HPM通訊

第十二卷 第六期 目錄（2009年2月）

數學真理與時間相關嗎？

Judith V. Grabiner

黃俊瑋 譯

洪萬生按：本文譯自 Judith V. Grabiner, “Is Mathematical Truth Time-Dependent?”, *American Mathematical Monthly* 81(4) (1974): 354-365. 並經由Grabiner教授授權讓我們在此刊登中文版，謹此申謝。Grabiner教授曾任教哈佛大學科學史研究所，是道本周 (Joseph Dauben) 教授的老師，因此，她與台灣HPM團隊關係之密切，當然不在話下。

1.導言

數學事實與時間相關嗎？我們通常會立即衝動地回答：不。當然，我們承認，自然科學事實的判斷標準，經歷著持續不斷地變遷，諸如哥白尼之天文學革命，達爾文之於生物學的革命，愛因斯坦在物理學上帶來的革命等。但是，諸如此類的科學革命，是否會發生在數學上呢？數學家經常必需回答這些問題，好比十九世紀的數學家Hermann Hankel就認為：「在大部份的科學中，當一個新理論建立的同時，勢必拆毀前人們所奠立的理論，唯有數學，每個世代是在舊有的理論架構上，建立新的故事。」

然而，Hankel的觀點並非全然正確。在過去數學發展的過程中，也曾出現過多次動盪。譬如說吧，古希臘歐幾里得建立的幾何公設系統，它將數學從經驗科學轉變成為全然智識的領域；再者，當我們考慮十九世紀非歐幾何與非交換代數的發現，這些發展，讓我們認識到數學並非獨具特別的地位，它反而只是一門透過邏輯連結的抽象學問。這些思想上的革命，改變了關於數學事實本質的觀點，也改變了什麼是可以或應該被證明的觀點。

另一個數學革命發生在十八至十九世紀之間，並聚焦於微積分這門學問上。這個變遷是針對數學是強力工具與新奇結果之看法的摒棄，轉而支持數學應是清楚明確的定義與嚴格的證明。由於這個變革，數學的基礎問題回歸到數學家本身，而不再是歷史學家與哲學家討論的重點，有關數學革命的特色，也因而不再廣泛地被了解。

在這篇文章中，我將嘗試陳述這些曾經發生過的主要改變，然後，我也將研究是什

麼樣的原因致使它發生，最後，我們將回歸到標題中所提出的問題。

2. 十八世紀的分析學 － 實作與理論

為了重建十八世紀數學活動的樣貌，讓我們首先關注一個著名結果的起源，也就是Leonhard Euler導出餘弦函數的無窮級數公式的方法，他由下列等式出發：

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$$

根據二項式定理展開等式的左邊，則二項展開式的實部會等於$\cos nz$，於是他得到：

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(N-1)}{2!}(\cos nz)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos nz)^{n-4}(\sin z)^4 - \cdots$$

令z是無窮小弧度，並且令n無窮大，那麼，我們會得到：$\cos z = 1$，$\sin z = z$ $n(n-1) = n^2$，$n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4$，等，於等式變成：

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2!}z^2 + \frac{n^4}{4!}z^4 - \cdots$$

因為z是無窮小而n是無窮大，Euler推論nz會是個有限的量，所以令nz=v

於是我們得到$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \cdots$

透過上述例子，我們實際欣賞了關於十八世紀數學家所進行推廣的工作。首先，他們主要強調於結果的獲得，數學家們知道的許多來自這個時期的結果，這些結果冠上了萊布尼茲 (Leibiniz)、白努利 (Bernoulli)、羅必達 (L'Hopital)、泰勒 (Taylor)、歐拉 (Euler) 和拉普拉斯 (Laplace) 等的名字。但是，這些結果原先被獲得的方法，與今日我們證明它們的方式全然不同。我們甚至會懷疑倘若歐拉與當代的數學家們，要是受限於今日嚴謹的標準，是否仍舊能導出他們當時的諸多研究結果？當然，這也是十八世紀與現今數學研究的一大差異。

至於是什麼原因，導致十八世紀數學家認為結果比嚴格的證明來得重要呢？一個主要的理由，在於數學家參與科學的大探索，在文藝復興時代，發現新的知識，是所有科學的主要目標。在數學上，解三次方程式的方法在1545年被公開，而擴張了數學知識領域的版圖。到了17世紀末期，由於微積分的發明，提昇了數學家們對尋求數學結果的渴望，透過這個強而有力的新方法，不斷地攻克浩瀚的數學新世界。我們很難想像有比解決關於太陽系星球運行之方程式問題，更令人興奮的工作，即使多數數學家無法解釋為何如此行得通，但微積分仍被視為是導出新數學結果的理想工具。

如果說，大部份十八世紀數學的首要目標是為了獲致結果，我們將期望這時期的數學家使用這些數學方法，不斷地生產出新的結果。對十八世紀的數學家而言，研究的結果回過頭證明了方法的有用性，數學也獲致大量的成功，跨越整個十八紀，諸如變分學、畫法幾何 (descriptive geometry)、偏微分方程等新的數學分支興起，並且各自擁有其專屬的方法與研究成果，而一些早已存在的分支也益加成熟，如同數學物理與機率論等。

十八世紀數學所產生的第二個重要延拓，以及所衍生出的相關結果，主要在於數學

家大量地依賴符號的力量。有時，似乎只要我們能一致地利用符號寫下來，敘述的正確性就是必然的。而且，這個假設並不單只能應用於有限的式子，處理有限的方法可以依慣例地推廣到無限的情況，許多關於無窮冪級數的重要事實，都被發現可以將其視爲一個非常長的多項式來處理。

