HPM通訊

第十二卷 第四期 目錄（2009年4月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

求一術的出路：同餘理論有何教學價值與意義？

洪萬生
台灣師範大學數學系

一、前言

所謂「求一術」是指中國古代用以求解《孫子算經》「物不知數題」（參見圖一）的一種方法。這一方法在現代數論 (number theory) 中，當然連結到同餘 (congruence) 理論。事實上，一旦掌握了同餘理論，不僅求一術相關問題，其他一些初等算術中的可除性 (divisibility) 判別法則－譬如一個自然數可以被 13 整除的充要條件為何等等，當然也變得十分淺顯易解。

理論誠然必須擺在數學學習的第一順位。目前，學生學習的一個通病，顯然是升學競爭所造成的知識之徹底零碎化－其實，這也是一百多年前，德國偉大數學家克萊因 (Felix Klein, 1849-1925) 所批判的煩瑣章句之學，而其代價則是知識的系統性理解之欠缺。為了導正這種流弊，我們認為在教學過程中，教師應盡力協助學生培養系統性或結構性的理解。

當然，我們也承認在高級中學的數學課程中，有些知識或方法不是那麼容易形成一個系統或結構，不過，適當地組織一些單元，似乎還是可以「風雅地」介紹有一點結構意義的內容。這樣子說，並不表示現行教科書缺乏結構，只是在課堂上徒然增加許多解題活動，而無從利用論證來引進結構，顯然導致學生領略不到知識學習的核心價值與意義。

在本文中，我打算以讀者所熟悉的「物不知數題為例，說明當它被納入同餘理論的一部份時，所謂的理解應該可以更加深入一層才是。這一觀察部分來自我自己的教學經驗。去年秋季班，我擔任本系大一「數學導論」課程教學，本文附錄的第一題，就是我要求學生解答的作業之一。另一方面，我將這一題連同第二、三題，構成一個「問題與討論」的作業，要求選修數學史的學生（主要是大學四年級）回答。在下文的第二節，我引述了某學生甲的期末報告中有關這一作業的反思，藉以考察他的理論 vs. 方法的學習心得。

此外，這種極端重視方法的學習，當然也可能呼應傳統中算論證風格，因此，我們也將簡要對照中國清代數學家如張敦仁、駱騰鳳以及黃宗憲的「求一」心得，以及德國偉大數學家高斯的同餘理論。不過，顯然是出自直接學習西方數學的影響，二十世紀初終於有清末數學家陳志堅在他的《求一得齋算學》(1904) 指出：以不定方程解析「物不知數題」

（求一術）以及「百雞問題」（百雞術），則兩術不難貫爲一條。按：「百雞問題」出自與《孫子算經》大約同時的《張丘建算經》，中國數學家直到大約 1820 年代，駱騰鳳才得以提出一個具有理論意義的解法。在本文中，我們也將略作介紹，並轉述駱騰鳳的研究成果。

二、某學生甲的學習心得

在去年 (2008) 上學期的「數學史」結束時，我要求選課的學生（主要是大四學生）就下列問題，提出他們的反思：

請詳細說明本課程在哪一個概念、方法(解題或證明)、理論、經典、數學家改變或充實了你的看法？試逐條舉例詳述之。

結果，有一位學生甲針對期中一份問題與討論（參見本文附錄），發表他的心得，值得全文引述如下，[1]

我對連結「物不知數題」與「中國剩餘定理」那堂課的內容印象很深刻。教授給我們《孫子算經》裡的一段文字，如下：

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

答曰：二十三

術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

然後要我們理解這番話，寫下它的解法，並將之推廣。一開始，我先用高中的解法，如下：設此數為 N

$$
\begin{aligned}
N &= 3\cdot 5\cdot 7a + p \ \ (0 \le p \le 104) \\
&= 3\cdot 5\cdot 7a + 5\cdot 7b + q \ \ (0 \le b \le 3; 0 \le q \le 34) \\
&= 3\cdot 5\cdot 7a + 5\cdot 7b + 7c + 2 \ \ (0 \le c \le 4)
\end{aligned}
$$

因為用 5 除餘 3，所以 c＝3；因為用 3 除餘 2，所以 b=0，

故得 N＝105a+23＃

另解：

$$
\begin{cases} 3 \mid N-2 \\ 5 \mid N-3 \\ 7 \mid N-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 105 \mid 35N-70 \text{ --(1)} \\ 105 \mid 21N-63 \text{ --(2)} \\ 105 \mid 15N-30 \text{ --(3)} \end{cases}
$$

$(2)+(3)-(1) \quad \therefore 105 \mid N-23$　故取 N 最小值為 23＃

交給代數操作，很快的找出答案來了，可是當我回過頭思索文字內容，我卻從看不懂它的方法！？是中文不好，還是數學不好？我很疑惑 140、63、30 怎麼來的，以及為什麼要找出分別用 3、5、7 除餘 1 的數(70、21、15)，即使在我第二個解法中湊出了 70、63、30，但我以為也只是乘上了某個倍數得來的，沒仔細想過原理和意義，但教授要點醒我們的也許就是這個了！若只透過操作與計算得到的結果，而忽略它的道理，沒把它的精隨吸收進去，那麼做了上百題上千題題目也無濟於事。陳創義教授也一再提醒我們要把數學融入思考裡！

