HPM通訊

第十二卷 第九期 目錄（2009年9月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

《數學文化小叢書》的膽識與願景

洪萬生
台灣師範大學數學系

高等教育出版社（中國北京）出版了第一輯《數學文化小叢書》，其中包括了：齊民友的《遙望星空（一）》、《遙望星空（二）》，項武義的《幾何學在文明中所扮演的角色》，李大潛的《圓周率 π 漫話》、《黃金分割漫話》，李文林的《從趙爽弦圖談起》，周明儒的《費馬大定理的證明與啓示》，王善平、張奠宙的《二戰時期密碼決戰中的數學故事》，王培甫的《數學中的類比》，以及徐誠浩的《連分數與曆法》，[1]由中國科學院院士李大潛主編。

這一套書輕薄短小，每冊字數三萬到六萬之間，售價則在人民幣 6-10 元左右，可見出版這一類數學普及書籍，的確頗有一番膽識！不過，吸引我注意本套叢書的地方，卻是主編李大潛的〈數學小文化叢書總序〉。其中，他特別指出：

> 整個數學的發展史是和人類物質文明和精神文明的發展史交融在一起的。數學不僅是一種精確的語言和工具、一門博大精深應用廣泛的科學，而且更是一種先進的文化。它在人類文明的進程中一直起著積極的推動作用，是人類文明的一個重要支柱。
>
> 要學好數學，不等於拼命做習題、背公式，而是要著重領會數學的思想方法和精神實質，瞭解數學在人類文明發展中所起的積極作用，自覺地接受數學文化的薰陶。只有這樣，才能從根本上體現素質教育的要求，並為全民族思想文化素質的提高夯實基礎。

由於「目前充分認識到這一點的人還不多，更遠未引起各方面足夠的重視，很有必要在較大的範圍內大力宣傳、引導工作。」因此，基於弘揚和普及數學文化的宗旨而編輯本叢書，當然就十分必要了。

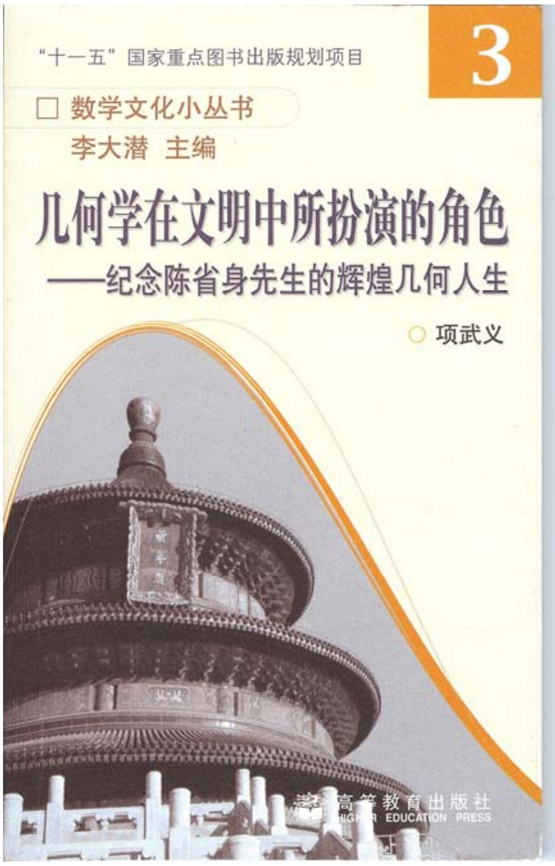
顯然，李大潛相當憂心中國學生的「拼命做習題、被公式」而忽略數學文化深度的習

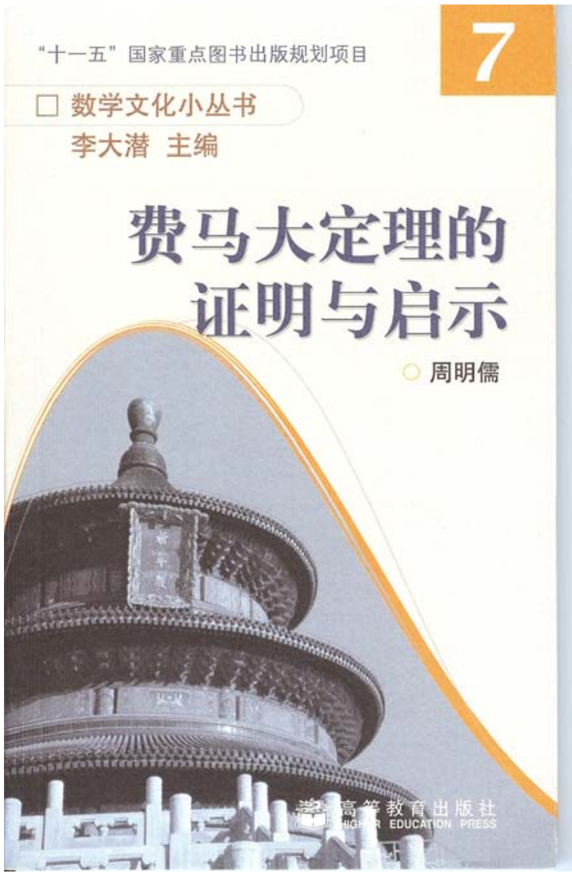
[1] 前八本已經出版。

氣。其實，這在華人社群中，是一個非常普遍的現象，究其原因，或許是傳統考試文化的根深蒂固使然吧。連帶地，在大學教學現場的數學家，或許也經常忘掉了適時的理論高度之觀照，因此，純粹「解題」所映照的數學文化之貧弱不振，當然也就見怪不怪了。

最後，我還想再提及本套叢書的書寫之膽識。譬如說吧，項武義的《幾何學在文明中所扮演的角色》是以紀念陳省身的輝煌幾何人生爲主旨，因此，如果他不深入介紹一點大域微分幾何的基本內容，大概交不了差，於是，有別於一般科普著述論及現代科學時的「花拳繡腿」，他的論述手法輕鬆自在，鋪陳內容紮實可靠，同時絕對不避符號與抽象，真是讓我們大開眼界。此外，周明儒的《費馬大定理的證明與啓示》也可以鮮明地對比中譯科普的《費馬（瑪）最後定理》，前者在知識內容的深度與「啓示」上，的確是多了很多。由此看來，科普書寫的「老嫗能解」之神話，真是被這一套叢書徹底地被顛覆了。

