

# HPM 通訊

第十二卷 第十期 目錄 (2009年10月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ 重溫吳先生關於現代畫家對古代數學家造像問題的教誨
- ▣ 十二世紀婆什迦羅二世及其《莉拉沃蒂》
- ▣ 《莉拉沃蒂》稱呼語比較

## 重溫吳先生關於現代畫家對古代數學家

### 造像問題的教誨

郭書春

中國科學院自然科學史研究所

中國元以前的科學家，沒有當時的畫像流傳到現在。因此，1949年解放之後，一些畫家創作了許多古代科學家的造像。如何看待和使用這些造像，是學術界不能迴避的一個重要問題。這裏根據吳文俊先生對這個問題的教誨，談一些粗淺看法，以就教於同好。

#### 一、吳文俊先生的教誨

首先，要談到吳先生34年前關於現代畫家對古代數學家造像問題的教誨。

錢寶琮先生主編的《中國數學史》，在文化大革命中，像所有優秀的學術著作一樣，受到無情的批判，有人甚至說「《中國數學史》是封、資、修（即封建主義、資本主義、修正主義）的淵藪」。我們的「無產階級覺悟」低，雖然認識不了這麼深刻，但還是認為其中有許多錯誤觀點。因此，1975年夏自然科學史研究所所在的哲學社會科學部一恢復科研工作，有的同志就提出：中國數學史的史料已經搞完了，錢老的《中國數學史》的缺點是沒有用馬克思主義指導，因此，提出要在現有史料基礎上，寫一部以馬克思列寧主義、毛澤東思想為指導的《中國數學史》。研究所領導和學部領導小組支持這個提議，還指示我們，要吸收工農兵參加寫作。為了寫好這本書，要開一次學術討論會，其中工農兵代表不能少於三分之一，否則不批准開會。「不破不立，破字當頭，立在其中」，要廣泛徵求工農兵和同行對錢寶琮的《中國數學史》的意見，才能寫好新的《中國數學史》。

1975年秋，根據學部領導小組的指示，我們在梅榮照同志率領下，一方面到位於酒仙橋的774電子管廠，與該廠工人理論小組的師傅們同勞動，同時給他們講中國數學史，以便他們能夠參加並指導新的《中國數學史》的寫作，一方面走訪中國科學院數學研究所和北京大學、北師大、北師院（今首師大）等高校對中國數學史感興趣的學者和數學教師，徵求對錢老《中國數學史》的意見。在我們的走訪中，大多數的受訪者還是按照文化大革命的調子，對錢老的《中國數學史》進行了不同程度的批判，只有吳先生的態度完全相反。他說：

評法批儒中，關肇直先生組織我們學習中國數學史，對我們這些人，看古文還不如看外文容易，中國古代數學著作，找不到外文譯本，所以我們主要是通過學習李儼、錢寶琮的書學習中國古代數學。我認為，錢寶琮的《中國數學史》是我讀到的數學史著作中最好的一部，從史料到觀點都很好，我學到很多東西。唯一的缺點是用了蔣兆和給祖沖之和僧一行畫的像。這些畫像是現代畫家的想像，不是歷史文獻，不應該用。一部以原始文獻為依據的學術著作用了這些畫像，讀者會誤以為那些歷史事實也是想像的。

以上的文字，只是我的追憶，當然不可能一字不差，不過大意是不會錯的。2007年春，我為《中國科學技術史·數學卷》撰寫的〈前言〉初稿中寫了這件事，<sup>1</sup>並將〈前言〉呈吳先生指正。吳先生立即回信云：

你提到我反對用現代人對古代學者的臆想畫像，我已不再記得此事。但我確有此意。順便一提，我對\*\*\*先生在某一著作中刊入現代畫家對劉徽的[畫]像，我也很不以為然。

吳先生的信從一個側面說明我上面所記吳先生的話不虛，起碼與事實相去不遠。在文化大革命尚未結束的1975年，在四人幫的鼓噪下，正在批林批孔，「左」的思潮還瀰漫全國，吳先生如此高度評價錢老的《中國數學史》，確實出乎我們的意外，真是啓聾發聵，深深地震撼了我們。這是別話。

我認為，吳先生關於學術著作不應使用今人對古代數學家的臆想的畫像的教誨，維護了學術著作的嚴肅性，可信性，是十分重要的。所以30餘年來，我一直遵從吳先生的教誨，在自己的著作中從來不用這類畫像。

## 二、關於祖沖之的造像

解放後，蔣兆和先生大概是最先創作科學家造像的，他50年代畫的張衡、祖沖之、僧一行、李時珍等畫像已經家喻戶曉，影響巨大。



蔣兆和造祖沖之像

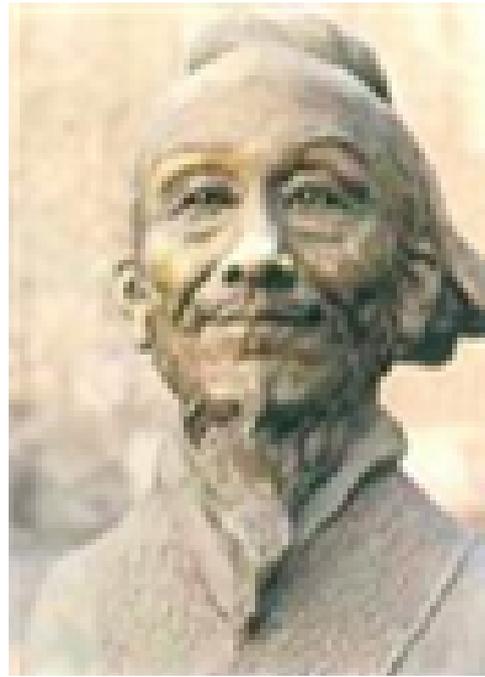


蔣兆和造僧一行像

<sup>1</sup> 根據2009年2月編委會的討論意見，不對現代人關於古代科學家的畫像批評，定稿中刪去這段話。



李翔造祖沖之像



我認爲，作爲藝術創作，根據歷史資料，爲歷史名人造像，是無可厚非的，甚至是應該提倡的。在一些普及讀物中，在一些展覽中，使用這些不與歷史事實相悖的造像，給人以形象的提示，印象深刻，也常會收到事半功倍的效果。事實上，上世紀 50 年代，蔣兆和先生畫的張衡、祖沖之、僧一行、李時珍等中國古代四大科學家，對普及古代科學知識，激發人們的愛國主義感情，配合 1956 年向科學進軍的運動，發揮了十分重大的作用。我本人 50 年代正在中學學習，對此深有體會。