十八世紀，這個對於符號的信賴，在數學史上可說是個異例，需要在此詳加說明。它主要來自於代數學與微積分學上的勝利，首先，我們來檢視代數學的情況，現在一般所使用的符號記號法則，是由法國數學家韋達於1591年所引入，這也可被視爲數學史上最偉大的發現 (discovery) 之一。讓我們透過一個實際的例子來闡述他的威力。當我們考慮：

(2.1) $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$

符號的威力正可幫助我們發現，從再多數值例子也難以看出來的事實：根與任意次數多項式的系數之間的關係。方程式 (2.1) 爲三次多項式，並有３個根。根據類似(2.1)的結果，Albert Girard在1629年提出n次方程式有n個根的看法－這也是高斯後來稱之爲「代數基本定理」的第一次形式化。

但是，爲何如同 (2.1) 的代數公式被十八世紀數學家認爲是對的呢？主要因爲代數是一種「普遍的算術」(universal arithmetic)。方程式 (2.1) 的有效性，在於它是關於有效算術陳述的一般化結果。至於我們前述關於歐拉的無窮論述，又該怎麼說呢？問題的答案是類似的，正如同無窮十進位小數的算則，我們可以推廣並創造無窮級數的代數。處理無限的過程像有限的情況一樣，只不過他們較爲冗長罷了。

關於代數支持符號使用的信念，在後繼的微積分研究之中得到提昇。萊布尼茲發明了dy/dx以及$\int ydx$的記號來幫助我們思考，而這些記號也的確具有如此功能，當我們在積分符號下進行變數變換的工作時，應該歸功於萊布尼茲的發明。假設y是x的函數，而x是t的函數，當我們想要了解dy/dt時，萊布尼茲的符號幫助我們發現連鎖法則：

dy/dt＝(dy/dx)(dx/dt)

萊布尼茲其用於微積分符號的成功，強化了數學家對於符號論證能給出正確結論的信心。

在十八世紀，對於符號的威力的信念，被擴展至數學之外的學科，舉例來說，它使得化學家拉瓦錫 (Lavoister) 預知「化學代數」，而1813年Berzelius所發明的化學符號，本質上，就類似於今日我們所使用的。任何想要平衡化學式的人都知道，這些符號是如何地幫助我們思考。純符號論證有效性的想法，很快地從數學漫延至其它領域，並且向我們展現了它將如何地風行。

就上面所述，或許還不能引領讀者相信十八世紀數學家們對分析的基礎完全不感興趣。而我也尚未摘要出十八世紀數學家們企圖討論dy/dx、極限、無限大以及積分之本質時，所產生的總總紛歧意見。而這個世紀，Carl Boyer也稱之爲「遲疑不決的時期」(the period of indecision)，意即大家對於數學基礎漠不關心的態度。爲了達到我們的目的，在此必需強調：對於基礎的討論，並不是十八世紀數學家關心的問題，同時，數學基礎的

研究也不出現在科學期刊的研究之中，反而被歸放於一般教科書的第一章之中，或是在一些普及讀物中可發現。更重要的，數學研究活動並不仰賴數學家徹底地理解他們所使用的基本概念。但是，十九世紀中的情況已經不再如此，當然也與今日有所不同。

十九世紀的分析學的工作始於柯西 (Cauchy) 與布爾札諾 (Bolzano)，他們嚴密地處理極限、收斂與連續等概念，以及需要用到這些概念來進行嚴密證明的相關定理。我們了解這些證明是相似的，並且我們至今仍在使用。關於十九世紀分析學的新方向，不僅只是技巧上的不同，它是關於數學面貌以及數學研究方式的一大改變。現在，我們描述十九世紀的方法。並準備處理本文中最有趣的問題(從歷史觀點視之)。意即：是什麼原因促使了新舊觀點之間的改變發生呢？數學家又是如何發展出現行的方式呢？

在這個改變中，有兩件事是必要的。最顯然地，嚴密證明所需要的技巧必須被發展。我們會在第 4 節之中，討論主要技巧的發展史。此外，在態度上也需要產生轉變。當然，光只有態度的轉變而沒有技巧，仍無法開花結果。但是，態度上的轉變雖然不充份，但在建立嚴密性的過程中，卻是無可或缺的。我們的下一個任務，將解釋十八與十九世紀之間，數學家們面對微積分基礎時，態度上的種種轉變。對數學而言，支配這些變化的發生是自然的嗎？或是導因數學外在的因素所驅使呢？接下來，讓我們進一步研究種種可能性。

3. 為何數學事實的標準發生了變遷呢？

第一個可能的解釋，是如同我們今日用來說服學生那樣：微積分被賦予嚴密性是爲了避免錯誤並更正已發生的錯誤。但這事情並不是那麼一回事，出現在十八世紀的相關數學研究中的錯誤，令人意外地少見。在此，有二個主要的原因：首先，某些結果可以透過數值進行核驗，或透過實驗的方式。於是，結果的有效性不需依賴嚴密的數學基礎而得到驗證。再者，更重要的是，十八世紀數學家擁有一種幾乎不會錯的直覺。雖然，他們不由嚴密的定義引導，他們卻對分析的基本概念具有深刻的理解，許多十八世紀所出現不穩固的論證都可以被挽救，並且過具體的假設而使之嚴密，這也支持了前述的結論。然而，我們必需指出，當有越來越多數學家對複雜的函數、多變數函數與三角級數感興趣的同時，避免錯誤的需求在十八世紀末變得越來越重要。在這些數學分支中，有越來越多看似真實的猜想，難以透過直觀判斷。關心這些結果的同時，從而吸引了數學家們對數學基礎問題的注意。