總之，就數學普及的書寫和出版而言，這一套叢書的問世，的確是在二十一世紀的中國文化史上，豎立了一個里程碑。如果它可以持之以恆，將來的影響一定不可限量！





從歐幾里得到高斯：傳承 2000 年的正多邊形宴席料理

黃俊瑋
台師大數學系博士班研究生

I 從歐幾里得到高斯

「不懂幾何者，不准進入柏拉圖的學園。」(Let no one ignorant of geometry enter here!) 正是幾何學 (數學) 的力量，幫助我們的靈魂昇華，不受事物表象所矇蔽，跳脫變化無常的幻海，進入理想世界，看清不變的本質與真理。正是數學知識的確定性，使得數學家們不斷地開疆闢土、創新扉頁之際，2000多年來數學巨塔依然屹立不墜。正是數學知識的應用性和數學家的洞見與連結，看似乾涸枯竭的絕望之後，總是蘊藏著新的泉源、新的礦脈。

公元前300年，希臘人們崇尚理性的力量，定居在亞歷山卓城的歐幾里得系統化地組織、彙整了當代的重要數學成果，以23個定義 (definition)、5個設準 (postulate)、及5個公理 (common notion，或譯爲共有概念)作爲發展幾何料理的基本食材，並以嚴密的演繹方法作爲主要工具，烹煮出一道又一道著名的數學佳餚，最終完成了《幾何原本》一書，不僅成爲希臘數學的典範，其內容與形式也對往後西方數學與科學的發展，產生了重要而深遠的影響力。

《幾何原本》原書名爲 *The Elements*，雖然書名當中的「幾何」二字爲後來譯者徐光啓翻譯過程中所加，然也足見此書中幾何知識的重要性。本書內容涵蓋了平面幾何與立體幾何的相關命題 (proposition)，而這諸多命題之中，除了各種定性的幾何性質之外，另外，也有許多的命題內容主要探討尺規作圖（或幾何作圖 (geometric construction)）之相關問題，對於愛好思考、喜歡數學或者熱愛幾何作圖的人而言，而這就像一本攤在面前的精美食譜一般，除了陳列出引動人們味蕾的佳餚 (各式各樣的幾何作圖命題) 之外，同時歐大師也謹循著演繹的規範，在過程當中一步接著一步地加入定義、設準、公理，以及利用早已完成的命題等等食材，有條有理地完成這些幾何圖形的建構。而歐幾里得的作圖題正如證明題一樣，不但都稱爲命題，而且都必須經過嚴密的證明 (洪萬生，2009)。在這諸多作圖題之中，一個重要而具有發展性的問題，便是關於正多邊形的作圖方法。

在《幾何原本》的脈絡之中，歐大師順利解決了正3角形、正4、正5、正6、正8、正10、正12、正15邊形等的作圖問題。然而，當數學家想藉以挑戰正7邊形、正9邊形、正11邊形或者正17邊形等作圖問題時，卻面臨了新的挑戰。2000年來數學之火依舊旺盛地燃燒，然而，在正多邊形的尺規作圖上，數學家們卻始終端不出令人滿意的新料理，直到年輕的高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) 在數學的大舞台上展露了頭角。高斯生於德國的布倫茲維克城 (Brunswick)，他不只是數學家，更是著名的天文學家、物理學家，在其涉獵的各個域都有相當突出的表現。然而，就在十九歲那年，當他證明了正17 邊形可以尺規作圖之後，便在數學史上奠立了不朽的功績，也注定了他將會名留青史，最終成爲十九世紀最偉大的數學家。值得一提的是，他的方法除了解決正17邊形這個特例子外，還能更進一步地加以推廣。以下，我們將從歐幾里得《幾何原本》之中的第一個命題：正三角形尺規作圖，乃至高斯完成正17邊形尺規作圖這之間的相關進展，作一簡要的回顧與說明。

II 歐幾里得的私房菜－他所掌握的正 n 邊形

II. 1 跨越 3 到 5 的一小步，是《幾何原本》的一大步

利用 (沒有刻度的) 直尺與圓規，在有限步驟之中作出正多邊，是自古希臘以來，數學家們竭力探討的重要問題之一，歐幾里得在編寫《幾何原本》的過程當中，在第I冊的第1個命題之中，開門見山地給出了正三角形的作圖方法，足見尺規作圖在本書脈絡之中，所具之重要性與不可或缺的必要性。殺雞不需牛刀！只需簡單地運用最初所給出的定義、設準以及公理，歐大師證明了正三角形的作圖方法。在所有正n邊形的作圖之中，n = 3 的情況可說是在不費吹灰之力的情況下就被解決了，然而，我們是否可以就此鬆一口氣，大膽而放心地宣告依此類推呢？問題的答案很明顯，當n = 4時，正四邊形的作圖必需等到進入第I冊的尾聲，也就是在第46個命題時才出現。一切也意味著，這個從 n = 3到 n = 4的推廣，一點也不顯然同時也不直接。跨越這小小的一步之論證所需之支撐，竟然包含第I冊的命題1，2，3，4，5，7，8，10，11，13，15，16，18，20，22，23，26，27，29，31和34，共計二十一個之多 (洪萬生，2009)。

更進一步地，也許你會繼續問下去，那正五邊形的作圖呢？倘若你拿起《幾何原本》不斷地翻頁，你將會發現，必須翻至第IV冊的第11個命題時，正5邊形尺規作圖的方法才終於現形。同時，我們若要想在《幾何原本》的脈絡中嚴格地證明正5邊形的尺規作圖，那麼，所需之命題最少四十個 (洪萬生，2009)。不過，歐幾里得終究還是跨過這一步，巧妙地引入外接圓的協助，終於順利地將正5邊形作圖這道美味佳餚端上桌，以供大家品嘗留香。接下來，也許大家會好奇，想知道還有那些正多邊形是我們可以利用尺規作圖作出來的呢？正6邊形呢？正7邊形呢？正8邊形呢？又或者有沒有什麼一般性的方法，一次可以解決很多正多邊形的作圖問題呢？

II. 2 更一般性的推廣

這裡，我們再提供兩個較為一般性的方法，可以用來解決一大類的正多邊形作圖問題。第一個方法：如果我們會作出正 n 邊形，那麼就能做出正 2n 邊形，在類推之後，我們就能作出所有的正$n \cdot 2^m$形。第二個方法：如果我們可以作出正 a 邊形與正 b 邊形，而且 a 又與 b 互質，則我們可以作出正 a⋅b 邊形。以下，我們提出一些簡單的說明。