不過，也有人已經指出，畫像中祖沖之左衽，是不對的。「左衽」，也就是說衣襟向左掩，在中國古代是契丹人服飾的基本特徵。而廣大中原地區漢人的服飾一般是向右掩的，也就是「右衽」，蓋其因源于「黃帝制衣，交領右衽」之說。故而「左衽」也就成了區別漢人、蠻夷的重要標誌，在古代啓蒙教材《幼學瓊林》中就有「左衽是夷狄之服，短後是武夫之衣」的描述。在那個時候，如果說誰是「左衽」，那簡直就是在罵他是野人。<sup>2</sup>

後來在網上又看到兩幅祖沖之的造像，一是李翔乙酉年（2005 年）畫的，另一幅不知何人何時所作。這兩幅也犯了「左衽」的錯誤。李翔畫的像顯然比蔣兆和畫的年齡大得多，而且橫眉冷對，不像是一位思想深邃的科學家，倒像一個市井之徒。畫家可能想表示祖沖之與戴法興的辯論情景。但是，祖沖之生於西元 429 年，他造《大明曆》是在大明六年（西元 462 年），才 33 歲，與戴法興辯論時斷不會如此老氣橫秋。可見畫家創作時沒有考慮起碼的歷史事實。

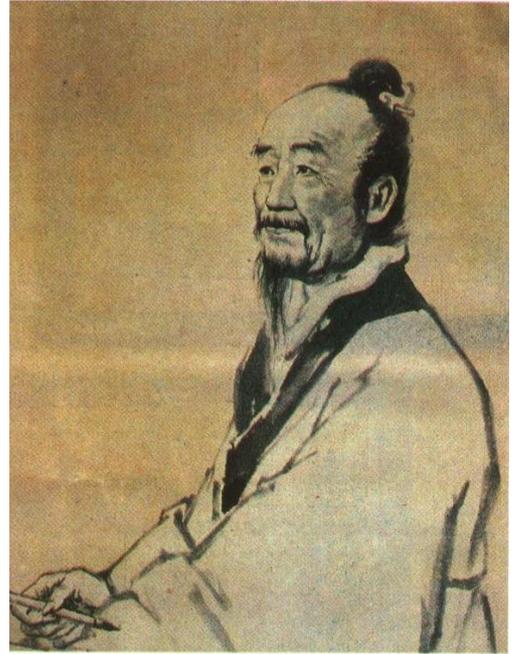
### 三、關於劉徽的畫像

吳先生給我的信中，談到的他「很不以爲然」的現代畫家對劉徽的畫像，實際上是蔣兆和先生于 1980 年前後爲劉徽的造像。造像把劉徽畫成一個滿臉皺紋的耄耋老人。

#### （一）蔣兆和先生劉徽造像的時代背景

<sup>2</sup> “左衽”祖沖之一中學歷史教科書出現重大失誤，2007 年 05 月 20 日。

蔣兆和先生在上世紀 50 年代，把張衡、祖沖之、僧一行、李時珍等都畫成 40-50 歲，最大也不到 60 歲，那麼為什麼把劉徽畫成一位七八十歲的老人呢？這與當時的時代背景有密切關係。原來，當時文革結束不久，由於「紅衛兵」和許多青年人在文革中被四人幫利用，在打倒老幹部，迫害老科學家的凶風惡浪中，起了極壞的作用，所以，在當時批判四人幫的罪行，清算文革時，社會上，特別是輿論界，有意無意地滋長了一種歌頌老人，指責年輕人的傾向。報刊上大量批判文章，許多文藝作品中一提到年輕人往往就說是「頭上長角，身上長刺」，一提到老年人就是與四人幫作了堅決的鬥爭。這些文章似乎忘記了，文革中遭到殘酷鬥爭的老幹部，在革命戰爭中出生入死時，大都二、三十歲，甚至十幾歲，建國時也不過三、四十歲。延安「四老」或「五老」，才不過五十多歲。文革中受到迫害的老科學家，在他們做出傑出的科研成果時，也大都三十歲左右。看來蔣兆和先生不能免俗，正是在當時凡老皆好的社會風氣下，將劉徽畫成一位耄耋老人。



刘徽造像 蔣兆和 绘

## (二) 魏晉多早熟夙悟才子

大家知道，在社會處於大動盪、大分化、大改組的變革時候，往往多少年得志的才子。

佔據 20 世紀中國政治界、軍事界、思想界和科學技術界舞臺的叱吒風雲的人物，大都在「五四」運動前後或二三十年代登上歷史舞臺，也大都只在 20 歲上下。當時由於清朝遺老和許多守舊人物反對科學和民主，反對社會進步，致使許多人接受進化論觀點，與六十年後的 70 年代末 80 年代初相反，出現了一種歌頌青年人，排斥老年人的傾向，錢玄同先生甚至說，一個人到了 40 歲還不死就該自殺。所以，在錢玄同在 40 歲還健在時，他的朋友們給他開了一個「追悼會」，成為笑談。

東漢末年到魏晉之交，中國社會也處於大動盪和大變革中，莊園經濟和門閥世族佔據經濟政治舞臺的中心，儒家的說教無法適應瞬息萬變的社會，逐漸失去統治地位，繁瑣的兩漢經學也被送進歷史博物館，思想界面臨著春秋戰國以來沒有過的大解放，其中最突出的是玄學與辯難之風的興起。此時多早熟夙悟才子，王弼（226—249）被害時才 23 歲，是任何一部中國哲學史著作都必須花筆墨的大哲學家。在中國家喻戶曉的諸葛亮，出山時才 26 歲。侯外廬等先生列出史書有記載的東漢末至晉初一些才子的簡表，其中：