第二個我們可能想到的解釋是：微積分在一種將數學一般化與推廣的精神中被賦予嚴密性。十八世紀創造了大量的數學結果，或許是基於整合這些結果的需求，自動地將數學家們的眼光，導向嚴謹性與公設化的基礎。但是，在柯西的工作之前的百年間，已有了諸多的基礎研究結果，統整研究結果並不能使之嚴密，嚴密的功能不僅只是爲了統整，而是爲了證明。另外，就微積分是在數學家們統整有價值的研究成果中變得嚴謹的假設，我們必需稍加補充。在十八世紀的末期，多位數學家認爲，數學領域發展的速度已趨緩，事實上，這樣的想法是有根據的，應用十八世紀數學方法所得到的研究結果，絕大部份皆已開發完成。也許，當進展減緩的同時，也該是時候坐下來反思數學家們所完成的工作了。這樣的體認也吸引了一些數學

家開始關嚴密性的問題的。

第三個可能的解釋則與幾何學先驗的嚴密性有關。從希臘時代開始，人們都了解嚴密性支撐著整個數學。我們也許會以爲數學家的良知開始困擾他們，並以爲分析學家會將新方法回歸舊的標準中。事實上，歐氏幾何學爲新的嚴密性提供一個良好典範。然而，對於嚴密性的舊有想法並足以促使數學家們努力完成微積分的嚴密基礎，就如同150年來從牛頓到柯西之間所呈現的情況。僅管歐氏幾何學標準與十八世紀數學家實作研究上的不一致並未被忽視，柏克萊主教爲了防衛十八世紀科學家與數學家們對於宗教不合理的攻擊，於是在1734年攻擊微積分並不滿足數學家所謂的嚴密性。柏克萊認爲他的對手們同樣並未能在數學上進行有效而合理的論證，他承認微積分的結果是有效的，但攻擊它的方法。他在《分析學家》中批評牛頓的微積分，他認爲「消失的增量」在牛頓的微積分中，扮演著關鍵的角色，並質疑道：「這些消失的增量是什麼？他們既非有限量，也非無窮小量，又不是零，我們難道不應稱它們爲死去量的鬼魂嗎？」柏克萊的攻擊，包含了對牛頓微積分的數學論證進行逐一地批評，也促使許多數學家進而提出反駁。然而，既非柏克來的攻擊亦非這些相關的回應，使得數學家們態度改變趨向我們所說明的嚴謹性。首先，這些回應並不能使人信服，除此之外，數學基礎的主題仍未被視爲重要的數學內容。然而，柏克萊的確促使了人們去思考數學基礎性的問題，達朗貝與拉格蘭日對於基礎的討論，在某些方面也都受到柏克來的影響，儘管柏克來對微積分的攻擊並不足以使得基礎問題成爲數學研究主要關注的焦點。

帶來改變的過程中，還有另一個值得一提的重要因素：數學家對於教學的需求。接近十八世紀末，一項重要的社會變遷發生，在這世紀最後十年之前，數學家通常在皇家宮廷工作，他們的工作是研究數學，從而榮耀他們的支助者。但是自從法國大革命之後，幾乎所有的數學家以教學爲生。

這個關於數學家經濟環境上的轉變，除了宮廷數學家的沒落之外，另有其它些原因。在十八世紀，科學家數量增加，由於所謂「牛頓的時代」以及牛頓科學的成功，使得政府與商人們，認爲科學是重要的，並且很有用。科學家也鼓勵強化了上述的信念。也因此，政府開始建立教育機構來促進科學的發展。軍事學校因而被建立，並藉此促進預備軍官在應用科學相關知識上的提昇。在已存在的大學中設立新的科學講座。其中關於科學教育最重要的新機構，就是在十九世紀當時，被諸多國家譽爲典範，法國政府於1795年所建立的巴黎工藝學院 (Ecole polytechnique)。

又爲何數學家的新經濟環境(對教學的需求)幫助了嚴密性的促進呢？那是因爲在教學的過程中，總能促使教師徹底地反思該學科的基礎。也許數學家能充份地理解一個概念以使用之，並且依賴他們從自身經驗之中所得到的洞見，但這對學習的新鮮人而言是行不通的。即使是在十八世紀時，初學者難以接受別人這樣告訴他：「當你持續使用這個概念若干年以後，你將會了解一切。」

有什麼證據可以說明，教學的確幫助促進十八與十九世紀數學家對於分析的嚴密化呢？首先，直到十八世紀末，大部份的基礎研究並未出現在一般的科學期刊中，數學的基礎也並非主要的研究問題。而這些研究成果，反而是出在一些演講、教科書或是大眾讀物中。即便十九世紀，當基礎已經被建立成爲數學領域中基本的一部份時，他們的源

由通常也只在教學中才被提及。拉格蘭吉 (Lagrange)、柯西、外爾斯特拉斯 (Weierstrass) 與戴德金 (Dedekind) 等人對分析學基礎的研究，同樣主要來自於授課演講。

以上我們所提及的每個觀點，都可以用來幫助解釋是什麼力量驅使著數學家，從十八世紀對於結果的重視轉向十九世紀對於嚴密標準的要求。其中，我們可以發現，拉格蘭吉是一個促使改變的重要催化劑。拉格蘭吉對於數學基礎的興趣，首先來自於他在Turin的一個軍事學校中教微積分的過程中。在1784年，他首次向柏林科學院提議，認爲處理微積分基礎是具有價值的問題，因而刺激了關於微積分基礎的徵文投稿。

此外，拉格蘭吉在巴黎工藝學院的演溝，被出版於兩本具影響力的書中，從中他企圖給予微積分一個一般性的代數架構。然而，拉格蘭吉並未真正解決數學基礎的問題，我們也不再接受他把 $f'(x)$ 定義爲 $f(x+h)$ 的泰勒展開數式中h之係數的作法。然而，關於他企圖把微積分化約爲代數的想法，的確影響了布爾札諾與柯西後來的工作。

上述我們所討論到，關於態度上的轉變，對於建立微積分之嚴密性的過程而言，其實並不充份，就如同拉格蘭吉的例子。爲了建立數學的嚴密性，數學家們需要從那些方面著手呢?有兩件事是必要的：正確的定義以及以幫助我們從定義導出那些已熟知結果的種種證明技巧。在此，我們必須回答另一個問題：我們所需要的那些定義與證明，又是從何而來的呢？