首先，只要我們應用《幾何原本》第 III 冊中關於如何將一個圓弧二等分的命題 30，一旦有了正 4 邊形的作圖方法之後，歐幾里得就不難作出所有的正2^m形，其中的 m 是大於等於 2 的正整數。或者我們也可以這樣想：當我們連接正 n 邊形的 n 個頂點與其對稱中心 (重心) 時，會將會得到 n 個全等的等腰三角形，其中這 n 個等腰三角形的頂角皆為$\frac{2\pi}{n}$，也就是$\frac{360^\circ}{n}$，因此，反過來說，如果我們可以尺規作圖作出$\frac{2\pi}{n}$的這個角度，就能做出正 n 邊形。又由於可以透過作角平分線的方式，來二等分任意的角度，因此，只要我們已知θ角，則透過不斷等分的過程，我們可以作出$\frac{\theta}{2^m}$角，也可以達到同樣效果。

由於《幾何原本》第 I 冊的第 46 個命題，已經解決了正四邊形的作圖問題，於是我們能藉此做得出直角$\frac{\pi}{2}$，再不斷地依據上述方法我們可以作出任意的$\frac{2\pi}{2^m}$，其中 m 是大於等於 2 的正整數，因此，任意正2^m形的作圖問題宣告解決。當然，我們也可以類似地使用上述方法，從已知正三角形與正五邊形的作圖出發，進一步地作出正$3\cdot 2^m$形與正$5\cdot 2^m$形的圖形，其中 m 爲非負整數。

再者，歐幾里得也發現下列的法則：已知我們可以作出正 *a* 邊形與正 *b* 邊形，如果 *a* 又與 *b* 互質，則我們可以作出正 $a\cdot b$ 邊形。這是因爲當 *a* 與 *b* 互質時，我們可以利用輾轉相除法找出整數 *k* 與 *l*，滿足 $ak + bl = 1$，又因爲我們能作出正 a 邊形與正 b 邊形，亦即能作出$\frac{2\pi}{a}$與$\frac{2\pi}{b}$弧度的角，進一步地，能作出$\frac{2l\pi}{a}$與$\frac{2k\pi}{b}$弧度的角，這時，只要把這兩個角相加，便得到$\frac{2l\pi}{a}+\frac{2k\pi}{b}=\frac{2bl\pi+2ak\pi}{ab}=\frac{2\pi}{ab}$，而最後的等式是因爲 $ak + bl = 1$ 而成立。因此，我們便能順利作出正 $a\cdot b$ 邊形來。以上便是《幾何原本》第 IV 冊第 15 與 16 命題關於正 6 與正 15 邊形作圖想法的原理與推廣。

依此類推，因爲 3 與 5 互質，於是我們能作出正 15 邊形，同理，因爲 2、3、5 這三個數互質，且正 3 角形與正 5 邊形的尺規作圖古希臘人早已解決，因此，到目前爲止，只要 n 是形如$2^m\cdot 3^k\cdot 5^l$的數，其中 m 是非負整數，而且 *k* 與 *l* 皆爲 0 或 1，我們都能作出正 n 邊形來。更一般化來看，如果已知 n 是一個形如$2^m\cdot p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ 的數，其中對所有的p_i，我們都能作出正 p_i 邊形，而且這些 p_i 互質，r_i 皆爲 0 或 1，那我們就可以作出正 n 邊形。

接著，我們可以擴大討論所有$n\le 20$的情況。首先，正 3 角形，正 4 邊形與正 5 邊形已經解決，接下來，因爲 $6 = 2\cdot 3$，$8= 2^3$，$10=2\cdot 5$，$12=2^2\cdot 3$，$15=3\cdot 5$，$16=2^4$，$20=2^2\cdot 5$，所以，由《幾何原本》的相關命題，可以作出正 6、8、10、12、15、16、20 邊形。然而，面對n=7、9、11、13、14、17、18、19 時，數學家們再一次陷入了困境之中，無法利用前述的各種法則來解決，必須進一步找尋新的方法，嘗試新的路徑。

III 新的方法，新的局面

從《幾何原本》問世之後，尺規作圖的問題，就吸引了數學家們的關注。然而，歐幾里得所提出的方法並無法有效地一般化與推廣，眾人的費力苦思，卻始終無法徹底解決所面對的難題。因此，唯有新的方法、新的巧思，方能開創新的格局。漫漫的長夜是無止盡的等待，終於，兩千年多年後的十八世紀末，隨著高斯的誕生，希望的曙光才逐漸照亮黑暗。

III. 1 可尺規作圖的實數

最讓人引領期盼的豪華宴席料理，緊接著即將登場，然而主菜上桌之前，我們必需先端上幾道開胃小菜。

給定位單位長度 1 之後，哪些實數是可以依循古希臘尺規作圖的規定，透過有限多次地使用 (沒有刻度的) 直尺與圓規畫出來的呢？首先，如果我可以從已知的單位長度，透

過有限多次地使用直尺與圓規來畫出 |a| 這個長度，那我們稱爲實數 a 可以尺規作圖，例如：3，-4，5/2 等數皆可以尺規作圖。更一般性地來說，已知 a 與 b 都可以尺規作圖，則 a + b、a - b、ab、a / b (當 b 不爲 0 時)，也都可以尺規作圖，也就是說，所有的有理數都可以利用直尺與圓規，在有限個步驟之中畫出來。又當 a>0 時，我們亦可以透過尺規作圖的方式畫出$\sqrt{a}$。至於上述這些作圖的方法，在中學課程之中都有介紹，有興趣的讀者可參考或回憶現今中學的數學課程之中的相關內容。

進一步地，從代數的語言來看，所有可以尺規作圖的實數，會形成一個體(Field)，而這個可以尺規作圖的實數體 (F) 是整個實數體 (R) 的子體，同時包含所有的有理數 (Q)，亦即Q包含於F且包含於R之中。這個體 (F) 當中所包含的元素，正好是我們可以從有理數進行有限次加、減、乘、除有理運算以及取正數的平方根等動作而得到的所有實數，有理數a加、減、乘、除有理數b仍是有理數，因此，在做加、減、乘、除操作的過程中，所得到的數仍落在有理數體之中，並不使得原本的體變大。然而，當我們作「開根號」的動作時，出現諸如 $\sqrt{a}$ 的無理數，因此會讓使得原本的有理數體變大。根據代數學之中相關的基本性質與定理，我們可以知道 $[Q(\sqrt{a}):Q] = 2$ (將$Q(\sqrt{a})$ 看成佈於Q的向量空間時，維度爲 2)。更進一步地，如果實數a可尺規作圖，則存在有限多個實數$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n = a$，使得 $[Q(a_1):Q] = 2$，且 $[Q(a_1, a_2, .., a_i):Q(a_1, a_2, .., a_{i-1})] = 2$。由此，我們還可以知道 $[Q(a):Q] = 2^s$，其中s爲正整數，同時，$[Q(a):Q]$ 會等於係數佈於有理數體時a之首一不可約多項式的次數。至於這個定理的證明內容，涉及到許多代數學上的知識，在此並不加以討論，有興趣的讀者可查閱代數學相關書籍內容。但重要的是，我們可以得到以下重要的結論 (定理)：