- 馬融「少而好問，學無師」，
- 鄭玄（127-200）「少好學書數，十三誦五經」，
- 孔融（153-208）「四歲有識，十歲知名」，
- 徐穉「九歲知名」，
- 禰衡「未滿二十與孔融（50 歲）交」，
- 何晏「少以才秀知名，七歲明惠若神」，
- 夏侯玄「少知名，弱冠即官」，
- 傅嘏「弱冠知名」，
- 管輅「號神童」，
- 劉廙「年十歲知名」，
- 嵇康「少有雋才」，
- 阮籍「少能論道」，

王弼「幼察而惠，十歲通辯能言」，  
 鐘會「少敏慧夙成，五歲即知名」，  
 向秀「少爲人所知」，  
 郭象「年少有才理」，  
 謝仁祖「八歲神悟」，  
 山濤「少有器量」，  
 王戎「幼而穎悟，七歲神童」，  
 王衍「幼年知名，辯談不屈」，  
 樂廣「八歲被認爲名士」，  
 衛玠「五歲知名」，  
 謝萬「早知名」，  
 杜育「神童」，  
 王右軍、王安期、王長豫被稱爲「王家三少年」，  
 等等。

侯外廬等先生進而指出：「由上面不完全的表看來，人物大都是少年顯名的，甚至很多是被稱爲『神童』的。他們少不更事的幻想，的確可以跳出皓首窮經的圈子，別尋玄遠的抽象概念世界。」<sup>3</sup>

總之，東漢末年至西晉初年的政治家、思想家、軍事家和科學技術家，大多在二、三十歲就做出了永垂青史的大事業。蔣兆和先生把正在撰著《九章算術注》的劉徽畫成七、八十歲的耄耋老人，是有悖於魏晉的時代精神的。

### （三） 劉徽注《九章算術》時的年齡

劉徽的生平，除了他自述「徽幼習《九章》，長再詳覽，觀陰陽之割裂，總算術之根源。探賾之暇，遂悟其意。是以敢竭頑魯，采其所見，為之作注」<sup>4</sup>，及《隋書·律曆志》說「魏陳留王景元四年劉徽注《九章》」<sup>5</sup>外，沒有任何記載，其生卒年代更不可考。不過，由於劉徽的《九章算術注》被比較完整地保存了下來，關於劉徽的思想資料，大約是北宋以前的數學家，我們知道的最多的一位。由對他的思想資料的分析，我們可以大體推斷他的出生年代。

劉徽注《九章算術》的宗旨是「析理以辭，解體用圖」。「析理」一詞最早見於《莊子·天下篇》：「析萬物之理。」<sup>6</sup>但是在當時和後來很長一段時間內，它並沒有方法論的意義。而在魏晉時期，「析理」卻成了辯難之風的要件，甚至是其代名詞。當時的名士經常就一個命題在一起「析理」，有人持正方，有人持反方，類似於現今的大學生辯論會。劉徽的「析理」的內容當然與思想界不同，但他在追求概念的明晰，推理的正確，證明的嚴謹等方面與辯難之風方向上是一致的，格調是合拍的。劉徽的「析理」顯然是思想界的「析理」在數學上的反映。辯難之風盛行於正始年間（240-248）。那麼劉徽學習《九章算術》，進行數學研究的時候，應該在正始年間或其後。

關於析理的原則，劉徽也深受思想界的影響。比如他們都重視「貴約」，嵇康主張「析理貴約而盡情」<sup>7</sup>，王弼主張「約以存博，簡以濟眾」<sup>8</sup>，劉徽主張「要約」，他說：「又所

<sup>3</sup> 侯外廬等：中國思想史，第3卷，第64-65頁。北京：人民出版社，1957年。

<sup>4</sup> [魏]劉徽：九章算術注序。見：匯校本《九章算術》增補版，郭書春匯校。瀋陽：遼寧教育出版社，臺北：九章出版社，2004年。本文凡引用劉徽的言論，均據匯校本增補版。

<sup>5</sup> [唐]李淳風：隋書·律曆志。見[唐]魏徵等：《隋書》，第404頁。北京：中華書局，1973年。

<sup>6</sup> [戰國]莊周：莊子·天下。見郭慶藩輯：《莊子集釋》。北京：中華書局，1961年。

<sup>7</sup> [魏]嵇康：明膽論。《全上古三代秦漢三國六朝文·全三國文》（二），卷五〇。北京：中華書局，1958年。

<sup>8</sup> [魏]王弼：周易略例·明象。《四庫全書》，第四冊。臺北：商務印書館，1986年。

析理以辭，解體用圖，庶亦約而能周，通而不贖，覽之者思過半矣。」爲了做到要約，他們都主張「舉一反三」，「觸類而長」，反對「多喻」。

劉徽有的句法都與某些思想家的話類似。比如關於分類問題，何晏說：「同類無遠而相應，異類無近而不相違。」<sup>9</sup>劉徽說：「數同類者無遠；數異類者無近。遠而通體知，雖異位而相從也；近而殊形知，雖同列而相違也。」何晏是說：同類的東西在近者是相從的，異類的東西在遠者反而是不相違的，顯然是一個詭辯命題。而劉徽闡發了關於數的正確分類原則。不過，兩者句法之相類是十分明顯的。

又如關於數的本源方面，劉徽也有與王弼十分相近的論述。王弼說：「夫少者多之所貴也。寡者眾之所宗也。」<sup>10</sup>又說：「一，數之始而物之極也。」<sup>11</sup>劉徽則將王弼的話與《老子·》的命題「無名天地之始，有名萬物之母」<sup>12</sup>結合起來，提出：「少者多之始，一者數之母。」兩者的相近是明顯的，不過二人的寓意也不相同。王弼的話是爲極少數身份性地主階級的統治辯護的，而劉徽的話說明數的積累與度量，是一個含有正確因素的數學命題。