70 是可被 5、7 整除，但用 3 除餘 1 的數，而原數除以 3 要餘 2，故 70×2＝140，

[1] 此處轉述學生之期中、末報告，事先曾徵求這一位學生（此處暱稱爲甲）的同意，謹此申謝與聲明。

同理 63 和 30，接著即可寫出

N＝（140＋63＋30）－（105）× 2 = 23 #

如此（140＋63＋30）用 3 除餘 2、用 5 除餘 3、用 7 除餘 2，而要減掉（105）×2，是因為知道 105 個數一循環，我們要找到符合條件的最小正整數，於是才扣掉 210，把答案控制在 105 以內。在解讀方法之後，我們終於知道如何去把一次同餘式的解給一般化了！

比方說：$\begin{cases} x \equiv r_1 (\text{mod}\ p_1) \\ x \equiv r_2 (\text{mod}\ p_2) \\ x \equiv r_3 (\text{mod}\ p_3) \end{cases}$，其中 p_1、p_2、p_3 兩兩互質，求最小正整數 x

我們則先找出 a、b、c，使得 $\begin{cases} a \equiv 1 (\text{mod}\ p_1) \\ b \equiv 1 (\text{mod}\ p_2) \\ c \equiv 1 (\text{mod}\ p_3) \end{cases}$

$\therefore x = (ar_1p_2p_3 + br_2p_1p_3 + cr_3p_1p_2) - [p_1, p_2, p_3] \times K$　K 為某正整數 #

當然，四個或更多個一次同餘式聯立的情況，也可仿製此法，這就是教授所強調的「推廣」的重要性，倘若一個解法只適用於某些特殊題目時，那何須強記呢？只要改個形式，就又令人百思不得其解了，重要的是「實用」與「一般化」，讀大學四年，若只訓練出解高中所謂資優難題的能力，或者總是見招拆招、沒有一套中心概念的話，那讀數學系真的太浪費了，如同教授在課堂上舉出高斯的例子，證明費馬最後定理對他沒意義，那些特殊解法對我們同樣沒有意義，我們得好好反思這點。

而另一方面，以「物不知數題」連結至「中國剩餘定理」，可見這樣一個表現出「一般性」的「特例」非常成功，假使哪天我們成了教師，我們會怎麼教？這似乎也給了我們一些改善教學的好意見，多虧教授這麼用心，讓一個名題發揮它的價值與意義，更讓我們省思這麼多，謝謝。

不過，學生甲在回答那個「問題與討論」時，針對其中問題二：

如果你學過中國剩餘定理(當然含其證明)，那麼，這對於你回答上述問題〔按即：問題一〕時，有無幫助？請說明之。

他的回答如下：

有幫助。利用中國剩餘定理比較容易抓到規律。由 [3, 5, 7]=105 知每 105 個就會循環一次。因此，也可知 23 之後，23+105n，n 為自然數，應可符合三三數之賸二、五五數之賸三、七七數之賸二此規則。

儘管如此，針對問題三：

如果你學過中國剩餘定理，請問你是將它當成一個方法 (method) 來學，還是當成某個理論的一部份來學？請解釋你的答案。

他的回答卻是：

當成一個方法應用在生活上！才實用！

可見，在期末報告的反思中，他對於理論與方法的角色其實有了更深刻的體會了。

三、從「物不知數題」到中國剩餘定理

求一術始見於《孫子算經》，不過，將它集大成的南宋秦九韶，在他的《數學九章》中，卻完全不曾提及。到了明代，雖然算學家將物不知數題的「術曰」編成歌訣以廣流傳，似乎也收到了普及的效果，譬如明代程大位《算法統宗》(1592)中，就有孫子歌曰：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一支，七子團圓正半月，除百令五便得知。」

不過，真正有進一步發展的時期，則是要等到清中葉之後。乾隆時編四庫全書，編者從《永樂大典》中抄出《數學九章》，四庫版再經過李銳校訂後，張敦仁、駱騰鳳、時曰醇以及黃宗憲等，都有所發明。在此，我們只提及當時有關求一術起源的一些看法，然後，再回來簡介秦九韶的大衍求一術。

張敦仁《求一算術》(1803) 序：「筭數之學，自九章而後，述作滋多，其最善者則有二術。一曰立天元一，一曰求一。盡方圓之變，莫善於立天元一，窮奇偶之情，莫善於求一。求一之術出於《孫子筭經》物不知數之問。」可見，當時數學家對於求一術的重視。

此外，左潛爲黃宗憲《求一通解》作序時，也指出：「近日精算諸家，後先接踵，精思妙理，鑿險通幽其因仍舊術而絕無增變者，為大衍一術已耳。」這是因爲他認爲「《孫子筭經》物不知數一題，以三、五、七立算，在大衍題尚為淺顯，經中有術無草，殆未深求至理，原非有意故秘機緘。」至於論及秦九韶著述《數書九章》時，則認爲他「始立約分求等、求乘率諸法，數雖繁瑣，理實精深，後之攻是術者，皆未能洞悉其源，是以於所以然之理，具未能切近言之也。」

回到中國南宋時期，秦九韶 (1202-1261) 在他的著作《數書九章》(1247) 中，將此問題推廣到任意的模數（非兩兩互質）及餘數。至於此求解的方法，就稱爲「大衍總數術」，是先將模數化爲兩兩互質，再用「大衍求一術」去求解，對相關的理論和算法，作了集大成的工作。

事實上，「物不知數題」經由秦九韶的一般化，的確是高斯 1801 年所發表的相關定理之先聲，因此，西方國家稱此類型的問題爲「中國剩餘定理」(Chinese Remainder Theorem)，的確合乎情理。至於孫子與秦九韶的貢獻，則多虧了傳教士偉烈亞力 (Alexander Wylie) 1856 年在 *North China Herald*（《北華捷報》）所發表的論文 "Jottings on the Science of the Chinese Arithmetic"（中國算術論叢）。本論文先翻譯成德文，再翻譯成法文，在歐洲學術界流傳甚廣，因此，此一定理最後冠上形容詞「中國的」(Chinese)，並且出現在歐美一般的數論或代數教科書上，才顯得相當水到渠成。

