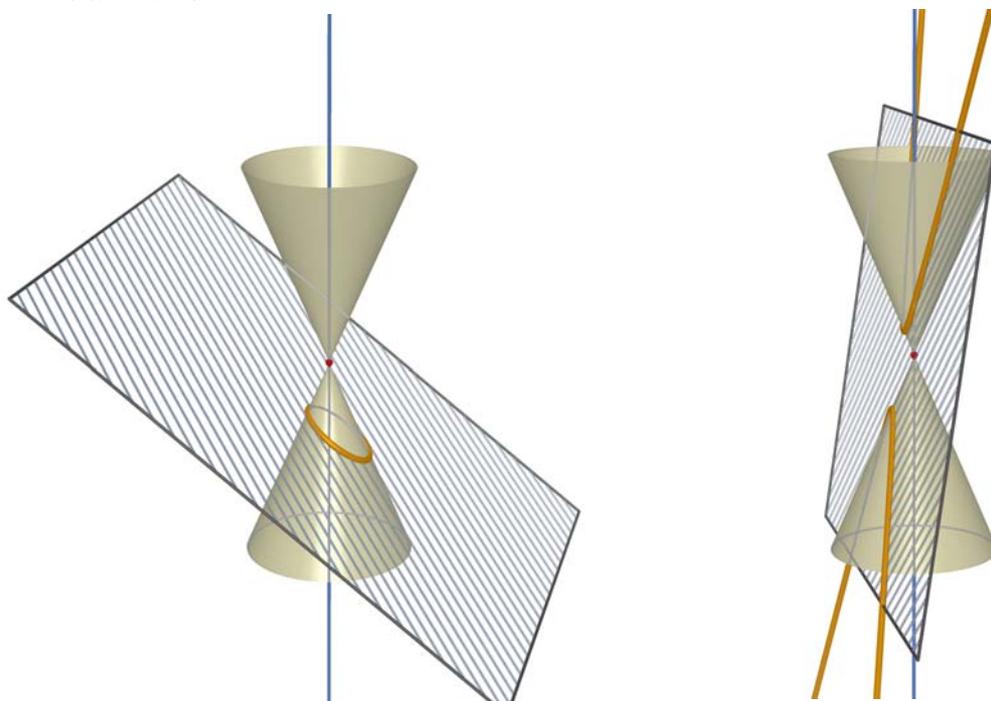
圖四

圖五

最後是截面、截痕的圖形，在 Cabri 3D 中，只要移動平面，截面或截痕立即顯現。一個平面截過一長方體，其截面圖形究竟為何？這對許多學生而言已經是想像力大考驗了，若將長方體改為其他多面體，一定會有更多人舉白旗投降。這時候就可以藉助 Cabri 3D「用平面截多面體的功能」，作各種模擬，眼見為憑。



除了截面外，用平面截圓錐而得到各種圓錐曲線這件事，亦可輕易地用 Cabri 3D 展現出來，如下圖。下圖中的圖形，一般教科書中都會呈現，但書本的呈現畢竟是屬於靜態的，利用此軟體，只要動動滑鼠，就可以任意改變平面的位置，觀察其截痕的變化。



## 五、結語

空間中的數學概念，其學習與應用，對不少學生造成很大的困擾，而教師單憑粉筆與黑板，往往不易對這些學生提供立即有效的協助。今若能藉助 Cabri 3D 這套軟體，就可讓教師有更大的揮灑空間。比如說，如同台北市立第一女子高中的做法，可將一些學生常遇到的困難，做成檔案放在數學科的教學網頁之中，除可方便教師教學使用外，也可讓學生自行上網瀏覽，並親自嘗試從各種視角來看立體圖形，或操作各種變化，相信學生在經過幾次的使用後，一定能增加對立體圖形的想像力。另外，對於一些數學資優的學生，也可鼓勵他們利用這套軟體來做專題研究、科展，拓展數學視野。當然了，這些都必須建立在學校能夠提供此套軟體的前提下，不然，試用版本不但沒有存檔的功能，使用 15 分鐘後，還會自動關閉程式，讓一切努力化爲烏有。

## 參考資料：

全任重 (2007).〈動態幾何環境下的立體幾何〉，行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告。

吳秉鋒 「Cabri 3d 在中學數學的應用」網站，網址：<http://www.hcsh.tp.edu.tw/~math01/Cabri3D/index.html>。

鄭國恭「Cabri 3D 作品分享」網站，網址：<http://www.fg.tp.edu.tw/~math/mainpages/Cabri%203d/cabri%203d.htm>

# 「Share Math to Explore the World ! -- 《HPM 通訊》發行一百期慶祝酒會暨台灣數學博物館開幕典禮」花絮

蘇惠玉

《HPM 通訊》主編

上一期的《HPM 通訊》(第十一卷第十期)剛好為本通訊發行以來的第一百期,編輯部亦於10月24日在台師大數學系舉辦了一個慶祝酒會,以 **Share Math to Explore the World** 為主題,與各界支持的師長們一同歡慶《HPM 通訊》沒有間斷地持續發行了100期!

在這次慶祝酒會中,有許多長期以來一直支持通訊的師長們都有來參加,也在酒會中鼓勵我們繼續下去,像是台師大的何榮桂老師、林福來老師、中研院的李國偉老師、台大的翁秉仁老師、清大的琅元、國立台北教育大學的張英傑老師、勤益技術大學的劉柏宏老師,還有台師大數學系的諸位師長,以及建中的蔡炳坤校長、景美國中的朱賡忠校長、南榮國中的許文璋校長,還有台北市國中數學教師輔導團和來自各地的數學教師及研究生。感謝這麼多師長的參與與支持鼓勵!當天酒會的儀式流程如下:

## 酒會儀式流程

- 15:30-16:00 報到
- 16:00-16:10 發行人致歡迎詞 “Share Math to Explore the World” 洪萬生教授
- 16:10-16:40 分享百分百 主編蘇惠玉老師
- 16:40-17:00 台灣數學博物館 (Math Taiwan Museum, MTM) 開幕  
左台益教授主持
- 17:00-17:10 林福來教授致詞
- 17:10-17:20 國科會科教處蒞臨指導
- 17:20-18:00 酒會





1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

#### 《HPM 通訊》駐校聯絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬾（東京大學）

基隆市：許文璋（南榮國中）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啓文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）余俊生（西松高中）

張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）

林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）

台北縣：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）林旻志（錦和中學）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）洪宜亭（內壢高中）

鐘啓哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）程和欽（永豐高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中）陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

洪正川（新竹高商）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中）楊淑玲（神岡國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）歐士福（國中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）

台南縣：李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）

澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）

馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！