由劉徽與辯難之風的關係，特別與何晏、嵇康、王弼等玄學名士思想上的聯繫，語句上的相近，我們可以推斷，劉徽的生年大約與嵇康、王弼相近，或稍晚一些。嵇康生於西元 223 年，王弼生於西元 226 年。那麼，劉徽應該生於西元 3 世紀 20 年代後期或其後，不過最晚不能在西元 245 年之後。換言之，西元 263 年他完成《九章算術注》時，年僅 30 歲上下，或更小一點，<sup>13</sup>決不可能是一位滿臉皺紋的耄耋老人。

因此，蔣兆和先生給劉徽的畫像是一幅有悖於歷史事實，與魏晉時代精神和特點相矛盾的作品。它不會給人以正確的歷史啓示，反而會造成錯誤的導向。這樣的創作，「有不如無」，不僅學術著作中不應該採用，即使在展覽和科普讀物中也不宜使用。

#### 四、幾點啟示

綜上所述，我們認爲：

現代畫家作爲藝術創作，爲古人造像是無可厚非的。但是，這畢竟是藝術家的想像和創作，不是歷史事實，學術著作不宜採用。吳先生關於學術著作不應使用現代人對古人的造像的教誨，是十分重要的，我們不僅應該遵從，而且應該宣傳吳先生的這一觀點。

作爲展覽或科普作品，可以使用現代人對古人的造像，但應慎重篩選，剔除那些有悖於歷史事實的純屬虛構的東西。

藝術家創作古代科學家的像，應該學習點歷史知識，特別是科學史知識，避免畫出有悖於歷史常識的作品。否則謬種流傳，遺害讀者，特別是廣大青少年。

科學史工作者應該注意向社會，特別是廣大教師和青少年普及準確的科學史知識。

按：本文發表於 2009 年 5 月 11, 12 日中國科學院數學院召開吳文俊先生 90 華誕慶祝會。

<sup>9</sup> [魏]何晏：無名論。〔晉〕張湛：《列子注·仲尼篇》引。見《列子集釋》，第 121 頁。北京：中華書局，1979 年。

<sup>10</sup> 同注⑥。

<sup>11</sup> [魏]王弼：老子注·第三十九章。見：《二十二子》，第 5 頁。上海古籍出版社，1986 年。

<sup>12</sup> [春秋]老子·第一章。朱謙之：《老子校釋》。北京：中華書局，1984 年。

<sup>13</sup> 郭書春：古代世界數學泰斗劉徽，第 363 頁。濟南：山東科學技術出版社，1992 年。又：繁體修訂本，第 366 頁。臺北：明文書局，1995 年。

# 十二世紀婆什迦羅二世及其《莉拉沃蒂》

黃俊瑋

台灣師範大學數學系博士班研究生

古印度數學史主要被分為下列三個時期：

1. 羅毗荼 (約公元前 3000—前 1400 年)，
2. 吠陀 (約公元前 10 世紀—前 3 世紀)，
3. 悉檀多 (約公元 5 世紀—12 世紀)，

其中，悉檀多時期是印度數學家最繁榮的時期，其數學內容主要是以算術與代數為主。《莉拉沃蒂》(*Līlāvati*) 的作者婆什迦羅二世 (*Bhāskara*)，是這個時期最有影響力的數學家之一。為了與公元 7 世紀的天文學家婆什迦羅一世 (475-550) 區別，一般稱《莉拉沃蒂》的作者為婆什迦羅二世。

## 一、《莉拉沃蒂》的作者婆什迦羅二世

有關婆什迦羅二世生平資料相當少，他出生於今邁索爾邦 (Mysore) 的比德爾 (Bidar) 的一個婆羅門教家庭。他曾在烏賈因 (Ujjayini) 天文台工作，並且從小在父親指導下，成為諸多領域的專家。他曾鑽研八卷語法書，六卷醫學書，六卷邏輯學書，五卷數學書，四卷吠陀，三卷 *ratna* (關於正確的信仰、知識與行為的著作) 和兩卷爾曼差論。在當時，有「學問之王」的稱號。另外，有別於其它的學者們大多由統治者資助，婆什迦羅二世的父親是他的贊助人。

婆什迦羅二世的著述，一般有兩種說法：

- 林隆夫 (日本數學史家) 認為有下列四種：(1) 《天文系統之冠》，(2) 《歡喜-實用曆算手冊》，(3) 《注釋》，(4) 《曆算修正法入門》。

- 印度學者則認為有下列五種：(1) 《天文系統之冠》，(2) 《歡喜-實用曆算手冊》，(3) 《完全的天文儀器》，(4) 《依照 *Vasistha* 方法的天文書》，(5) 《婚姻之書》。

其中，只有《天文系統之冠》流傳下來。而本書由四個部份構成，大多分別作為獨立著作處理，每一部份都附有自己寫的散文性注釋，依序如下：

- (1) 《莉拉沃蒂》，(2) 《算法本源》，(3) 《行星運動》，(4) 《天球》。

《莉拉沃蒂》是古代印度最典型、最有影響力的算術著作。其名本意美麗，傳說是作者為自己女兒或妻子所寫。另有一說，是為了安慰自己女兒 *Līlāvati* 因占卜預言嫁不出去而寫。曾被作為教科書用了好幾個世紀，現在一些梵語學校仍在使用，顯然因為此書把算術學習變成一種愉悅而有趣的活動。

另一方面，由於《莉拉沃蒂》這個富有詩意的題名和一些著名的問題，使得婆什迦羅二世贏得印度學者的敬重。事實上，婆什迦羅二世喜歡使用音韻和隱喻的方式書寫，其著作以梵語這種艱深的語言表達科學理論，運用精煉的文學語言，創造了許多梵語詞藻。

同時，他也是天文學家，他在計算角正弦方面比前人精妙，並且，也提出地球是宇宙的中心以及靜止不動的看法。此外，他對極限的方法有一些初步的認識，並且具有實事求是的科學態度與批判精神，還有，他也能了解並前人對於日月食錯誤的想法，譬如他就提