若實數 a 可尺規作圖，則$[Q(a):Q] = 2^s$，意即若實數 a 可尺規作圖，則 a 的不可約多項式(係數佈於有理數)之次數必為 2 的冪次。

上述結論等價於：如果 a 的不可約多項式 (係數佈於有理數) 之次數不爲 2 的冪次時，那麼，a 就無法以尺規作圖作出。由這個結果，我們亦可以輕易地解決「倍立方」、「化圓爲方」、「三等分任意角」等古希臘三大作圖題。

接著，我們再引入一個定理：θ角可以尺規作圖，若且唯若 cosθ可以尺規作圖 (關於這個定理的證明並不困難，留給讀者們自行思考)。在一開始的討論之中我們知道，正 n 邊形可以尺規作圖若且唯若 $\frac{2\pi}{n}$ 可以尺規作圖，再根據上述定理，正 n 邊形可以尺規作圖若且唯若 $\cos(\frac{2\pi}{n})$ 可尺規作圖。接下來，主菜隨即上桌，我們透過高斯的方法，來研究一些正 n 邊形可尺規作圖的可能性。

III. 2 5 與 7，可與不可之間

先回顧高中的數學課程，利用複數極式的概念以及棣美弗定理，我們可以求得 $x^n - 1 = 0$ 的 n 個根，如果把 $x^n - 1$除以 $x - 1$，則可以得到 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$，除了 $x = 1$之外，它的 $n - 1$個根會與 $x^n - 1 = 0$的所有根相同，並且，1 的這 n 個根會構成一個循環群，我們可以下列方式將 n 個根依序排列：$R, R^2, R^3 \cdots, R^n = 1$，其中 $R = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$，而 R^{-1} 或 $\frac{1}{R} = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$。同時，我們也知道 1 的這 n 個根在複數平面上，會把單位圓分成 n 條相等的弧。並且當 n 爲質數時，$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$是不可約的 (這可由 Eisenstein 判定法加以判斷)。此時，我們把 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ 稱之

爲割圓方程 (或曰分圓多項式)。由稍早提過的相關定理也可以知道，只有當 $n-1=2^m$ ，且其中 m 爲大於等於 1 的正整數時，才有可能作得出正 n 邊形。

有了上述先備知識之後，我們便可以著手來討論正 5 邊形的作圖問題。首先令 $R=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ，則有 $R^5-1=0$ ，又因爲 $R\neq 1$，所以 $\frac{R^5-1}{R-1}=$ $R^4+R^3+R^2+R+1=0$ 。加上此割圓方程式是不可約的，同時次數具有 2^m 的形式，所以，我們知道可能可以作得出這個方程的根。

接著，我們把割圓方程的所有根加以配對相加：

$$y_1=R+\frac{1}{R}=(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})+(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5})=2\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$y_2=R^2+\frac{1}{R^2}=(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5})+(\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5})=2\cos\frac{4\pi}{5}$$

因此，我們便能得到下列關係式：

$$y_1+y_2=R+R^4+R^2+R^3=-1$$

$$y_1\cdot y_2=(R+R^4)(R^2+R^3)=R^3+R^4+R^6+R^7=R^3+R^4+R+R^2=-1$$

再來，根據根與係數關係，我們可以知道 y_1 與 y_2 滿足 $y^2+y-1=0$ 這個方程式，利二次方程式的公式解，我們便能得到 $y^2+y-1=0$ 的兩個根爲 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 。又因爲 $\frac{2\pi}{5}$ 落在第一象限，$\frac{4\pi}{5}$ 落在第二象限，所以，我們知道 $y_1=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$ 且 $y_2=2\cos\frac{4\pi}{5}<0$ ，因此，$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ，於是可以得到 $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$，這是一個可以尺規作圖的實數。又已知 θ 角可以尺規作圖若且唯若 cosθ 可以尺規作圖，所以，我們可以作出 $\frac{2\pi}{5}$，因此，便能作出正 5 邊形，而作圖的方法在《幾何原本》之中亦完整給出。

接下來，我們繼續討論正 7 邊形的情況，當歐幾里得順利地解決了正 3、4、6、8、10 邊形等作圖問題之後，顯然在嘗試作正 7 邊形時遇上了困難，始終無法突破，直至 18 世紀之間的數學家們亦束手無策。這裡，我們再次利用前述的方法來說明這個問題。首先，我們令 $R=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ，則 $R^7-1=0$ ，又因爲 $R\neq 1$ ，所以，割圓方程即爲 $\frac{R^7-1}{R-1}=R^6+R^5+R^4+R^3+R^2+R+1=0$ ，而這是一個不可約方程，然而次數並不爲 2 的冪次，因此，我們無法尺規作圖作正 7 邊形。或者，我們再次把割圓方程的根加以配對相加：

$$y_1=R+\frac{1}{R}=(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7})+(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7})=2\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$y_2=R^2+\frac{1}{R^2}=R^2+R^5$$

$$y_3=R^3+\frac{1}{R^3}=R^3+R^4$$

因此，我們可以得到下列關係式：

$$y_1+y_2+y_3=(R+R^6)+(R^2+R^5)+(R^3+R^4)=-1$$

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=(R^3+R^1+R^6+R^4)+(R^4+R^2+R^5+R^3)+(R^5+R^1+R^6+R^2)=-2$$

$$y_1\cdot y_2\cdot y_3=(R+R^6)(R^2+R^5)(R^3+R^4)=1$$

根據根與係數關係，我們可以知道 y_1、y_2、y_3 會滿足下列三次方程式：$y^3+y^2-2y-1=0$，再運用有理根檢驗法，因爲 y^3 項與常數項的係數分別爲 1 與 -1，所以，這個三次方程式的有理根僅可能是±1。然而，因式定理告訴我們，±1都不是這個方程式的根，因此，這個三次方程式是不可約的，同時亦沒有有理根，所以，我們無法以尺規作圖作出它的三個根，當然就無法作出 $y_1=2\cos\frac{2\pi}{7}$，也因此無法作出正 7 邊形。