現在，且讓我們說明中國剩餘定理如何與秦九韶的「求一」有關了。中國剩餘定理當然涉及下列一次同餘式的聯立解：

$N \equiv R_i \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ 且當 $i \neq j$，m_i，m_j 互質。如令 $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$（乘積），

則存在有 K_i，使得 $K_i \dfrac{M}{m_i} \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$，於是

$N \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i \dfrac{M}{m_i} R_i \pmod{M}$ 即爲所求。

這裡解法的關鍵，當然就在於如何轉換成爲「求一」的問題了。至於如何求一呢？請看秦

九韶的「大衍求一術」：

大衍求一術云：置奇右上，定居右下，立天元一於左上。先以右上除右下，所得商數與左上一相生，入左下。然後乃以右行上下，以少除多，遞互除之，所得商數隨即遞互累乘，歸左行上下。須使右上末後奇一而止，乃驗左上所得，以為乘率。

試以 $K\cdot 20\equiv 1 \pmod{27}$ 爲例：

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 20\\ 0 & 27\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 20\\ 1 & 7\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 3 & 6\\ 1 & 7\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 3 & 6\\ 4 & 1\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 23 & 1\\ 4 & 1\\\hline\end{array}$$

$27=1\times 20+7$	$20=2\times 7+6$	$7=1\times 6+1$	$6=5\times 1+1$
$1\times 1+0=1$	$2\times 1+1=3$	$1\times 3+1=4$	$5\times 4+3=23$

得到 $K=23$ 。

事實上，秦九韶對於「物不知數」題的延拓，還涉及非整數的模數，這是目前所謂的「中國剩餘定理」的版本之所缺，值得我們注意。

四、《張丘建算經》的「百雞術」

所謂百雞問題（參見圖二），出自南北朝時代算書《張丘建算經》，原文引述如下：

今有雞翁一，直錢五；雞母一，直錢三；雞雛三，直錢一。凡百錢買雞百隻，問雞翁、母、雛各幾何？

答曰：雞翁四，直錢二十；雞母十八，直錢五十四；雞雛七十八，直錢二十六。雞翁八，直錢四十；雞母十一，直錢三十三；雞雛八十一，直錢二十七。雞翁十二，直錢六十；雞母四，直錢十二；雞雛八十四，直錢二十八。

術曰：雞翁每增四，雞母每減七，雞雛每益三即得。

如設 x, y, z 分別代表雞翁、雞母、雞雛各買之數，則依據題意，可得下列聯立方程：

$$x+y+z=100$$

$$5x+3y+\frac{1}{3}z=100$$

運用方程相消未知數，以及不定方程的整數解求法，即可驗證上述答案全部正確。問題是：張丘建究竟如何得知？原書的術曰實在太過簡單，對於我們的解題沒有什麼幫助。不過，話說回來，雖然對後來的算學家而言，所需之方法（如方程相消與輾轉相除）都已齊備，然而，還是必須等到 1820 年代的清中葉數學家駱騰鳳，才首次正確地解出這一問題。

根據陳鳳珠 (2001) 的研究，駱騰鳳乃是結合了「三色差分法」與「大衍求一術」，而解決這一懸宕已久的歷史名題。此處，我們引述陳鳳珠利用現代符號所「翻譯」的解法，以供讀者參考：

1. $15x+9y+z=300,\ x+y+z=0$
2. 兩式相減，得 $(15-1)x+(9-1)y=200$ ，即 $14x+8y=200$ (1)
3. (1)÷2 得 $7x+4y=100$ 知 $4y\equiv 0=R_1(\mathrm{mod}4)$ ，$4y\equiv 2=R_2(\mathrm{mod}7)$ 。
4. $M=4\times 7=28$ ，$M_2=4$ ，$4\equiv 4(\mathrm{mod}7)$ ，得 $K_2=2$ 。
5. $W_2=K_2\times M_2=8$ ，$U_1=0$ 、$U_2=R_2\times W_2=16$ ，$4y=(U_1+U_2)-0\times M=16$ ，得 $y=4$ 。
6. $x=(100-16)\div 7=12$ ；$z=100-12-16=84$ 。
7. 知 $7(x-4)+4(y+7)=100$ ，$7(x-8)+4(y+14)=100$ ；得 (x,y,z) 三解爲：$(12,4,84)$ 或

(8,11,81) 或 (4,18,78)。

陳鳳珠在她的碩士論文中，當然引述了駱騰鳳的原文，其中充滿了大衍求一術的術語，如「定母」、「衍母」、「衍數」以及「用數」等等，[2]足見駱騰鳳這一位清中葉數學家還是可以推陳出新，統整出一個具有理論意義的研究成果出來。

五、高斯的貢獻

當高斯 (1777-1855) 在 1801 年出版《算學講話》(*Disquisitiones Arithmeticae*) 時，他才 24 歲。本書是近代數論研究進入十九世紀的里程碑，也代表這門學科從此有了理論結構，超越了個別解題方法的收集之格局。後者主要是十八世紀數論大師勒讓德 (Legendre) 的風格，他的《數論研究文篇》(*Essai sur la theorie des nombres*, 1798) 歸納了截至當代的主要研究成果，譬如有關質數、二次式、連分數等等，都羅列在內，甚至他還提供了一張整數表，說明其各自的整數性質。相反地，高斯雖然處理了同樣的單元，但卻尋求定理以便揭露其底蘊的結構，譬如說，他就給出了整數因數分解唯一性的第一個存在性證明，而不只是提供解法而已。無怪乎數學史家都將高斯視為上承十八世紀、下啓十九世紀的偉大數學家，因爲他不只精通十八世紀的解題，而且還開拓了十九世紀重視結構面向的數學風格。