出下列有趣的解釋與辯證：

唉，Rahu 不是魔鬼，是地球的陰影致使我們看不見月亮，如果你們仍相信 Rahu 的存在，那麼至少可以說是他跑到地球的影子裡吞下了月亮吧。

他糾正了拉拉的測量球體表面積公式，批評了婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 冗長或錯誤或簡單的方法，他也批評過阿耶波多 (Aryabhata)。

## 二、《莉拉沃蒂》的內容與特色

中古世紀印度數學由二個主要部份組成：

(1) 運算法則的數學，處理模型化數學問題的求解問題，由一系列的算法 (algorithm) 構成。

(2) 種子的計算或代數學，使用文字表示未知數的代數方程問題。

《莉拉沃蒂》的內容多屬於運算法則的數學，全書由一系列運算法則以及例題構成，主要涉及算術，也包含幾何、三角法和代數學的部份知識。

在書寫形式上，印度的數學文獻常以韻律詩形式著作，而婆什迦羅二世也以詩歌形式創作本書。他使用了 20 餘種韻律詩敘述各種法則與例題，而他本人注釋的「附注」與後世注釋家的注釋，則以散文詩的形式表達。一種類型的題目揭示一種法則，並附有一到兩個例題及其解法。而附注的部份，是將例題中的數據摘錄出來，按照法則排列起來進行演算，以再現算法過程，這與中國數學的「草」或「細草」類似。可惜的是，在本翻譯本中，並無法體現其梵文詩的韻律美。

後世對《莉拉沃蒂》注釋的版本為數眾多，注釋類型主要有兩類：

(1) 對其中的數學內容進行最簡單的說明 (如 *Mahishara* (1587))，

(2) 除數學內容的說明外，還逐句進行解釋與語法說明，並且還包含一些法則的證明

(如 *Ganesa* (1545))。

原注並不分章節，所有法則，例題等都是羅列在一起。後世各種譯本為方便而劃分章節，但不統一。本書所據底本 (林隆夫日譯本) 分章方式如下：

第 1 章、規約

第 2 章、數位之確定

第 3 章、基本運算

(1) 基本運算 8 種，(2) 分數基本運算 8 種，(3) 零之基本運算 8 種

第 4 章、各種算法

(1) 逆算法，(2) 任意數算法，(3) 不等算法，(4) 平方算法，(5) 乘數算法，

(6) 三率法，(7) 五率法等，(8) 物物交換

第 5 章、實用運算

(1) 關於混合計算之實用算法，(2) 關於數列之實用算法，

(3) 關於平面圖形之實用算法，(4) 關於溝渠之實用算法，

(5) 關於堆積之實用算法，(6) 關於鋸之實用算法，

(7) 關於堆積物之實用算法，(8) 關於影之實用算法

第 6 章、*Kuttaka*

第 7 章、數字連鎖

第 8 章、結語

此外，本書對學生的稱呼極具特色：諸如：「哦！你這個聰明的女孩莉拉沃蒂」、「哦！朋友」、「我親愛的」等等，能讓讀者覺得數學學習有趣而不枯燥無味。它不僅是一部附有插圖，有趣的算術著作，而且也是一部重要的梵文語讀本。在文化史及文學史上，以及數學史上，都占有重要的地位。

在此，我們也將《莉拉沃蒂》各章篇名與相關內容簡介，以及其與中國數學之對比，整理如下表：

章名	內容	與中國數學對比
第 1 章 規約	常用的度量衡單位及其換算 介紹印度當時的度量衡換算標準	
第 2 章 數位之確定	介紹印度的十進制 位值制記數法 10 個數字符號的使用	大數命名法
第 3 章 基本運算	介紹加、減、乘、除、平方、開平方、立方、開立方等八種運算。 根據參與運算的數的類別(正整數、分數、零)分成三種情形來敘述。	
第 4 章 各種算法	包含五種算法： (1)逆算法，(2)任意數算法，(3)不等算法， (4)平方算法，(5)乘數算法 以及以三率法為基礎的各種算法： (6)三率法，(7)五率法等，(8)物物交換	三率法與中國的今有數
第 5 章 實用運算	(1)關於混合計算之實用算法， A 複利問題、B 儲水池注水時間問題 C 按比例買賣商品、D 關於寶石的計算 E 熔合金塊的計算、F 組合問題 (2)關於數列之實用算法， A 自然數列求和、B 等差數列求和 C 等比數列求和、D 韻律各數問題 (3)關於平面圖形之實用算法， A 三角形問題 B 四邊形問題 C 針狀圖形 D 圓與球的計算 (圓週率數值(取 $\pi = \frac{22}{7}$ )、圓周長與圓面積 公式、球體積公式等) (4)關於溝渠之實用算法， 屬於立體圖形的度量計算 (5)關於堆積之實用算法 沒有空隙的堆垛問題	(1)C 類似《九章算術》中的衰分問題  (3)類似中國的幾何學，以平面圖形與立體圖形的求積、直角三角形的計算，以及測量問題為中心，具有算述的性質，相當於《九章算術》中的方田章、勾股章  (4)類似《九章算術》中的商功章、少廣章  (6)類似《九章算術》中

	(6)關於鋸之實用算法 鋸割木材的體積及工作量與勞務費分配的 計算問題 (7)關於堆積物之實用算法 穀物等堆積的體積計算問題 (8)關於影之實用算法 勾股測量問題	的商功中的功程問題  (7)類似《九章算術》中 的商功中的委米依垣問 題 (8)類似《周髀算經》中 的測日高遠、《海島算》 中的重差術、《數書九 章》中的測望類問題
第 6 章 <i>Kuttaka</i>	二元一次不定方程式求解問題 算法核心是輾轉相除法	類似秦九韶的《數書九 章》，也將大衍術獨列於 一章
第 7 章 數字連鎖	排列組合問題	
第 8 章 結語	強調本書的有效性與重要性	