十八世紀的數學家本身發展了許多的數學技巧，並使許多基本的性質彼此隔離，即使他們不知道這正是自己正從事的工作。而令人驚訝的是，柯西在嚴密論證過程所使用的大量技巧中，有許多是早已圍繞在數學家身邊。這個事實也說明了對於分析的嚴密性而言，需要從觀點上的徹底變遷，它並不是脫離十八紀的數學而自動發展。

4. 十九世紀嚴謹之十八世紀源頭

我們將透過一些從十八世紀數學研究工作，轉而成爲十九世紀的定義與證明的實例，來闡述十九世紀嚴謹性之十八世紀起源。我們所欲探討的十八世紀數學領域爲關於逼近的研究。無論是爲了解代數方程或微分方程的數學家們，發展了諸多有用的逼近方法。當當以結果論斷成敗時，一個逼近的結果比什麼都不做來的好。弔詭的是，當十八世紀數學家進行逼近的工作時，反而對精確最爲要求，他們利用不等式進行逼近的工作，後來也成爲分析嚴密性的基礎工具。

我們將討論兩個十八世紀關於逼近的工作：實際的逼近程序以及對於誤差估計的計算。讓我們來看看十九世紀分析學利用上述工作來做些什麼。

十九世紀數學家看待十八世紀逼近方法的一個新方式，是將逼近所得的結果，視作爲一種建構性的答案以及一種存在性的證明。例如柯西藉此發展出現今我們所熟知的Cauchy-Lipschitz方法，證明微分方程之中解的存在性。這個證明是基於歐拉所發展的逼近方法。類似地，柯西對於連續函數中間值定理的漂亮證明，也是以十八世紀所發展的逼近方法爲基礎。對於連續函數f(x)，柯西取正負不同號的f(a)與f(b)，並將區間 [a,b] 分割爲n等份，並推論至少有兩個與(b-a)/n不同的x値落在 [a,b] 區間中，並使得f(x)的正負號不同。接著在這兩個新值所形成的區間中，重複上述程序，意即在一個長度爲(b-a)/n的區間中，又可找到有兩個與 $(b-a)/n^2$ 不同的x值，並以此類推。這也就是拉格蘭吉用以在x=a與

x=b之間逼近多項式的根的方法。柯西用之於論證數値ξ的存在性，即爲上述證明過程中，使得f產生正値與負値的x所形成的兩個數列之共同極限。柯西關於代數逼近證明的由來，在他所寫論代數方程的近似解的注釋之中，進一步地被說明。

另一個關於利用估計的想法轉而處理存在性證明的例子，在柯西定積分理論中被給出。在十八世紀，習慣上會將積分定義爲微分的反運算。我們知道積分的值可透過求和的方式來逼近，柯西採取歐拉藉由求和以逼近定積分值的方法，並且從一個全新的觀點看待。他把定積分定義爲面積和的極限，並證明了(均勻)連續函數其定積分的存在性，並使用他的定義來證明微積分基本定理。

現在，我們考慮關於十八世紀逼近相關研究上的其它類型結果：逼近隨著誤差估計而產生，這些結果通常具有下列型式：給定任意的n，數學家可以計算出誤差的上界，藉由對實際值取n次逼近。在十八世紀末期，代數不等式被開發出大量的技巧來計算這類的誤差估計。柯西與阿貝爾以及他們的後繼者們圍繞在這些逼近的過程。有別於給定n再找出最大誤差，我們先給定誤差ε，並且在過程中，我們總是可以找到n，使得第n次逼近的誤差小於ε(這似乎也是現今使用ε
這個字母的源由)。而柯西對於收斂的定義，也是以這個法則爲基礎。

另一方面，十九世紀數學家改變十八世紀使用不等式的觀點，是從十八世紀數學家所熟知的特例之中，尋找出數學事實，並使予它們的一般性合法地位。譬如說吧，達朗貝和其它數學家，透過說明某些特別的級數其每一項都比一個已知收斂的幾何級數小，來證明他們的收斂性。高斯在1813年使用這個判別法來研究超幾何級數的收斂性。高斯並將給定級數與幾何級數進行比較，來導出並證明若干關於任意級數收斂性的一般性檢驗法則，諸如：比例檢驗、對數檢驗與根式檢驗等。

我們來看一個原本是十八世紀的研究成果，卻在十九世紀產生改變的重要例子，我們由下列式子來表示導函數的關係式：

(4.1) $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+hV$

其中，V隨著h趨近於0。正如我們所示，拉格蘭吉在$f(x+h)$的Taylor展開式中，把$f'(x)$定義爲h的係數，然後他從泰勒級數展開式導出(4.1)，並把V視爲h的無窮收斂級數。他並解釋「V隨著h而趨近於0」意味著對任意給定的D而言，我們都能找到足夠小的h，使得$f(x+h)-f(x)$將介於$h[f'(x+h)-D]$與$h[f'(x+h)+D]$之間。首先，柯西、布爾札諾與卡爾斯特拉斯把(4.1)和相關的不等式視爲$f'(x)$定義中的一部份(柯西的定義較爲口語化，但他把它轉譯爲證明中關於不等式的語言)。這個定義使得拉格蘭吉從(4.1)所導出的結果變得合法，例如：導函數的中間值定理(此外，我們必須注意一些當時出現的錯誤，諸如收斂與均勻收斂之間的混淆，這直到1840年代才被清楚地了解)。

