HPM通訊

第十二卷 第十二期 目錄（2009年12月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

海洋文化中的數學

陳敏晧
國立清華大學歷史所博士班
國立蘭陽女中數學教師

The ceaseless sea is an earthly symbol of the infinite.[1]

I. 前言

台灣島本身是海島，四周環海而且漁業資源豐富，因此，台灣自古就是一個以海洋立國的國家，而海洋文化與數學教育之間淵源頗深，所以，此篇論文就是從海洋文化的角度來談數學，分別從海島文化中的數學、大航海時代的數學、海洋生物中的數學、海洋文化中的數學模型四個面向切入，以闡釋數學對海洋文化形成的重要性及海洋文化對數學知識演化存在著相關性。

II. 海島文化中的數學

II.1 領海面積求法

國立台灣大學數學系九十一年申請入學考試，有一題為考慮平面上一個凸邊形區域 $P_1P_2P_3...P_n\left(n\geq 3\right)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。試證明：她的領海面積是 $\left(p+\pi d\right)d$。

詳解如下：如圖一所示，令多邊形 $P_1P_2P_3...P_n\left(n\geq 3\right)$ 的 P_i 所對應的內角為 α_i。

領海是由 $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形及頂點 $P_1, P_2, ..., P_n$ 所在

[1] 改寫自 Marcia, Ascher.(2002). *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Culture*. New Jersey :Princeton University Press,p.145. 原文為 The ceaslessness of the sea is an earthly symbol of the infinite.

外角所圍成半徑為 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形面積和為

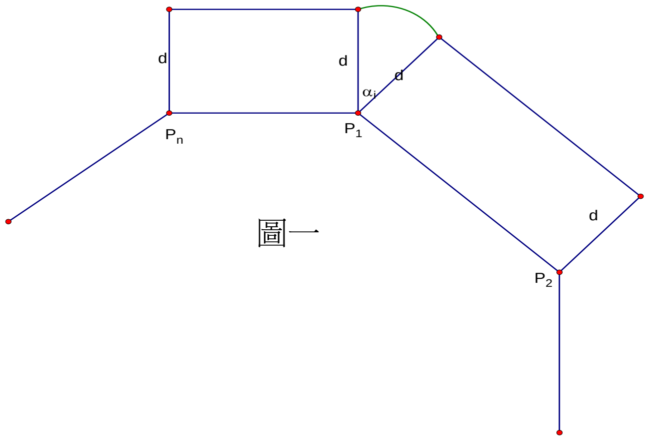
$$\left(P_1P_2 + P_2P_3 + ... + P_nP_1\right)d = pd$$

頂點 $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積總和為

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\pi-\alpha_i\right)\frac{\pi d^2}{2\pi} = \left[n\pi - \left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\right]\cdot\frac{\pi d^2}{2\pi}$$

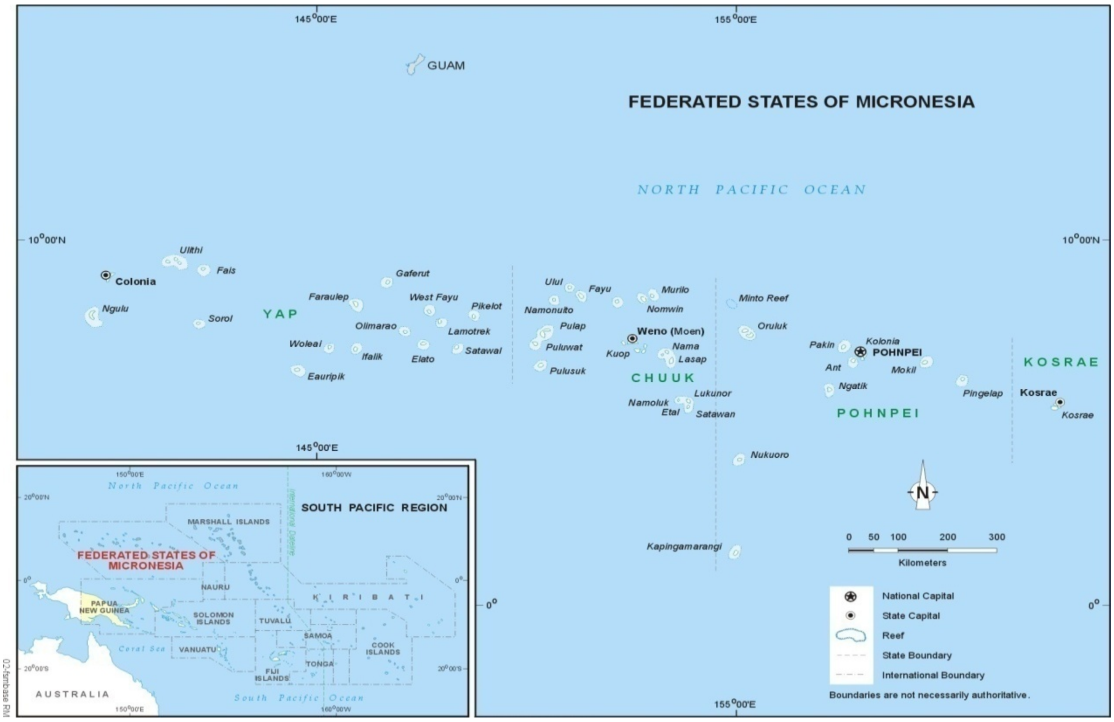
$$= \left[n\pi - (n-2)\pi\right]\cdot\frac{\pi d^2}{2\pi} = \pi d^2$$