### 三、《莉拉沃蒂》與中國數學的相似之處

#### (一) 算法化傾向

首先，本書把來源於現實生活與科學（主要是天文）中的數學問題，歸結為若干題型，以構造各類型問題解的機械化算法（中國叫作術，印度叫 *karana*），數學知識整理，以問題為中心。再者，《莉拉沃蒂》以問題集形式編纂，其中有 272 個詩節，這些詩內容除了偈語、單位規定、結束語之外，都是各類數學問題的求解法則與例題，分為五大類（第 3，4，5，6，7 章），21 小類。

#### (二) 幾何的算術化

本書之中，並沒有出現希臘式的公理演繹系統，而是以幾何量為中心，視為算術的附庸。同時，幾何概念也以形象化為主，並非希臘式的抽象化，如直角三角形的三邊叫「臂」、「端」、「耳」。

#### (三) 存在類似的問題

諸如：三率法與今有術；影的計算是中國的重差術；堆積物體體積計算與《九章算術》的「委米依壁」問題；折竹問題（150 詩節）與傾蓮問題（154 詩節），在《九章算術》之勾股章也出現過（第 13 問與第 6 問）。

#### (四) 注釋與數學研究

中國數學活動往往是通過給算書做注而展開，從劉徽《九章算術注》與趙爽的《周髀算經注》。除了婆什迦羅二世曾為本書做自注，另外 *Ganesa* 注釋內容包括詞語解釋、語法說明、正誤、闡述法則原理的生成緣由，其中也包含了類似中國算書中「草」與「細草」的附注 *Vāsana*。

至於幾何公式的「生成緣由」說明，波什迦羅二世採用圖示法（幾何圖解）的證明方法。類似方法在中國，則稱之為「出入相補」。劉徽常以「析理以辭，解體用圖」的方式處理幾何問題。

### (五) 其它相似處

某數之平方根不可得，本書中稱之為 *karani*，是具有無理數平方之形的數，劉徽在《九章算術》的〈少廣章〉之「開方術注」中，對開方不盡數也引進「面」的概念，兩者本質一致。關於數的起源傳說，印度將數的發明歸功於梵天 *Brahmā*，中國則歸功於黃帝時代的隸首。

## 四、《莉拉沃蒂》的各種版本與流傳情況

### (一) 流傳情形

本書的手抄本在印度使用了好幾個世紀，並取代大多先前使用的數學教材。而完整的《莉拉沃蒂》傳到其它國家大約在 16 世紀。其中，手抄本有 600 種之多，注釋也有 30 餘種。八百年間它在印度被當作教材使用，主因於其中優秀的問題和優美工整的梵語詩句，也傳達了許多宗教戰爭和史詩等方面的信息。梵語書寫的注釋開始於 15 世紀，前後共有 35 種。正式出版版本以 1832 年在 Calcutta 出版的為開端，前後約有 17 種。到了 19 世紀之後，多種印刷版本也相繼出現。

### (二) 與本書相關之版本

*Līlavati of Bhākarācāya, A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition* (2001) (K 本) 此為英譯本，準確地揭示每一詩節的數學內容，但採用大量的現代數學符號來闡釋原理與公式，雖便於閱讀卻沒有忠實於原著。本書的翻譯中，將 K 本中的「注釋」部份，以「今釋」形式譯出。

林隆夫翻譯之《莉拉沃蒂》(日譯本)，其所採用的底本為：

(1) *Dattatreya Āpate* 本，其中附有 *Ganesa* (1545) 和 *Mahishara* (1587) 的注釋 (A 本)；

(2) *K.V.Sarma* 本，其中附有 *Sankara* 和的注釋 *Nārāyaṇa* (S 本)

同時，也參考了 *H. T. C. Colebrooke* 的英譯本 (1817) 與 *Banerji* 的 *H. T. C. Colebrooke's Translation of the Līlavati* (1927) (B 本)。林隆夫採取直譯並根據最進的研究成果，給予最詳細的注釋，能準確地再現當時印度數學的真實面目。

## 本書之譯注說明與凡例

本書是徐澤林等人以林隆夫之日譯本為基礎，並參考 K 本。 *Līlavati* 的原文部分(包括規約，法則，例題，附注等)基於日譯本譯出，以楷體字標示。而林隆夫的注譯也以腳注的形式譯出。同時，為便於一般讀者的閱讀，以今釋的形式將 K 本中 *N. H. Phadka* 等人的新釋也一併譯出。為了與原文區別，今譯的部份以宋體字列於原術文或各例題之後。本書主要凡例說明如下：

- (1) 在每個詩節之前標記一個阿拉伯數碼的序號，這些序號是基於底本的。
- (2) 為使原詩節語句流暢，清楚表達文義，根據林譯本，語句中補入一些文字，所補部份用 [ ] 括起。
- (3) 原文中指代不清，容易產生歧義的語句，後加說明，用 () 括起。
- (4) 【今釋】部份，據 K 本的新釋譯出，是 K 本注釋者的現代解釋。
- (5) 【附注】部份， *Līlavati* 作者的注釋，某些詩節之前關於算法主題的標題，也是

歷史上注釋者所加。K 本中均沒有這些，今翻譯從林氏日譯本譯出。

(6) 林氏注釋與本翻譯者的注釋，以腳注形式給出，爲了與日譯者的注釋做出區隔，本翻譯者的注釋前標示\*\*號。

(7) 詩節中之數詞，原爲梵文數詞，然因中日使用數字一致，今從日譯，以中文國字數字表示。另外，在附注中則使用阿拉伯數字，而注釋中原則上也都使用阿拉伯數字。

(8) 注釋中爲敘述簡潔，將 *Līlavati* 的版本略稱如下：

• 日譯本或林譯本：林隆夫所譯之版本。

• K 本：Krishanaji Shankara Patwardhan, Somashekhara Amrita Naimpally, and Shyam Lal Singh (2001). *Līlavati of Bhākarācāya, A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition*, Motilal Banarsidass Publishers, Delhi.