《算學講話》中有一個部分專門處理整數的同餘（請注意："≡" 這個同餘記號是他所發明的），值得在此稍加介紹，以便讓讀者對於高斯所建立的理論結構，有一個起碼的認識。這一短短篇幅的一節細分成有十一個小節，1、2、3 小節主要定義同餘數 (congruent numbers)、模數 (moduli)、留數 (residues) 與非留數 (non-residues)，並推演簡單的性質與定理。第 4 小節專論最小的留數 (least residue)。第 5 小節介紹幾個有關同餘數的命題，比如說吧，相對於一個合成的模數 (composite modulus)，有一些數同餘，則相對於這個合成數的因數而言，這

些數必然也會同餘。第 6、7、8 小節介紹同餘的運算法則：相對於任意模數而言，如果$A\equiv a, B\equiv b, C\equiv c$等等，則$A+B+C$ etc. $\equiv a+b+c$ etc.，而且$A-B\equiv a-b$。還有，若$A\equiv a$，則$kA\equiv ka$；若$A\equiv a, B\equiv b, C\equiv c$，則$ABC\equiv abc$；以及若$A\equiv a$，且k爲一正整數，則$A^k\equiv a^k$。第 9、10、11 小節則結合同餘式與整係數方程式的有理數解，作了一個初步的討論。最後，在第 12 小節，高斯提出若干應用，他主要指出有關可以被 9、11 或其他數整除的判別法則，都可以歸結到前述定理的應用。

六、結論

從數論的結構觀點來看，高斯的同餘理論代表了理論拔高的特殊意義，並顯現了它在教學方面的普世價值。因此，以「求一術」爲例，如果我們要想將其相關概念與方法鋪陳出一點結構趣味，那麼，引進同餘理論，當然是唯一的出路！二十世紀初，中國清末數學家陳志堅的貫通「求一術」與「百雞術」爲不定方程解析，儘管頗爲難得，然而，還是欠缺理論高度。

---

[2] 針對「物不知數題」而言，所謂的「定母」是指 3，5，7；「衍母」是指 105；「衍數」是指 35，21，15；「用數」則是指 140，63，30。

誠然，「物不知數題」與「百雞問題」都是極有意義的數學名題，圓滿地解決它們當然可以帶動數學的進步與發展。這也是問題及其解決 (problem-solving) 成爲數學的靈魂的主要原因之一。不過，話說回來，要是缺乏理論建構的視野，那麼，解題所能帶來的數學發展，大概就不無限制了。這個推論，應該也可以適用於中小學的數學學習。刁鑽古怪的難題測驗在東亞國家的數學教育評量或入學考試中，似乎是個極普遍的現象，這或許也解釋了這些國家的國際數學教育評比之名列前茅。然而，他們共同的重術輕理，應該也很難否認。日本數學史家平山諦曾就和算的「遺題繼承」之發展，提出他的評論：

這種「難問注意」的流行以及以極其複雜的計算為主的傾向，導致了輕視理論的弊端。今天的入學考試不也存在類似現象嗎？

這是日本的數學教育現實，我們似乎也不遑多讓才是。如此看來，如何折衷理論與解題，絕對是我們身爲教師者無法迴避的重大課題了。

參考文獻

CBMS (Conference Board of the Mathematical Sciences) (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. http://www.cbmsweb.org/MET_Document/index.html.

Courant, Richard and Herbert Robbins (revised by Ian Stewart) (1996). *What Is Mathematics?* New York / Oxford: Oxford University Press.

Gauss, F. (1959). “On the Congruence of Numbers”, David Smith E., eds., *A Source Book in Mathematics* (New York: Dover Publications, INC), pp. 107-111.

Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Rainbow of Mathematics*. London: Fontana Press.

Libbrecht, Ulrich (2005). *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. New York: Dover Publications, INC.

Ore, Oystein (1988). *Number Theory and Its History*. New York: Dover Publications, INC.

Struik, Dirk (1987). *A Concise History of Mathematics* (Fourth revised edition). New York: Dover Publications, INC.

平山諦 (2005).《東西數學物語》(代欽中譯)，上海：上海教育出版社。

李儼 (1998).〈大衍求一術的過去與未來〉，收入郭書春、劉鈍主編，《李儼 錢寶琮科學史全集》第六卷（瀋陽：遼寧教育出版社），頁 116-163。

孫子 (1981).《孫子算經》，收入《宋刻算經六種》，上海：上海古籍出版社。

秦九韶 (1993).《數書九章》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯・數學篇》(一)，頁 439-724 廿。

張敦仁 (1993).《求一算術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯・數學篇》(五)，頁 95-139。

陳鳳珠 (2001).《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》，台北：國立台灣師範大學數學系碩士論文。

黃宗憲 (1993).《求一術通解》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯・數學篇》(五)，頁 1119-1144。

楊瓊茹 (2009).〈求一與占卜〉，載洪萬生等，《當數學遇見文化》(台北：三民書局)，頁

72-83。
楊瓊茹 (2009).〈剪管術 vs. 天算頌〉，載洪萬生等，《當數學遇見文化》(台北：三民書局)，頁 151-160。
蘇意雯 (2009).〈遺題繼承，串起中日數學史〉，載洪萬生等，《當數學遇見文化》(台北：三民書局)，頁 172-183。

附錄

數學史問題及討論 (2008/10/28)

姓名：
Email:

一、下列問題是大一「數學導論 A」的第一次考試題目之一，目的是連結「物不知數題」與「中國剩餘定理」(Chinese Remainder Theorem)：

In an ancient Chinese mathematical text, there is a famous problem with its solution:

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

答曰：二十三。

術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

Try to generalize the solution to this problem. Write down what you think as much as possible.