IV 最終的豪華料理－正十七邊形之尺規作圖

IV.1 高斯之洞見

最後這道豪華料理，主要探討正 17 邊形的作圖問題，我們從高斯的觀點切入，說明可作圖性，從證明的過程當中，我們也能掌握正 17 邊形的作圖方法。

首先，我們先作一個簡單的觀察：如果 2^m+1 是一個質數，那麼 $m=2^k$，其中 k 是非負整數。這裡可以簡單說明如下：假設 m 有大於 1 的奇因數，則 $m=rs$，其中 s 爲大於 1 的正整數且 r 是正整數。由於當 s 是奇數時，我們可以將 a^s+b^s 因式分解：$a^s+b^s=(a+b)(a^{s-1}-a^{s-2}b+a^{s-3}b^2-\cdots+b^{s-1})$，因此，$2^m+1=2^{rs}+1$ $=(2^r+1)(2^{r(s-1)}-2^{r(s-2)}+2^{r(s-3)}-\cdots+1)$，又因爲 r 與 s 皆爲正整數，因此 2^m+1 會有二個大於 1 的因數，這與 2^m+1 是質數的假設矛盾。所以，如果 2^m+1 是一個質數，那麼，它必具有 $2^{2^k}+1$ 的形式，其中 k 爲非負整數。至於形如 $2^{2^k}+1$ 的質數，我們稱之爲費馬質數，同時，費馬也大膽地猜測形如上述 $2^{2^k}+1$ 的正整數都會是質數，例如：3=$2^{2^0}+1$，5=$2^{2^1}+1$，17=$2^{2^2}+1$等。又例如 101=$2^2\cdot 5^2+1$，因此 101 非費馬質數。然而，尤拉發現 $2^{2^5}+1$ 並非質數，其可整除 641，這也說明費馬的這個猜想並不正確。

事實上，後來數學家們證明了下列的一般性定理：

正 n 邊形可尺規作圖，若且唯若所有整除 n 的奇質數皆為費馬質數，意即 $n=2^k\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cdot p_n$，其中，所有的$p_i$皆為費馬質數。

因此，如果 n 是形如 $2^{2^k}+1$ 的質數，那麼，吾人將可以作出正 n 邊形。《幾何原本》之中，已給出了當 k=0 或 1，也就是當 n=3 或 5 時，如何作出正 3 角形與正 5 邊形的方法。從上述的後見之明中，我們也知道，當 k=2 時，理論上可以尺規作圖作出正 17 邊形。至於如何實際操作以尺規作圖作出正 17 邊形，則是困擾了數學家們許久的一個難題，至少從歐幾里得至高斯誕生之前的這 2000 年裡，一直沒有數學家能真正給出正 17 邊形的作圖方法。以下，我們將再次使用前述的方法，進一步呈現出高斯的洞見以及其作正 17 邊形的方法。

IV.2 高斯之正 17 邊形尺規作圖證明

我們令 $R=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$ ，則 $R^{17}-1=0$ ，所以，割圓方程式即爲：
$R^{16}+R^{15}+\cdot\cdot+R^{2}+R+1=0$ 。接著，以如下方式將 17 個根排序：

$R, R^3, R^9, R^{10}, R^{13}, R^5, R^{15}, R^{11}, R^{16}, R^{14}, R^8, R^7, R^{12}, R^2, R^6$

這裡的排序方式是考慮 R^{3^k} ，其中 k 爲非負整數，依此順序會得到上列的排列方式。接著，把上述的奇數項相加得到：

$y_1=R+R^9+R^{13}+R^{15}+R^{16}+R^8+R^4+R^2$

再把偶數項相加得到：

$y_2=R^3+R^{10}+R^5+R^{11}+R^{14}+R^7+R^{12}+R^6$

則我們有下列關係式：

$y_1+y_2=R+R^2+\cdot\cdot R^{16}+R^{17}=-1$

$y_1y_2=(R+R^9+R^{13}+R^{15}+R^{16}+R^8+R^4+R^2)(R^3+R^{10}+R^5+R^{11}+R^{14}+R^7+R^{12}+R^6)=-4$

因此，我們可以知道 y_1, y_2 是二次方程式 $y^2+y-4=0$ 的兩個根。

接著，我們取 y_1 的奇數項相加得： $z_1=R+R^{13}+R^{16}+R^4$ ，再取 y_1 的偶數項相加得： $z_2=R^9+R^{15}+R^8+R^2$ 。我們又取 y_1 的奇數項相加得： $w_1=R^3+R^5+R^{14}+R^{12}$ ，再取 y_1 的偶數項相加得： $w_2=R^{10}+R^{11}+R^7+R^6$

因此，我們有下列關係式：

$z_1+z_2=y_1$ ， $w_1+w_2=y_2$

$z_1\cdot z_2=-1$ ， $w_1\cdot w_2=-1$

進一步地，還可以知道 z_1, z_2 滿足二次方程式 $z^2-y_1z-1=0$ 而且 w_1, w_2 滿足二次方程式 $w^2-y_2w-1=0$ 。

最後，我們取 z_1 的奇數項相加得：$v_1=R+R^{16}$，再取 z_1 的偶數項相加得：$v_2=R^{13}+R^4$ ，這時，我們可以得到：$v_1+v_2=z_1$，$v_1\cdot v_2=w_1$，並且 v_1, v_2 會滿足二次方程式：$v^2-z_1v+w_1=0$，又因爲 $v_1=R+R^{16}$ 且 $R\cdot R^{16}=R^{17}=1$ ，所以 R, R^{16} 滿足二次方程式： $r^2-v_1r+1=0$ 。

至此，我們可以透過解一系列的方程式來得到 R，再者 $R=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$ ，所以 $\frac{1}{R}=\cos\frac{2\pi}{17}-i\sin\frac{2\pi}{17}$ ，從而

$v_1=R+R^{16}=R+\frac{1}{R}=2\cos(\frac{2\pi}{17})$ ，

$v_2=R^4+\frac{1}{R^4}=2\cos(\frac{8\pi}{17})$ 。

又 $\frac{2\pi}{17}$ 與 $\frac{8\pi}{17}$ 都在第一象限內，所以 $v_1>v_2>0$ 且 $z_1=v_1+v_2>0$ 。

類似地，

$w_1=R^3+R^5+R^{14}+R^{12}=(R^3+\frac{1}{R^3})+(R^5+\frac{1}{R^5})$

$=2\cos(\frac{6\pi}{17})+2\cos(\frac{10\pi}{17})=2\cos(\frac{6\pi}{17})-2\cos(\frac{7\pi}{17})$ 。