• S 本：K.V.Sarma 本 (1975)，其中附有 *S ankara* 和 *Nārāyana* 的注釋。

• A 本：Dattātreya Āpate 本 (1937)，其中附有 *Ganesa* (1545) 和 *Mahishara* (1587) 的注釋。

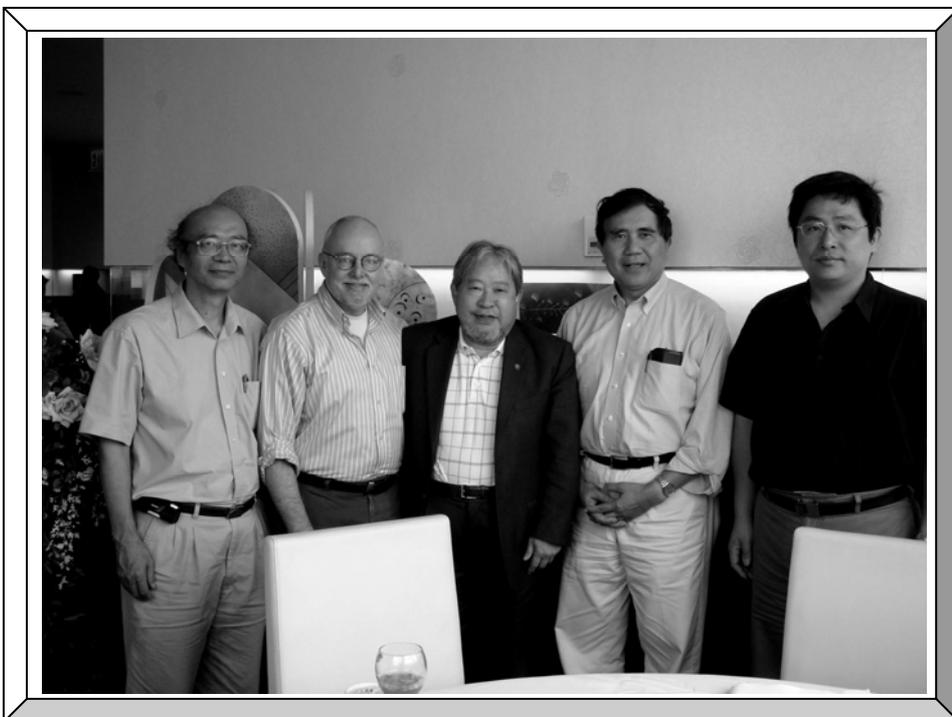
• B 本：Banerji 的 H. T. C. Colebrooke's *Translation of the Līlavati* (1927)。

(9) 注釋者 *Ganesa* 簡稱爲注釋者 G，注釋者 *Mahishara* 簡稱爲注釋者 M。

## 參考文獻

婆什迦羅著（徐澤林等譯）（2008）。《莉拉沃蒂》，北京：科學出版社。

後記：本文整理改寫自徐澤林與周暢的〈關於 Bhskara 二世及其 *Lilavati*〉，婆什迦羅著（徐澤林等譯）（2008）。《莉拉沃蒂》，北京：科學出版社，頁 1-15。



人物由左至右爲：洪萬生，道本周（Joseph Dauben），郭正昭，李弘祺（交通大學通識教育中心），郭文華（陽明大學科技與社會研究所），合攝於美國紐約法拉盛的飛越皇后餐廳，2009年7月24日中午

# 《莉拉沃蒂》稱呼語比較

邱珮瑜

臺灣師範大學數學系碩士班

## 一、前言

每一種文化的語言都有類似「敬語」的用法，想必是人們都喜歡被用特別的稱呼對待，就像是大人總是說孩子們是「國家的棟樑」，這樣說可以讓孩子們覺得未來是有希望的、有前途的。代表一種鼓舞的意味。如果在數學課的課堂上，老師稱呼學生為「數學家」，會不會能讓學生對於數學有著更多的接受度，更願意學習數學呢？在印度數學史上的《莉拉沃蒂》的內容裡，類似這樣的稱呼，處處可見呢！

例如：

17. 哦! 有著一雙小路般惹人憐愛的眼睛的年輕女孩Lilavati啊，一百三十五乘以一十二為幾何?請說說,如果你美麗姑娘,熟悉由整數分割或位置分割之部分乘法的話。再請說說,以其乘數除他們相乘產生者為幾何? 請告訴我。

## 二、稱呼語比較

《莉拉沃蒂》是婆什迦羅二世最出名的一本數學著作，莉拉沃蒂：Lilavati 是他女兒的名字。這是當時的一本教科書，在這當中很多的例題或法則裡都出現「朋友」、「數學家」等等的稱呼。當它的內容有這些稱呼時，到底代表什麼意思呢？是希望更接近讀者，引發讀者的興趣？或者是想賣得更好，成為暢銷書？還是歷代流傳的教材都是這樣撰寫的？有意思的是，在中國的數學書籍中，在《九章算術》中出現過「說算者」，在《周髀算經》也僅出現過「談天者」。然而，在這本《莉拉沃蒂》的內容，卻廣泛到幾乎全部的例題都有稱呼的用法，這真是令人好奇。

《莉拉沃蒂》這本書(以此中譯本為主)分為八個章節，由淺入深，以法則、例題與註釋為主，用詩節標號：

第一章「規約」，敘述了本書所常用的度量衡單位及其換算，共 8 個詩節。

第二章「數位之確定」，介紹印度的十進制、位值制記數法，以及 10 個數字符號的使用。共 2 個詩節。

第三章「基本運算」，介紹了加、減、乘、除、平方、開平方、立方、開立方等八種基本運算。共 36 個詩節，包含 17 個法則，19 個例題。

第四章「各種算法」，主要是包括五種算法以及以「三率法」為基礎的各種比例算法。一共 42 個詩節，包含 16 個法則，26 個例題。

第五章「實用算法」，比較複雜，一共 152 包含 84 個詩節，68 個例題。包括：

(1) 關於混合算之實用算法：複利問題；儲水池注水時間問題；按比例買賣商品問題；關於寶石的計算；關於熔合金塊的計算；組合問題。

(2) 關於數列的實用算法：自然數列求和問題；等差數列求和；等比數列求和；韻律個數問題。

- (3) 平面圖形之實用算法：三角形問題；四邊形問題；針狀圖形；圓與球的計算。
- (4) 關於溝渠之實用算法。
- (5) 關於堆積之實用算法。
- (6) 關於鋸之實用算法。
- (7) 關於堆積物之實用算法。
- (8) 關於影之實用算法。