你認為如何回答比較好？為什麼？

二、如果你學過中國剩餘定理(當然含其證明)，那麼，這對於你回答上述問題時，有無幫助？請說明之。

三、如果你學過中國剩餘定理，請問你是將它當成一個方法 (method)來學，還是當成某個理論的一部份來學？請解釋你的答案。

高斯 Johann Carl Friedrich Gauss

陳彩鳳
江翠國中退休數學老師

一、高斯的生平

1777 年 4 月 30 日，德國的布倫茲維克城 (Brunswick)誕生了偉大的數學家高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777~1855) ，他不只是數學家，更是天文學家。

他不但被認爲是十九世紀最偉大的數學家，而且與阿基米德、牛頓及尤拉並稱爲歷史上最偉大的四位數學家。
高斯的祖父是農民，父親除了從事園藝的工作外，也當過各式各樣的雜工，如護堤員、建築工等等。

母親是一名石匠的女兒，在三十四歲時才結婚，三十五歲生下了高斯，而她有一個很聰明的弟弟弗里德里希 (Friederich)，他手巧心靈，是當地出名的織綢能手。高斯的這位舅舅，一有機會就儘可能啓迪高斯的邏輯思維能力。高斯日後對早逝的舅舅婉惜道:「我們失去了這樣一位業已誕生的天才。」

二、數學神童

傳說在高斯十歲時，他的小學老師布特納 (Buttner)，出了一道算術難題：

計算 1+2+3+…+100=？

每當考試時，第一位寫完的同學將石板 (當時作爲寫字用) 面朝下放在老師的講桌上，第二位寫完的就將石板放在第一位同學的石板上面，…就這樣一片一片疊起來。

布特納心想這可難爲初學算術的學生，但是高斯卻在幾秒後將答案解出來；在師生驚奇中，他詮釋如何解題，他找到了算術級數 (等差級數) 的對稱性，就像求得一般算術級數和的過程一樣，把數目一對一對地湊在一起。

1 ＋2 ＋3＋……＋ 98＋ 99＋100

每一組都是 101，共有 50 組，因此總和爲 101×50=5050。多漂亮的解法啊！

高斯在十一歲的時候就發現了二項式定理 $(x+y)^n$ 的一般情形，這裡的 n 可以是正負整數或正負分數。

當他還是一個小學生時就對無窮的問題注意了！

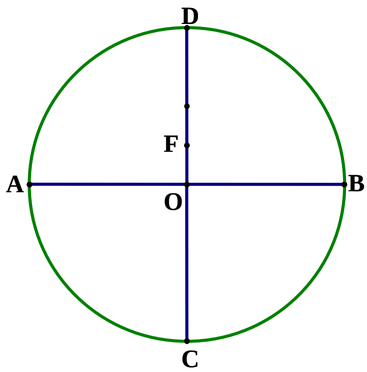
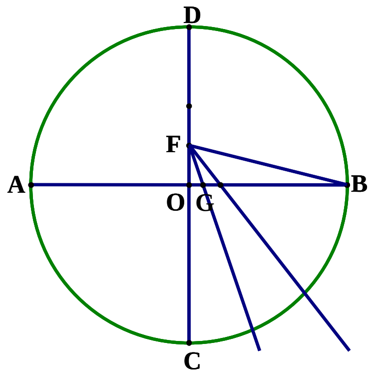
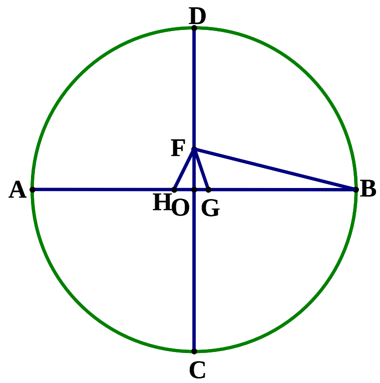
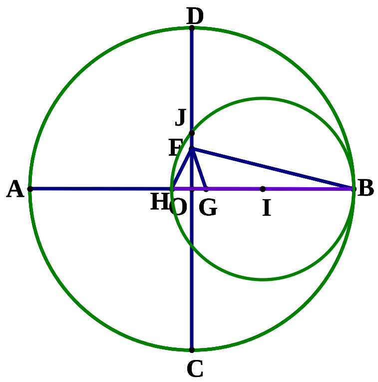
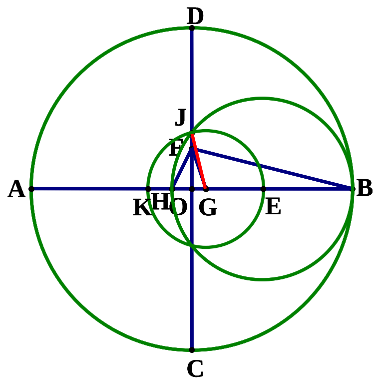
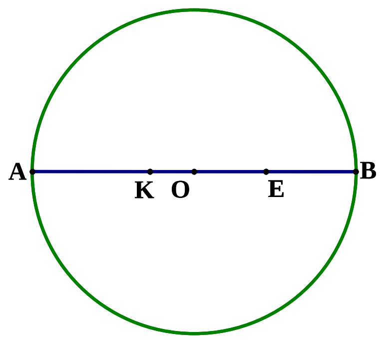
三、正十七邊形