當然，我們並非認爲高斯、柯西、布爾札諾、阿貝爾與卡爾斯特拉斯等人是沒有原創性的數學家，他們當然是。爲了展示數學中那些發生了重大變革的主要觀點，我們主要關心這些數學家們利用十八世紀的數學技巧所產生的種種發展。並且，除了轉化所採用的方法，他們更創造出諸多新的數學方法。柯西導出關於實變數與複變數收斂冪級數、實變數與複變數積分的漂亮證明，當然，對於分析之外的其它數學主題也多有貢獻。然而，對我們現在的目的而言，我們需要這些偏頗的例子—可以利用十八世紀數學

家所熟知的特例並使之一般化，或找出那些在十八世紀爲了某些目的而衍生出的方法，並更加深刻地使用它。

在前述討論中，需要付出許多的努力才能轉變這些十八世紀的技巧，然而，單單努力還不足夠。必須先問對問題，然後，使用並擴展已存在的那些技巧來回答它們，這一切需要一個觀點上的轉變。對嚴密性之興趣的喚醒與相關技巧的有效使用，對於布爾札諾與柯西觀點 (我們現在所了解的觀點) 的產生而言，都是同等重要的。數學研究不止在於對結果的渴望，同時也要求清楚的定義與嚴密的證明。個別的數學家們也許依然致力於創造有用的方法與數學想法的開拓，但是數學社群整體而言，已不再對嚴密性的問題不感興趣。

5. 結論

我們首先提出「數學事實是否與時間有關」這個問題，也許數學事實是永恆不變的，但人們對它的了解與認識則非如此。我們已經檢視了一個關於數學事實的看法，是如何隨時間而改變的例子。在這個思想革命之後，早期的數學工作重新被檢視評估，其中某些變得更有價值，有些則失去重要性。

在了解這些工作之後，數學家應該做些什麼呢？這裡建議了三個行動方針：首先，我們可採取一種「符合當時代的嚴謹就足夠了」所表達的相對主義，什麼是數學事實，由當代的期刊主編說了算。有時這會是一個有用的觀點，然而，如果我們普遍地採用這個觀點，將意味著柯西與卡爾斯特拉斯的嚴格化工作將無從發生。除非先驗地出現了嚴重的錯誤，標準將不會有任何重要的改進。所以相對主義的態度，會使得柯西離開重建數學基礎的工作，並將無法滿足我們的需求。

再者，我們可以試圖設立我們所能想像最高的標準：不再使用關於我們不知其所以然的論證，但這會讓事情變得更糟。即便歐拉了解處理無限大與無限小量所發生的問題，倘若根據在教科書中常常要求學生嚴格遵循的標準，他將不會寫下隻字片語，也不會有引發柯西與卡爾斯特拉斯之後繼嚴格化的工作。

所以，我建議第三種可能性：承認我所提出來的問題，只不過是數學家們發現自我置身其中的現有處境。數學以兩種主要的方式成長：不只是持續地累積增加，並且可能偶然地發生革命。唯有我們接受目前發生錯誤的可能性，才能使我們期待數學知識將在未來得到根本上的進展。同時，我們也將因古老的數學知識磚塊，總能安立於新的數學架構體系之中，而得到慰藉。數學不是唯一不會發生革命的科學，然而，它卻是人類知識活動領域中，發生了最根本革命，但卻破壞最小的一門學科。

答謝

本篇文章首先發表於Mathematical Association of America, Southern California Section, March 1972作者希望在此感謝Elmer Tolsted的鼓勵與支持。

參考文獻

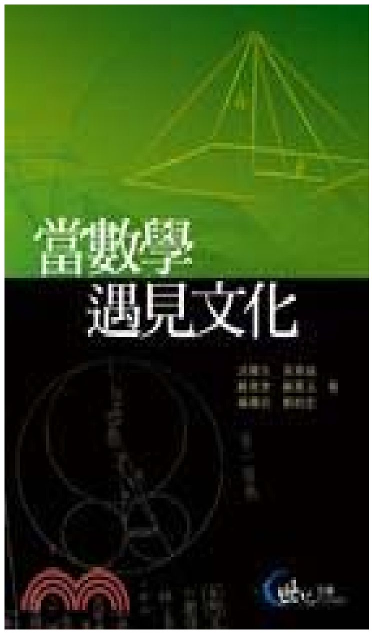
1. N. H. Abel, Recherches sur la serie
$1+(m/1)x+[m(m-1)/1\cdot 2]x^2+[m(m-1)(m-2)/1\cdot 2\cdot 3]x^3+\cdots$
Oeuvres completes, Vol. I, Christiania, 1881.
2. J. Ben David, *The Scientist's Role in Society*, Prentice-Hal, Englewood Cliffs, 1971.
3. G.. Berkeley, *The Works of George Berkeley*, Vol. IV, ed. A.A. Luce and T.E. Jessop,Edinburgh,1948-1957.
4. B. Bolzano, *Functionenlehre*, Schriften, Band I, Prague, 1930.
5. __________, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, de ein entgengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, 1817, Englemann, Leipzig, 1905
6. Carl Boyer, History of Analytic Geometry, *Scripta Mathematica*, New York, 1956.
7. __________, *History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, New York, 1959.
8. F. Cajori, *A History of the Conceptions OF limit and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court ,Chicage,1931.
9. L.N.M. Carnot, *Reflexions sur la metaphysigue du calcul infinitesimal*, Duprat Paris, 1797.
10. A.-L. Cauchy, Cours d'analyse de l'ecole royale polytechnique, Imprimerie royale, Paris,1821, in *Oeures Completes*, Series2, Vol.Ⅲ, Gauthier- Villars, Paris, 1897.
11. A.-L. Cauchy, Resume des lecons donnees a l'ecole royale polytechnique surle calcul infinitesimal, Imprimerie royale, Paris, 1823, in *Oeuvres Competes*, Series2 Vol. IV, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
12. A.-L. Cauchy, Exercise d'analyse, 1840, in *Oeuvres*, Series 2, Vol.XI.
13. Jean D'Alembert, Reflexions sur les suites et sur les raciness imaginaires, *Opuscules mathematiques*, vol. V, Paries 1768, pp.171-215.
14. Richard Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, Dover, New York, 1963.
15. Leonhard Euler, Institutiones calculi integralis 1768, *Opera Omnia*, Series 1, vol. XI. Teubner, Leipzig and Berlin, 1911.
16. __________, Introductio in analysin infinitorum 1748, *Opera Omnia*, Series 1, vols. 8-9.
17. K. F. Guass, Disquisitio generals Circa seriem infiitam
$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$$
[1813], *Werke*, Vol. 3, pp.123-162; German translation, Berlin, 1888.
18. C.C. Gillispie, *Lazere Carnot Savant*, Princeton, 1971.
19. A.R.Hall, *The Scientific Revolution, 1500-1800*, Beacon, Boston, 1966.
20. H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik im letzten Jahrhundert, 1884, quoted by M. Moritz, *On Mathematics and Mathematicians*, Dover, New York, 1942, p.14.
21. F.Klein, *Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 1926, reprinted by Chelsea, New York, 1967.