第六章 Kuttaka，即二元一次不定方程式求解問題。共 19 個詩節，包含 13 個法則，6 個例題。

第七章「數字連鎖」，討論了排列組合問題，一共 11 個詩節，包含 6 個詩節，5 個例題。

第八章「結語」，僅一個詩節，目的在於強調本書的有效性與重要性。

曹亮吉教授在《科學月刊》第十八卷第一期出版的一篇文章曾提到，印度人要陳述數學題目時，常把它弄得幻想有趣，或者編成詩句，或者加上歷史背景，使得題目能夠吸引人。於是連帶在稱呼語的部分也極具特色，婆什迦羅二世在語氣的使用上也多加了許多字眼，比方說詩節 33「賢者啊，請告訴我吧，仁慈的人啊，如果你知道數學中被叫作……的話。」甚至催促讀者在學會法則之後，要快快解題，比方說詩節 38「朋友啊，請給我說出……，請快點告訴我。」，也許是希望讀者在看完法則之後立即做例題，達到即時學習的效果。而也有地方出現希望讀者審慎考慮之後再解出答案，如詩節 200「……朋友啊，請好好考慮後說出吧！」。雖然這是一本教科書，在編寫這些數學內容與例題時，婆什迦羅二世也在其中評論之前的數學內容以及他的看法，在其中一部分他說：「儘管有如此簡單的計簡法，先人們何故敘述這麻煩者？我不能理解。」大部分的稱呼都是放在例題的後面，然而也有一些例題的稱呼是放在最前頭，這又是為什麼呢？不過由於我看到是《莉拉沃蒂》的中譯本（譯者徐澤林等著），也可能是翻譯語言之間有了不同的選擇，在英譯本中的使用卻常常放在開頭，比方說詩節 247 的英文「O you who calculate! .....Say it fast.」不過特別的在於，原文中的稱呼語似乎真的帶有誇大的意味，婆什迦羅二世想要拉攏讀者的心意似乎很明顯，也許他當時的教學也是那麼誇大與熱情吧！

以下為大致上的分類：

1. 以姑娘為稱呼：Lilavati 為作者婆什迦羅二世女兒的姓名，作為普通名詞亦可解釋為「婀娜多姿的姑娘」，在此書中出現六次，分別在第三章與第四章，有趣的是它不只是稱呼姑娘，還額外附加「美麗姑娘」、「撲閃著眼睛的姑娘」、「迷人的姑娘」、「有著小鹿般眼睛的可愛姑娘」，我想當我在遇到這些問題時，一定很心花怒放吧，雖然出現的次數不多，可是這卻是對女生的稱呼，在十二世紀，想必女生是可以學習數學的。
2. 以朋友稱呼：這是出現最多次的稱呼，一共出現 28 次，分布在第三四十五章，不過看不出是否有什麼不同，不過可以確定的是在較後面的單元就不用這樣的稱呼，而改用更厲害的字眼，如數學家、通想數學的人等等。
3. 以數學家、賢者、通曉數學的人或博學者稱呼：一共出現 20 次，分部在第三四五六七章，尤其是第六七章，只要出現稱呼語的地方，都是用數學家來稱呼。或許是章節的內容加深的緣故，讓那些能學會後面章節的數學內容的人，作者便覺得他們就像「數學家」

一樣厲害，於是便用這樣的稱呼來給予讚賞。然而在前面的章節看不出使用數學家或是其他稱呼的差異。

4. 以商人稱呼：出現過 5 次，例如說詩節 74「...。精明的商人啊，快告訴我。」，這些皆出現在物品換算的題目中，可能是爲了配合題目情境需求，將解題者想成是真正的商人，去想像真實的情況爲何，說不定讀者未來會運用到這些數學知識而能派上用場。這在現在的數學教學中也很常使用，將問題放入情境裡，讓學生有如身歷其境，而在旅程中不知不覺學會數學。

5. 以孩子稱呼：只有出現 2 次，我認爲這就像朋友一樣地稱呼自己的讀者或學生，把學生當成自己的朋友或孩子，無形中會多了對他們的責任感與期許，希望他們能好好學習這些數學內容。

6. 出現許多昆蟲動物：雖然這不是稱呼語，然而這本書中出現很多趣味橫生的例題，如對成群的天鵝、大象、蜜蜂、被家養孔雀襲擊的蛇、水中隨風起舞的蓮花等生動的描述，讓讀者學習有趣而不孤躁乏味。問題產生於自然，利用大自然命題，而運用至大自然中，數學依舊是扮演重要的角色，就像數學家 Fourier 說得：「對自然的深刻研究，是數學發現最豐富的泉源。」這與現在數學教材的現況很類似，用生活化的內容來引起學生學習興趣，並讓學生了解數學不只是課本上才出現的名詞，而是與我們的生活息息相關。

### 三、心得

雖然沒有得到一個真正的結論，大概只知道越到困難的部分，婆什迦羅二世就喜歡用數學家等等的名稱來稱呼這些讀者或學生。或許是因爲這些生動活潑的例題、數學內容的呈現方式與清楚的附圖說明，讓印度人可能比同時代其他地區的人都要有成就與喜歡學習數學吧！也許老師們可以嘗試用這樣的稱呼對待每一位孩子，說不定每位學生以後都成了數學家呢！

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印備用教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

#### （HPM 通訊）駐校聯絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬅（東京大學）

基隆市：許文璋（南榮國中）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啓文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）

張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）

林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）

台北縣：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）林旻志（錦和中學）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）

陳玉芬（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）洪宜亭（內壢高中）

鐘啓哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）程和欽（永豐高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）葉吉海（陽明高中）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高商）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）

台南縣：李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）

澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）

馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！