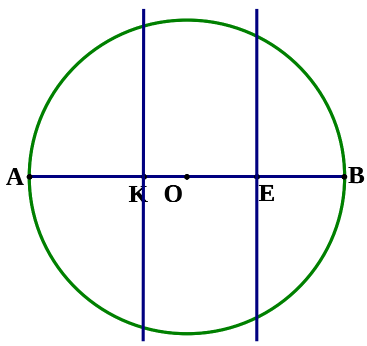
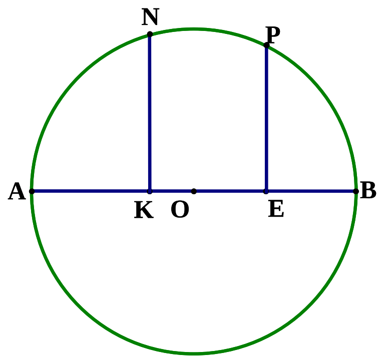
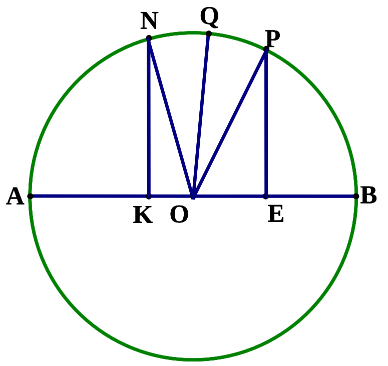
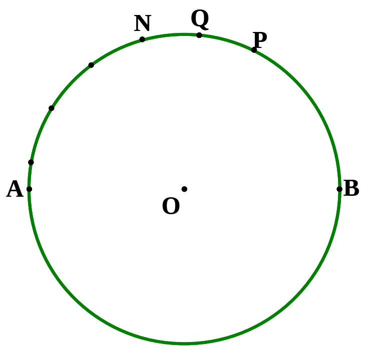
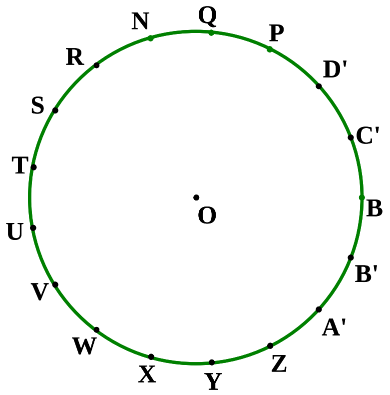
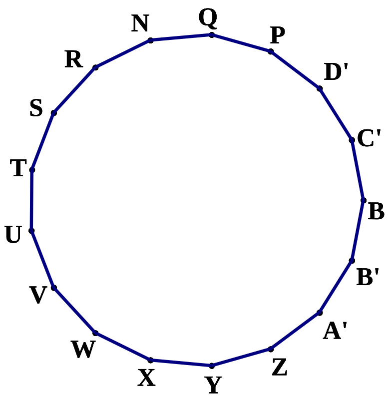
高斯用代數方法解決了二千多年來的一個幾何難題，在 1796 年 3 月 30 日他十八歲的前夕，這個數學上的新發現，使他決定終生研究數學，這也奠定了高斯

在數學界不朽的地位。

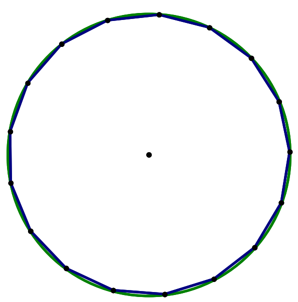
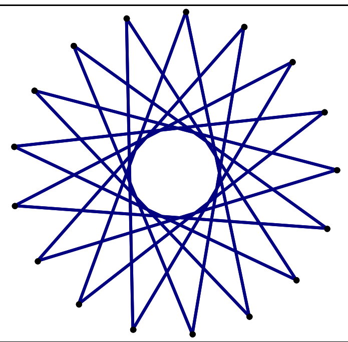
此一發現在數學史上是很重要的，高斯用歐氏工具 (直尺、圓規) 作圖解決了一個令歐幾里得「頓挫」的問題。他證明了一個圓內接正 17 邊的多邊形，對此發現他既高興又驕傲。

以下是在 1893 年數學家理查蒙 (H. W. Richmond) 簡化高斯用尺規構造正十七邊形的方法，其步驟如下：

<table>
<tr>
<td>先畫出一圓
再畫出兩條互相垂直的直徑 AB 和 CD
再將 OD 線段四等分

</td>
<td>連接 FB 線段
再將∠OFB 四等分

</td>
<td>連接線段 FG
作∠GFH = 45 度

</td>
</tr>
<tr>
<td>取線段 HB 的中點 I
以 I 爲圓心
線段 IH 爲半徑畫圓
交線段 OD 於 J 點

</td>
<td>連接線段 JG
以 G 爲圓心
線段 JG 爲半徑畫圓
交線段 AB 於 E 和 K 點

</td>
<td>只留下直徑 AB 和圓心 O 及 K、E 兩點

</td>
</tr>
<tr>
<td>過 E 和 K 點作線段 AB 的垂直線</td>
<td>交圓於 N 和 P 兩點</td>
<td>作∠NOP 的角平分線 OQ 交圓 O 於 Q 點，or 連接 NP 線段，再作 NP 線段的中垂線交圓弧 NP 於 Q 點</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>以 N 爲圓心,線段 NQ 爲半徑依次畫弧