又因爲 $\left|\cos(\frac{6\pi}{17})\right| > \left|\cos(\frac{7\pi}{17})\right|$，所以 $w_1 > 0$。並且，

$$y_2 = (R^3 + \frac{1}{R^3}) + (R^5 + \frac{1}{R^5}) + (R^6 + \frac{1}{R^6}) + (R^7 + \frac{1}{R^7})$$
$$= 2\cos(\frac{6\pi}{17}) + 2\cos(\frac{10\pi}{17}) + 2\cos(\frac{12\pi}{17}) + 2\cos(\frac{14\pi}{17})$$

其中只有 $\cos(\frac{6\pi}{17}) > 0$，而且 $\left|\cos(\frac{6\pi}{17})\right| < \left|\cos(\frac{5\pi}{17})\right| = \left|\cos(\frac{12\pi}{17})\right|$，所以 $y_2 < 0$。又已知 $y_1 y_2 = -4$，所以 $y_1 > 0$。

接下來，我們可以利用二次方程式的公式解，解出下列各值：

首先，y_1, y_2 是方程式 $y^2 + y - 4 = 0$ 的兩個根，而且 $y_1 > 0$，$y_2 < 0$，所以我們可得：

(1) $y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$

(2) $y_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{17} - 1)$

再來，由於 z_1 與 w_1 分別爲方程式 $z^2 - y_1 z - 1 = 0$ 與 $w^2 - y_2 w - 1 = 0$ 的正根，於是：

(3) $z_1 = \frac{1}{2} y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4} y^2}$

(4) $w_1 = \frac{1}{2} y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4} y^2}$

因此，我們只需要再利用畢氏定理，就能作出這 4 條線段，接著就能作出 $v^2 - z_1 v + w_1 = 0$ 的根，又因爲 $v_1 = R + R^{16} = R + \frac{1}{R} = 2\cos(\frac{2\pi}{17})$ 是這個方程式之一根(且由前述可知其爲較大之根)，因此，我們能作出 $\cos(\frac{2\pi}{17})$，於是能作 $\frac{2\pi}{17}$，所以就能利用尺規作圖作出正 17 邊形了。

IV. 3 正 17 邊形的作圖方法

最後，我們介紹高斯作正 17 邊形的方法：

首先，在單位圓內作 2 條互相垂直直的徑 AB 與 CD。令過 A 與 D 的兩切線相交於 S，接著把 AS 四等分，再作 AE = 1/4 AS。令以 E 爲圓心，以 OE 爲半徑的圓與 AS 相交於 H(在 FF’的外部)。以 F’爲圓心，F’O 爲半徑的圓與 AS 相交於 H’(在 F’與 F 之間)。

接著，我們可以透過下圖來證明 $AH = z_1$，$AH' = w_1$。

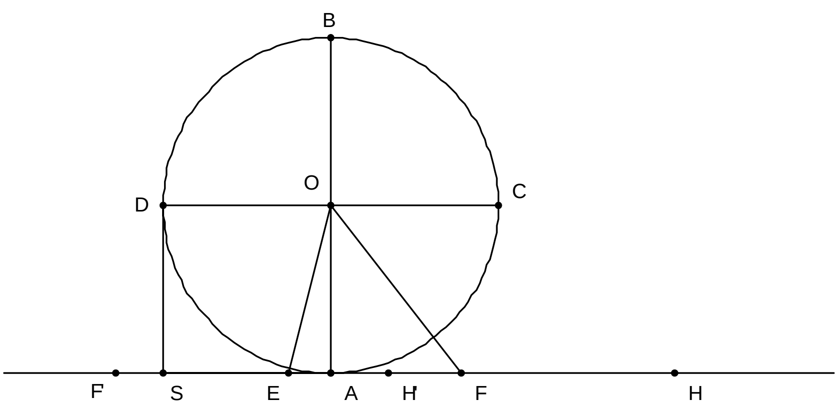


圖 1

從圖 1 之中，我們可以得到下列關係式：

(1) $OE=\sqrt{OA^2+EA^2}=\sqrt{1^2+(\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{4}\sqrt{17}$

(2) $AF=EF-EA=OE-EA=\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}y_1$

(3) $AF'=EF'+EA=OE+EA=\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}y_2$

(4) $OF=\sqrt{OA^2+AF^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}y_1^2}$

(5) $OF'=\sqrt{OA^2+AF'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}y_2^2}$

因此，進一步得到：

(6) $AH=AH+FH=AH+OF=\frac{1}{2}y_1+\sqrt{1+\frac{1}{4}y_1^2}=z_1$

(7) $AH'=F'H-F'A=F'O-F'A=\frac{1}{2}y_2+\sqrt{1+\frac{1}{4}y_2^2}=w_1$

所以，我們便能得到前述證明過程之中出現的 z_1 與 w_1 。

在已知 $AH=z_1$ 以及 $AH'=w_1$ 的情況下，我們可以作出 $v^2-z_1v+w_1=0$ 的根。

在這裡，我們再以小小的篇幅，介紹如何利用尺規作圖作一元二次方程式之兩個實根的方法。已知一元二次方程式為 $x^2-ax+b=0\ (a^2>4b)$ ，以下的方法可以幫助我們畫出其兩個實根：

首先，連接 B 點(0 , 1)與 D 點(a , b)得到線段 BD。再以 BD 為直徑作圓，與 x 交於 E 與 F。則 E 與 F 的橫坐標即為方程式的兩個根。

上述方法的簡單證明步驟如下：

(1)以 BD 為直徑的圓之方程式為： $(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b+1}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{(b-1)^2}{4}$ 。

(2)令 y=0，則可解得 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ，此即為 $x^2-ax+b=0$ 的兩個根。

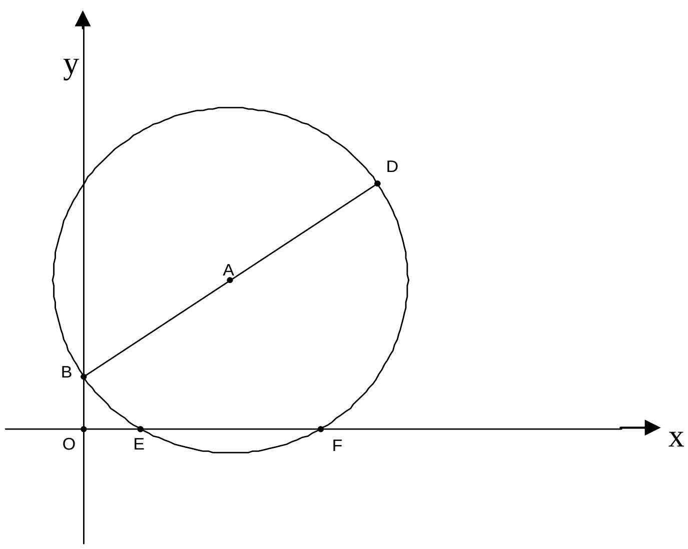


圖 2

因此，利用上述方法，我們首先連接 B 點(0,1)與 D 點(z_1, w_1)得到線段 BD，接著，以 BD 為直徑作圓，與 x 交於 E 與 F，此時右交點 F 之橫坐標即為所求之$v_1 = 2\cos(\frac{2\pi}{17})$，亦即$OF = 2\cos(\frac{2\pi}{17})$。