22. J.-L. Lagrange, Lecons elementaires sur les mathematiques, donnees a l'ecole normale en 1795. *Oeuvres*, VIII, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892, pp. 181-288.
23. __________, Lecons sure le calcul des fonctions, 2d edition, 1806, *Oeuvres*, X.
24. __________ , Letter to Euler, 24 November 1759, *Oeuvres*, XIV, pp.170-174.
25. __________, Traite de la resolution des equations numeriques de tous les degres, 1808, *Oeuvres*, VIII.
26. __________, Theorie des function analytiques, 2d. edition, 1813, *Oeuvres*, IX.
27. S. L'Huillier, Exposition elementaire des principes des calculs superieurs, Decker, Berlin, 1787.
28. Isaac Newton, On the analysis by equations of an infinite number of terms, 1669 in D.T. Whiteside ed., *The Mathematical Works of Isaac Newton*, vol. II, Jonhson, Reprint, London and New York,1964, vol. I.
29. Isaac Newton, *Universal Arithmetic*, 1707, in D.T. Whiteside ed., *The Mathematical Works of Isaac Newton*, vol. II, Johnson, London and New York,1970.
30. R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, Tubingen, 1889.
31. D.J. Struik, *Concise History of Mathematics*, Dover, New York, 1967.
32. D.J. Struik, ed., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard, Cambridge, 1967.

5月17日的莫宰羊聚餐，左起Fulvia Furinghetti, Sandy Grabiner, Judith Grabiner, 以及林芳玫教授，感謝林力娜 (Karine Chemla) 教授提供照片。

評介《當數學遇見文化》

陳敏晧
國立清華大學歷史所博士班
國立蘭陽女中數學教師



書名：當數學遇見文化
作者：洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏、劉淑如
出版社：三民書局
出版年份：2009
出版資料：平裝198頁，定價190元
國際書碼：ISBN 9571451290

《當數學遇見文化》一書是從《科學月刊》「在文化裡遇見數學」專欄中集結而成的，書中作者群以地理範疇為 xy 平面，時間為 z 軸，構築無限的空間座標系統，而空間中元素的形成，即數學與文化交融的結果。在臺灣的教育過程中，數學這一學科往往被寄于厚愛，學子們無不焚膏以繼晷，來努力推敲數學世界的精妙之處。按理推論數學的相關書籍（除教科書與參考書外）應該處於蓬勃發展的階段才是，可惜，數學科普書籍的出現，並未與學生所投入學習數學的時間成等比例增加。因此，當我獲知《當數學遇見文化》一書的問世 (2009年1月)，立即拜讀書中的數學雅品小集，果不出所料，除書寫的文辭雋永外，更重要的，是作者們掌握住數學的洞察力，所以，筆者在閱讀過程中，不斷閉目思索到底是數學影響文化？抑或是文化影響數學？筆者不揣簡陋，談談讀書淺見，以為介紹。

本書有198頁，共分15個子單元，每個子單元約為12-15頁，目次如下：

篇名	作者	年代	民族[1]
古埃及文化中的數學	英家銘	(前18—前16世紀)	埃及
古希臘文化中的數學	英家銘	(前6—前3世紀)	希臘
數學與音樂的對話	劉柏宏、劉淑如	(前6—17世紀)	歐洲
西方文化中的歐幾里得	英家銘	(前4—18世紀)	希臘
劉徽的墓碑怎麼刻？	洪萬生	(3世紀)	中國

[1] 表格中「民族」這一欄原書未提及，筆者自行加入，部分單元涉及多個民族，以最重要的民族代表，至於發生在歐洲各民族（如德國、法國、義大利、英國等）的歷史事件，以「歐洲」統稱。

求一與占卜	楊瓊茹	(5—19世紀)	中國、歐洲
《可蘭經》裡的遺產	蘇意雯	(7—9世紀)	阿拉伯
數學與宗教	洪萬生	(12—13世紀)	中國
數學與「禮物交換」	英家銘、蘇意雯	(16世紀)	歐洲
解析幾何的誕生故事之一	蘇惠玉	(15—17世紀)	歐洲
解析幾何的誕生故事之二	蘇惠玉	(17世紀)	歐洲
翦管術vs.天算頌	楊瓊茹	(17世紀)	中國、韓國
數學與意識形態	洪萬生	(17—18世紀)	中國
遺產承繼，串起中日代數史	蘇意雯	(17世紀)	日本
探索日本寺廟的繪馬數學	蘇意雯	(17—20世紀)	日本