沒通過 A 點 !</td>
<td>依次交圓周於
RSTUVWXYZ A' B'BC'D'
且通過 B 點 !
</td>
<td>依次連接
QNRSTUVWXYZA'B'B
C'D'PQ
則十七邊形
PQNRSTUVWXYZA'B'
BC'D'即爲所求
</td>
</tr>
</table>

尺規作出正十七邊形，使他在數學家裡一夕成名，他是那麼的興奮，因此決定一生研究數學。據說，他還表示希望逝世後在他的墓碑上能刻上一個正十七邊形，以紀念他少年時最重要的數學發現。然而，高斯的紀念碑上卻刻著一顆十七芒星，原來是負責刻紀念碑的雕刻家認爲，正十七邊形與圓形太像了，大家一定分辨不出。

<table>
<tr><td colspan="2">正十七邊形的確很接近圓！</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

四、一生的成就

高斯一生共發表 155 篇論文，他對待學問十分嚴謹，只是把他自己認爲是十分成熟的作品發表出來。高斯若把他的所有發現都發表出來，則目前的數學將要往前推進 50 年。

終其一生，高斯總是將答案寫下，不留一點計算痕跡，而且他對自己寫的答案有絕對的把握。

他說過「數學是科學的皇后，而數論是數學的女王。」那個時代的人稱高斯是「數學王子」。

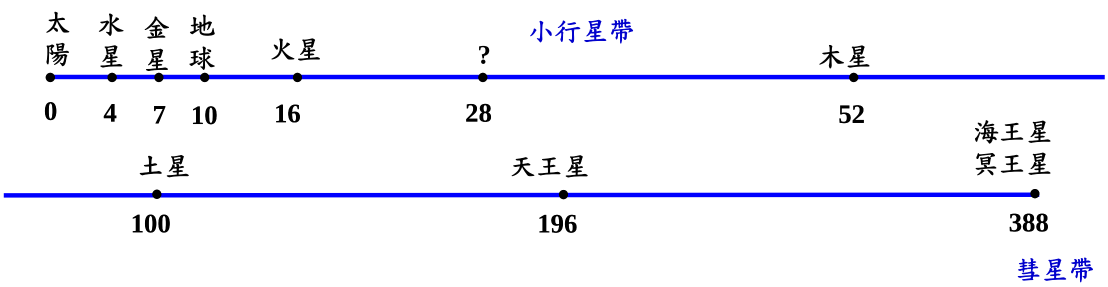
肖像能被放在郵票和鈔票上，足見高斯在數學界崇高的地位！	
	

五、高斯在天文學上的成就

24 歲開始，高斯放棄在純數學的研究，有幾年專心研究天文學，其實是因爲他不能在大學裡找到工作，他又不願意永遠靠費迪南公爵的恩賜過日子，因此他選擇報酬不錯且較穩定的職業，成爲專業的天文學家。他最初研究月球的運轉規律他的方法及公式和歐拉的不同，後來有一件事吸引他的注意，因此顯出他的才華。

在 1776 年一個德國數學家提丟斯 (J.Titius) 發現太陽和行星距離的經驗規則:

有一數列 0 , 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 , 192 , 384 , …，即從第三項開始後項爲前項的 2 倍，把這個數列每項逐次加上 4，得到數列 4 , 7 , 10 , 16 , 28 , 52 , 100 , 196 , 388 , …；Titius 和天文學家波得 (J. Bode) 發現這些數接近水星、金星、地球、火星、木星、土星到太陽的距離的比，



可是，當時 28 的位置上卻沒有行星。到了 1781 年，英國天文學家威廉赫歇耳 (W. Herschel) 發現了天王星位置在 196 的地方。因此根據提丟斯一波得定則，人們猜測在 28 的地方應該有顆星還未被發現。

1801 年的大年夜，意大利巴勒摩的天文學家發現在 28 的位置有一顆新星，它被命名爲「谷神星」(Ceres) ，現在我們知道它是在火星和木星之間的幾千個小行星組成的小行星帶 (Asteroid belt) 中的一顆小行星。可是當時歐洲天文學家之間意見分歧不一，有人說它是行星，有人認爲它是彗星。必須繼續對這新星觀察才能判定，可是當人們想要觀察時，它卻杳然失去蹤影。一開始人們就不知道它的軌道是圓，還是橢圓或是拋物線，決定它的實際軌道是個很困難的問題。

在這顆星被發現後的六個月，天文學家還不能決定它的軌道是怎麼樣子。高斯這時對這個問題產生興趣，他決定解決這個捉摸不到的星體軌跡的問題，由於用以前的天文學家的方法來找太麻煩了，高斯自己獨創了只需要三次觀察就可以用來計算星球橢圓軌道的方法。他可以極準確地預測行星的位置。人們利用他的方法去算，果然準確無誤地找到谷神星所在的位置！

1802 年人們又用他的方法準確地找到小行星二號…智神星 (Pallas) 的位置，而且人們利用他所發現的方法可以計算彗星的軌道，只需要一兩小時的時間，而舊的方法卻需要三、四天才能完成。

六、高斯的座右銘

"Few but ripe."（「稀少，但成熟」）

所以，他不多寫，寫成的作品則以敘述簡潔，內容豐實著稱。

在德國慕尼黑的博物館裡有一幅高斯的油畫像，底下幾行字很貼切地說明了高斯的成就 :「他的思想深入數目、空間及大自然的最深秘密；他測量星星的路徑、地球的形狀和自然力；他推動了下一個世紀的數學進展！」