最後，我們便可以進一步在單位圓上作出正 17 邊形的一邊，接著作出正 17 邊形。而這個過程可以分成四個步驟：

(1)在 x 上標示出$OF = v_1 = 2\cos(\frac{2\pi}{17})$。

(2)令 M 是 OF 之中點，即$OM = \frac{1}{2}v_1 = \cos(\frac{2\pi}{17})$。

(3)作OF的垂線交單位圓於 P 點，此時$\angle POM = \frac{2\pi}{17}$，因此 AP 即為正 17 邊形的一邊。

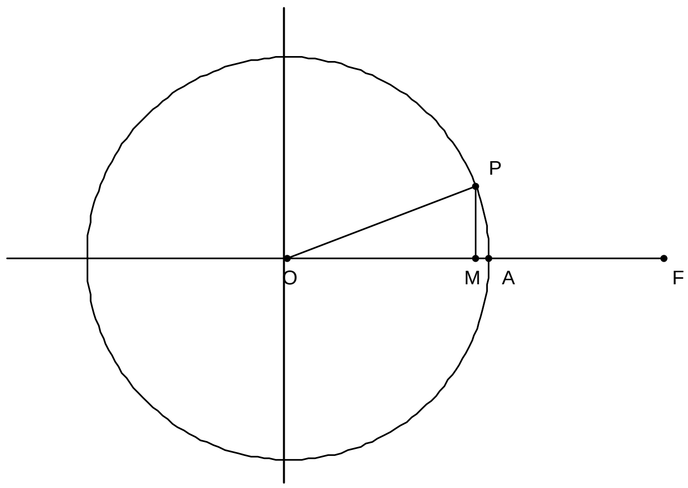


圖 3

(4)以 AP 為長來量圓周，畫出 17 個頂點，再連接各線段，所得圖形即為正 17 邊形，亦即正 17 邊形的尺規作圖完成。

V 更寬廣的新世界

高斯上述作正 17 邊形的方法，可以進一步地推廣至所有形如$2^{2^k}+1$的正 n 邊形，當 n 是形如$2^{2^k}+1$的質數時，它的割圓方程為一個2^{2^k}次不可約多項式，其中共有2^{2^k}個根，接著我們仿照高斯處理正 17 邊形的方法，不斷地將這2^{2^k}個根分成兩個集合，第一次將2^{2^k}個根配對分成兩集合時，每個集合會有2^{2^k-1}個根，接著再將元素個數為2^{2^k-1}的這兩個集合各自配對分割之後，這時，每個集合會包含有2^{2^k-2}個根，持續相同的分割過程之中，我們會得到一系列的二次方程式，其中每一個方程的係數都是由前一個方程的根所決定，並且在有限次之後，每個集合之中都只會留下兩個元素，諸如：R與$\frac{1}{R}$、R^2與$\frac{1}{R^2}$、R^3與$\frac{1}{R^3}$等

等，這時 $x^n=1$ 的根可以用有限次有理運算與求平方根得到。至於上述推廣的細節，則留給有興趣的讀者可自行思考或者進一步參考其它相關書籍或文獻。

反思高斯的方法，除了在邏輯上嚴謹地證明了正 17 邊形的可作圖性，證明的過程之中同時也說明了實際如何作圖的方法，相較於其它透過代數學相關知識的證明方法而言，高斯的確具有更深的洞見，也為原本似乎走入死胡同的難題，開創了一條新的道路。此外，高斯亦在 1826 年時宣稱了正多邊形可尺規作圖的條件，即：

正 n 邊形可尺規作圖，若且唯若所有整除n的奇質數皆為費馬質數，意即 $n=2^k\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\cdot p_s^{k_s}$，其中，所有的 p_i 皆為費馬質數，所有的 k_i 皆為 0 或 1。

雖然其確實證明了這個條件的充分性，然而，必要性的部份並沒有給出完整的證明。直到 1837 年，汪徹（Wantzel）才終於證明了可尺規作圖條件的必要性。這場跨越了 2000 多年，始於古希臘，發揚於歐幾里得，成就於高斯的數學宴席料理，終結於現代代數學的威力。古典的幾何學問題，最終被源於解方程式以及伽羅瓦(Galois)的研究成果等代數學工具完全解決。解析幾何的發明連結了、也同時平等了希臘神聖的幾何學以及技藝性質的代數學，群論的誕生，更使得代數學與幾何學在現代數學研究中越趨緊密的結合，不管是十九世紀末，克萊因(Klein) 用群的觀念來統一不同的幾何，或者從黎曼 (Riemann 從代數曲線的研究成果，所發展出的重要領域「代數幾何學」，無不宣告代數學與幾何學之間的齊頭並進以及相輔相乘，其它數學領域之間或者數學與其它學科之間的連結亦然。

兩千多年前，理性的力量引導好思考的人們渴求了解世界的真理、自然的定律，四百年前，數學家們把科學的數學律歸功於上帝的巧手設計，文明與真理的追求是為了彰顯上帝的榮耀與光輝。也曾經，部份數學家開始從現實世界撤離，轉向越來越抽象、也越來越專門化的數學本身，並僅專研於自身精熟的領域，致力著數學的內在美感以及純智性的挑戰。然孤立終將帶來迷惘、數學的舊礦脈終會貧瘠。而未來，理性的力量必需依賴更開闊的心胸，更多元的結合，方有更豐富的創造、更寬廣的新世界。

參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

John B. Fraleigh (1999). *A first Course in Abstract Algebra* (6^{th} ed). Addison-Wesley Educational Publishers Inc.

Thomas W. Hungerford (1974). *Algebra*. New York: Springer –Verlag New York Inc.