從上表格得知，本書所涵蓋地理範疇從中國、韓國、日本、阿拉伯、歐洲等地區，時間的縱軸從公元前六世紀到二十世紀，所發生的數學文化事件更是包羅萬象，這應該就是本書的最大特色 ─ 即定一元 (數學) 而發揮多元文化價值(藝術、音樂、宗教、遺產等)，利用數學史文本來闡述文化活動的知識面向，爲「數學是世界共通的語言」做了最佳的詮釋。本書不落入俗套，以文化活動爲標的，非常適合從事數學教育工作者閱讀，筆者就其中幾個單元，提出一己之淺見，順便補充一些相關的學術訊息供讀者參酌。

首先，有關〈求一與占卜〉一文，作者楊瓊茹老師利用有趣的數學文本比較法，將中國《孫子算經》(約第5世紀)的「物不知數」題目與義大利斐波那契(Fibonacci , 約1170-1250)《計算（之）書》(*Liber Abaci*, 1202) 的「占卜」(divination)作題型分析，凸顯中西算法比較，文詞流暢清晰，將兩個不同民族間的歷史文化場景作深入研究，作者並將中國數學史觸角延伸到秦九韶（約1202-1261）《數書九章》的「大衍求一術」方法，非常值得一讀。筆者在此將斐波那契所著的《計算（之）書》做一點彌縫補缺的工作，《計算(之)書》是中世紀數學的代表書籍，它促使印度數字系統和代數方法在歐洲廣泛流傳，其英文版 *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*是由西格爾 (Laurence E. Sigler) 在2002年所出版的，此英文版係根據邦康帕尼(Baldassarre Boncompagni, 1821-1894)的1857年拉丁文底本，對中文讀者而言，值得分享的另一學術資訊，爲中文版由紀志剛等譯《計算之書》在2008年1月從北京科學出版社發行。全書共十五章，其「占卜」(divination)問題位於第十二章的第八部分，而廣爲熟知的「斐波那契數列」，則位於第十二章的第七部分。

「物不知數」問題的續集，連接至〈翦管術 vs. 天算頌〉一文，楊老師再度利用其妙筆生花的敘述，將歷史場景轉移至中國與韓國。「翦管術」源自於南宋楊輝 (約1238-1298) 的《續古摘奇算法》(1275) 卷上，其後，明朝程大位 (1533-1606)的《算法統宗》(1592) 稱爲「韓信點兵」；轉之大韓民族，朝鮮算學家黃胤錫(1729-1791) 的《算學入門》(1592) 名爲「天算頌」。這種利用數學問題來引起歷史交流活動，也值得史學家關注的，另就筆者認知，中國與日本兩國在隋唐時代已經交流頻仍，有所謂的遣唐使史實，就史料所載

至少達二十次，因此，就「物不知數」問題而言，日本的數學史文本理應存在相關問題，值得有志的研究人員深究，以塡補此一學術缺口。

書中最後兩篇提及日本數學史，作者蘇意雯教授利用遺產分配問題來討論日本的代數學發展，與〈《可蘭經》裡的遺產〉一文類似，這種利用遺產分配的民族文化問題，的確爲數學社會史研究開了一扇窗，筆者藉此機會，也來談談其他民族的遺產分配問題，首先在古羅馬數學史中曾出現下列問題：

> 有一位寡婦，要把前夫的遺產3500元與自己的子女拆分。根據當時的法律規定，如果只有一個兒子，母親可得到兒子應得部分的一半；如果只有一個女兒，母親可得到相當於女兒的2倍的遺產。可她生的是雙胞胎，有男孩也有女孩。那麼根據當時的法律，應當怎樣分這筆遺產呢？

法國數學史料有下列有趣的歌訣：

> 從前有個大商人，妻子懷孕他去世。生前留下遺囑云，若生兒子分財產，三分之二給男孩，三分之一給妻賢，若生女兒分財產，三分之一給女孩，三分之二給妻賢，後來生下雙胞胎，一男一女不痴呆，試問遺產如何分。

無獨有偶的，俄羅斯民族也類似的遺產分配：

> 父親在遺囑裡要求把遺產的1/3分給兒子，1/5分給女兒；從剩餘的錢中，3500盧布償還債務，3500盧布留給母親。遺產共有多少？子女各分多少？

上述的史料除了看到遺產分配比例的數學問題外，性別不平等似乎是另外一個需要提出的問題，有賴兩性研究專家的爬梳史料，以提出更精準的論點。蘇意雯教授另一篇論文〈探索日本寺廟的繪馬數學〉，則利用道地的日本寺廟文化－「繪馬」，日語念「えま」(Ema)，它懸掛於神社、廟宇，以爲祈福，是相當特殊的日本文化，有趣的，是這種特別的祝禱方式在江戶時期 (1603-1867) 逐漸與繪馬的另一型式「算額」(sangaku) 結合，這種特殊的數學文本成爲目前日本數學－和算 (wasan) 的最大資產，日本數學會、日本數學史會、各地的和算學會均傾一己之力，爲保存數學文化資產不遺餘力，實在值得吾人借鏡。關於算額出產地與相關研究可參考「和算の館」網頁http://www.wasan.jp/，絕對是值得一遊的數學文化網頁，另三上義夫著、佐々木 力編的《文化史上より見たる日本の數學》，一直被視爲日本數學文化史的經典之作，也是研究相關議題指導圭臬。最近在坊間書局大賣的《茶水間的數學》(書評可參考台北縣樹林高中王鼎勳老師 http://museum.math.ntnu.edu.tw/view.php?class=shen_du_shu_ping#49) 《茶水間的數學思考》，也是了解日本數學文化面向的另一途徑。