參考資料

李學數，《數學和數學家的故事》，新竹：凡異出版社。

《數食店月刊》的緣起

陳玉芬

明德國中

所謂「欲開民智，首要辦報」，對於數學，我也一直有著這樣的想法，總覺得像國文，有國語週刊；英文，有雙語週刊；自然，有科學月刊．爲何獨獨數學沒有任何一種「平易近人」的期刊可以走進我們國中生的生活？接近我們的學生？

就這樣，因緣際會地去年剛巧接了一個數學性質的社團，心想就從自身開始吧！於是在社團的同學們腦力激盪下找到了刊名 — 數食店，就這樣它開張了。

首先，我不把它定位在解題，傳教，因爲那將使學生怯步，更令老師們倒胃，因此改以生活性，趣味性及提增學生互動性爲主體，有時也配合目前所學的單元做深入的橫向思考，例如：在討論「圓」時，就會在期刊上探討「幾何作圖上的三大難題之一：化圓爲方」並鼓勵同學以「圓」爲主題做成對聯，打油詩或圓與圖形的聯結。這才讓我驚覺，學生的無限潛力，於是，我發現與學生一起成長，那才是我最大的收獲，同時也是我能持續經營數食店到現在的最大原動力．

如今的心情正如期刊中所說：「小本經營，人手有限，經驗不足，疏漏難免」，只希望能收抛磚引玉之效，若能獲得更多的數學先知，先輩熱心參與，相信將使我們的內容更加多采多姿，也期待有一天我們這數食店能做出**數學的滿漢大餐**以饗愛好數學的饕客．

數食店月刊的定位與期許

主軸

目前，本月刊的發行主要是由四大主軸組成：

第一主軸：由數學老師執筆，主要是對該月份所上到的進度，做深入介紹、推廣、與生活上的聯結，或是教師個人在教學上的想法。

第二主軸：屬於學生創作園地，例如：學生對稱圖形的發表、坐標圖形的設計、學生的多元解題、學生將邏輯問題以漫畫創作、或學生自行設計題目等，藉此發現學生數學特質與創意、更藉由刊物的發行增加學生的自信。

第三主軸：各類益智、趣味、謎題問題等的解題，並設「有獎徵答」，以鼓勵學生積極參與。

第四主軸：發表新書介紹、數學好站報報、本校相關數學活動訊息的公告，主要是希望能讓學生長期接受數學的薰陶。

定位

・傳達教科書以外的數學知識 － 功夫在「數」外，引用香港數學教授蕭文強先生所言：「汝果欲學『數』，功夫在『數』外」，因爲他說：「學習數學不能只顧專注數學形式工夫，更要注意數學思想方法，也要豐富數學生活閱歷，還要注重數學工夫的品德修養」。所以，本刊的發行也是希望數學除了內在的訓練之外，數學更應與生活聯結。

・學生創作：這是一個重要的園地，也是教師們一直希望能做得很好的一個區塊，因爲在這裡不僅能發現學生的創意，更能讓學生找到自信。

・腦力激盪：益智、趣味、解謎題，藉由一些有趣活潑的題目，讓學生腦力激盪，也讓學生對數學有不一樣的感覺。

・與學生對話：藉由訪問資優學生的學習方法、數學得獎學生的心情、或在某些單元學生障礙的訪談，讓老師更了解學生的學習心情，更讓學生對本份刊物產生親切感。或是也可藉由刊物的發行，告知同學能於現今的網站中找到適合的數學網站來自我學習。

期許

期許學生對數學不再覺得冰冷、期許學生對數學產生信心、期許學生提倡「數學有用論」、更期許數學走進學生的生活中！相信這些都是數學老師所殷殷企盼的！

數食店月刊第二十九期

明德國中　數學科教學研究會

本期內容：

- 「尺規作圖」的限制由來與教學上的定位
- 用數學對稱剪出數學的美
- 生鏽的圓規
- 數學 Fun 一下

數食店月刊第二十八期

明德國中　數學科教學研究會

本期內容：

- 從畢氏定理談「無字證明」（下）
- 找碴，就有茶
- 數學謎題創意設計
- 你被制約了嗎－－－如何將正方形２等分
- 滿分書房－－－下苦功，天天練數學２０題

數食店月刊第二十七期

明德國中　數學科教學研究會

本期內容：

- 從畢氏定理談「無字證明」（上）
- 動動腦時間
- 最近的夯話題———三碼

數食店月刊第二十六期

明德國中　數學科教學研究會

本期內容：

- 第二屆明德數學週得獎名單公佈
- 動動腦時間
- 中一、中二段考大猜題結果出爐
- 現在流行什麼？————三聚氰胺!

數食店月刊第二十五期

明德國中　數學科教學研究會

本期內容：

- 好東西要和好朋友分享
- 同學，請你幫個忙!
- 動動腦時間
- 奧運中的數學
- 數學也可以很文學

數食店月刊第二十四期

明德國中　數學科教學研究會

本期精彩內容：

- 細說函數
- 明德數學週競賽結果揭曉囉！
- 另類數獨解答
- 好書相報 - 數學樂翻天 2
- 本期謎語 1
- 上一期的謎底揭曉
- 正四面體謎題

數食店月刊第二十三期

明德國中　數學科教學研究會

本期內容：

- 第一屆明德數學週開跑囉！
- 動動腦時間
- 好書相報區 - 數學樂翻天 1
- 另類數獨
- 一年級數學科複習考英雄榜暨拜訪英雄錄

編者案：

有關《數食店月刊》各期內容，亦可於台灣數學博物館網站（http://museum.math.ntnu.edu.tw）瀏覽

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！