Bold, B (鄭元祿譯) (2008).《著名的幾何問題及其解法－尺規作圖的歷史》，北京：等教育出版社。

Berlinghoff, William P. and Fernando Q. Gouvea (洪萬生、英家銘等譯) (2008).《溫柔數學史》，台北：博雅書屋。

Kline, Morris（趙學信，翁秉仁譯）(2004).《數學－確定性的失落》，台北：台灣商務印書館。

洪萬生 (2006).《此零非彼 0：數學、文化、歷史與教育文集》，台北：台灣商務印書館。

康明昌 (1988).《近世代數》，台北，聯經出版社。

網路資料

洪萬生 (2008)：〈尺規作圖：從三角形到正方形〉，台灣數學博物館：

http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php

洪萬生 (2008)：〈正 5、6、15 邊形之尺規作圖〉，台灣數學博物館：http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php

洪萬生 (2008)：〈正七邊形的尺規作圖之不可能！〉，台灣數學博物館：http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php

李建勳 (2008)：〈正七邊形不可能尺規作圖！〉，台灣數學博物館：http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php

陳彩鳳 (2008)：〈高斯〉，台灣數學博物館：http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php

蘇惠玉 (2008)：〈三大作圖題〉，台灣數學博物館：http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php

Joyce, David: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_10_04_1/index.html

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）
張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、
鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）葉吉海（陽明高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）劉天祥 邱靜如（台南二中）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

《爺爺的證明題》導讀

洪萬生
台灣師範大學數學系

書名：爺爺的證明題 (A Certain Ambiguity)
作者：高瑞夫 (Suri Gaurav)、哈托許 (Singh Bal Hartosh)
譯者：洪贊天、林倉億、洪萬生
審定：洪萬生
出版：五南關係企業博雅書屋
出版年：預定 2009 年 10 月

這本數學小說有兩條敘事軸線，第一條以現代的印度留美學生拉維爲主角，第二條則是以拉維的爺爺數學家維傑爲主角。再加上敘事者是第一人稱的拉維，這兩條古今軸線不時交錯，自然地牽引出一段歷久彌新的數學佳話。作者顯然企圖在事實的數學 (factual mathematics) 與虛構的敘事 (fictional narrative) 之間，尋找一個灰色地帶，呈現數學家進行數學研究的有血有肉形象。其實，這種新的文類書寫，亦即如何將數學與小說融爲數學小說 (mathematical fiction)，始終是科普作家的敘事挑戰。不過，本小說作者完成此一使命，殆無疑問。

本小說故事一開始，拉維回憶爺爺送他的十二歲生日禮物－一台掌上型計算機，以及如何引導他進行驚奇連連的數學解題。沒想到爺爺在隔天睡夢中安祥去世，遺囑中留下一筆錢，贊助他前往美國就讀大學 － 當然希望他主修數學。後來，拉維前往史丹福大學就讀，因此，美國加州就成了現代的故事場景。拉維大四即將畢業，但是，還在掙扎是否以經濟學爲主修。有一次在欣賞爵士樂時，他遇見了也是樂迷的數學家尼可教授，由於室友彼得的推薦，拉維決定選修尼可的一門數學通識課程 －「思考無限」。於是，現代的師生之數學對話，遂引出了維傑 1919 年遊學美國的短暫數學生涯。原來，尼可曾研讀維傑發表的論文，不過，其編輯特別註記該文之構想，乃是出自維傑在紐澤西牢獄中坐監時的研究心得。這一條軸線的故事場景，安排在美國東岸的紐澤西一個虛構的摩里賽城。

爲什麼爺爺會在美國坐監呢？這是整篇小說掀起高潮的懸疑情節，而最終頗爲曲折的無罪釋放，也帶來祖孫堪稱圓滿的人生結局。既然如此，爲什麼本小說英文標題要訂爲 “A Certain Ambiguity” 呢？一語雙關，A certain ambiguity 既表示「確定模稜兩可」，似乎也有「若干模稜兩可」的意思。事實上，本書主旨完全圍繞在數學知識的確定性 (certainty) 及其所遭遇的挑戰，儘管後者引伸出知識本質的模稜兩可來，不過，「確定」才是正位！

數學知識確定性之意義，的確是本書主旨。誠如作者所交代，本小說創作靈感源自數

學史家克萊因 (Morris Kline) 的《數學：確定性的失落》(*Mathematics: The Loss of Certainty*)（台灣商務引書館出版）。所以，我們建議讀者在掌握整個故事脈絡之後，可以設法遵循作者所安排的歐幾里得《幾何原本》之相關命題證明 － 那些都是國中數學題材，如此便能多少掌握所謂數學確定性的意義。此外，有關無限集合的意義及其相關結果的簡要論證，也很容易「一睹芳澤」才是，唯一需要的，只是一點點耐心罷了。

當然，對於維傑基於數學論證而質疑有關上帝的存在，從而引發宗教信仰之爭議，作者也通過一位保守、虔誠但人格高尚的法官泰勒之角色安排，進行數學與宗教的真誠對話，觸及了知識 (knowledge) vs. 信仰 (belief) 的認識論核心問題，譬如我所「相信」的一定是「真理」或「知識」？維傑與泰勒這兩位分別是數學與宗教的「死硬派」之最終和解，竟然是愛丁頓爵士的核證愛因斯坦之廣義相對論，從而證明歐氏幾何不是有關我們空間的真實幾何學 (true geometry)。因此，彼此的讓步，促成了一段令人心折的跨文化忘年之交。泰勒法官顯然因爲建議紐澤西州長釋放維傑，而喪失了被提名爲大法官的機會，不過，他心胸坦蕩，求仁得仁。他們的故事結局在泰勒千里迢迢造訪孟買的維傑，在溫馨的友誼中落幕。

顯然爲了平行呼應 (parallelism)，在現代這一條敘事軸線中，作者利用尼可的「思考無限」這一門課程，一方面跨越異時空，藉著與維傑或法官對話，說明歐幾里得《幾何原本》既古典又現代的知識價值，另一方面，則以康托爾的集合論爲例，更進一步強調了邏輯 (logic) vs. 意義 (meaning) 的重要性。這一部分更是直指數學哲學的核心，值得吾人深入理解。

總之，這是一本不落俗套的（數學）小說，無怪乎它在數學小說網站 (mathematical fiction) 獲得極高之評價。誠然，在本書中，作者以小說敘事爲經，以數學知識本質（或數學哲學）爲緯，在小說角色安排、情節過場中，適時切入確定性的相關議題，頗有認知方面的關懷與考量，因此，這當然是一本非常成功書寫的科普讀物！我們深信：在本小說所提供的知識確定性之演化脈絡中，讀者一定可以深刻體會知識 vs. 信仰，乃至於邏輯 vs. 意義的張力。當然，如果讀者一時覺得閱讀的「承擔」太重，那就好好地欣賞這個有趣的故事就行了。

附記：本書中譯主要由洪贊天（第 1-5、7-8 章）與林倉億（第 6 章）合作完成，最後，再由我們三人共同商量定稿。其中，倉億適時出手相助，貢獻尤多，特此申謝。