此外，關於英家銘的〈西方文化中的歐幾里得〉一文，讀者可參考 http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html，此網頁將歐幾里得所著的《幾何原本》(*Elements*) 英文版從第一冊到第十三冊的內容，完整詳實地呈現，很適合查詢之用。此外，英家銘與蘇意雯教授合作的〈數學與「禮物交換」〉一文，也可與《天才之旅》(*Journey Through Genius*：*The Great Theorems of Mathematics*)中第六章〈卡當諾與三次方程式的解答〉互補對照，讀者會對三次方程式的解題過程更有幾何圖型概念。洪萬生教授的〈劉徽的墓碑怎麼刻？〉文中有統計大師波茲曼 Ludwig Boltzmann, 1844-1906) 雕像圖（頁55)，曹亮吉教授的《*阿草的葫蘆*:文化活動中的數學》中有數學家高斯 (Carl

Friedrich Gauss 1777-1855) 墓碑圖 (頁20)，這種利用數學家雕像或墓碑的文化紀錄，也是數學與文化水乳交融的另一例證。

此外，《當數學遇見文化》書末附有「人名所引」與「名詞所引」是極為貼心讀者的作法，雖此舉在西文著作中屢見不鮮，但是，在中文書籍是較為罕見，值得稱讚。

最後，讓我們討論文章的鋪陳方式。雖然讀者們可以強烈感覺出作者群文章的企圖－「平易近人」，但是，由於作者們都是學有專精的數學教育工作者，六位中有三位具有博士學位的教授，兩位具有數學史專業碩士學位，一位為專攻數學史的博士生，因此，文章中的數學觀念與辭彙，需要具有基礎的數學能力與文史背景，才能心領神會，例如：第80頁末行 $M=\coprod_{i=1}^{n} m_i$ 表示法，較常用的乘積符號應為 $M=\prod_{i=1}^{n} m_i$ ，$M=m_1 \cdot m_2 ... m_n$ ；第104頁中的「有奇」即「有餘數」；第179頁中有一個解六次方程式問題，沒有高次方程式解題經驗者，是很難勝任的。如果閱讀完此書之後，您如果還覺得意猶未盡的話，那麼下列三個網頁，將滿足您的強烈求知慾望：

1. http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm，此網頁《HPM通訊》內容無所不包，強調數學教學與數學史之間的連結，蘊涵學術的深刻性與知識性。
2. http://museum.math.ntnu.edu.tw/，此「台灣數學博物館」網頁由國科會科教處所贊助的三年期研究計畫－「數學文化工藝虛擬博物館」（2008/08-2010/07），呈現數學文化的多元面貌，且隨時更新最新相關學術資訊。
3. http://www.math.sinica.edu.tw/mrpc_jsp/book/，該網頁推薦數學科普著作或譯作，包含數學史、數學哲學、數學家傳記共76本書，是一個數學文化交流的知識平台。

總之，德不孤必有鄰，我想這本新作《當數學遇見文化》一定會對數學教育圈造成不小的影響力，而且，筆者也相信相關的數學文化史書籍，也會如雨後春筍般冒出。最後，呼應洪萬生教授的數學學習信念：「循著歷史的軌跡介紹數學，這種進路是理解、深入體會數學的最佳途徑。」

參考文獻

1. 洪萬生 (2002)，〈**八百歲的《計算書》**〉，《台北HPM通訊》第五卷第十一期。
2. 徐澤林 (2007)，〈江戶時代的算額與日本中學數學教育〉，《數學傳播》，31卷3期，頁70-78。
3. 洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻，《數之起源》，台北：台灣商務印書館，2006。
4. 曹亮吉，《*阿草的葫蘆*：文化活動中的數學》，台北：遠哲基金會，1996。
5. William Dunham著 (林傑斌譯)，《天才之旅 — 偉大數學定理的創立》(*Journey Through Genius：The Great Theorems of Mathematics*)，台北：牛頓出版社，1995。
6. 斐波那契 (Fibonacci) 著；紀志剛、汪曉勤、馬丁玲、鄭方磊譯，《《計算之書》(*Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonaardo Pisano's Book of Calculation*)，北京：科學出版社，2008。

Information

基隆市國中數學教師優良數學科普讀物推薦工作坊

主持：洪萬生教授 horng@math.ntnu.edu.tw，電話 2932-0206；
個人網頁http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng
主辦：基隆市國中數學教師輔導團
時間：2009/4/2，4/16, 4/30, 6/4下午1.30-4.30
地點：基隆市南榮國中

推薦研讀書籍

1 笛卡兒的秘密手記
2 茶水間的數學
3 閱讀的風貌
4 別讓統計騙了你
5 阿草的曆史故事
6 阿草的數學天地
7 阿草的數學聖杯
8 當數學遇見文化
9博士熱愛的算式
10 數學大騷動
11 從零開始
12 數學天方夜譚
13 數之起源
14 數字愛人
15 鸚鵡定理
等等

閱讀策略

1. 不妨先讀數學與敘事方面的作品，譬如著名小說《博士熱愛的算式》（順便到網路上找電影版）、小說體的數普《數學天方夜譚》、《數學大騷動》或《鸚鵡定理》。
2. 再讀科普風格的數學家傳記，譬如《笛卡兒秘密手記》或《數字愛人》。如果你有興趣，可以再加上《不只一點瘋狂》。

當然，你也可以同時閱讀一般數學普及作品如《茶水間的數學》、《別讓統計騙了你》、《阿草的曆史故事》、《阿草的數學天地》、《阿草的數學聖杯》、《當數學遇見文化》、《從零開始》（本書可以對照《零的故事》）、《數學天方夜譚》

以及《數之起源》等等。

成果報告：下列任選一種（可以合作撰寫），6/4口頭發表，書面報告將刊登在「台灣數學博物館」(Math Taiwan Museum, MTM, http://museum.math.ntnu.edu.tw)。

1. 撰寫數學普及書籍評論
2. 撰寫一篇教案，指導學生閱讀數學科普書籍
3. 數學普及創作文章或劇本

參考資料

台灣數學博物館 (Math Taiwan Museum, MTM, http://museum.math.ntnu.edu.tw)，尤其是科普特區中的深度書評。

《HPM通訊》(http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng)

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！