故領海面積是 $pd + \pi d^2 = \left(p+\pi d\right)d$ 。[2]



圖一

II.2、海島如何定位



圖二

海洋上的海島如何確定方位，也是一個重要的數學議題。上圖二為北太平洋島嶼圖，根據笛卡爾座標系 (Cartesian coordinate system) 的想法，我們為了確認每個島嶼相的相對位置，我們可以使用座標 (x,y)，除此之外，為了更精準掌握，還可以利用數對 (a,b)，例如：將某象限內的島嶼以數對 (a,b) 確定，令其中 $a = 1,2,3,4$ 且 $b = 1,2,3,4$ ，則島 $(1,3)$ 與島

---

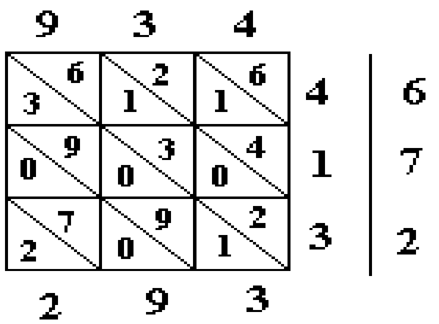
[2] 詳解根據南婷婷老師所提供，師大數學系許志農教授修正。

$(3,1)$是不同的，如果島嶼的個數超過$4\times4=16$的話，則再次使用數對概念，即島$\left[(1,3),(2,3)\right]$異於島$\left[(2,3),(1,3)\right]$，如此便有$16\times16=256$的組合方式，至於數量大於 256，還可利用模數 (modulus) 的想法，重新定義，例如：島嶼的位置在$\left[(a,b),(a',b')\right]$，令$a''=(a+b)\bmod 4, b''=(a'+b')\bmod 4$，則可以產生新的數對$(a'',b'')$，如此動作則無窮盡矣！[3]無論海洋中的島嶼有幾個，皆可運用模數與數對觀念解決。

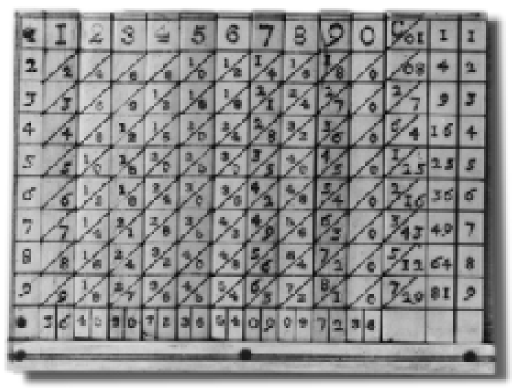
III. 大航海時代的數學

III.1 帆船法

大航海時代，指15 世紀到17 世紀之間。該時期內，歐洲的船隊出現在世界各處的海洋上，尋找著新的貿易路線和交易夥伴，以發展歐洲新生的資本主義 (Capitalism)。貿易伴隨著數學技術發展，四則運算方式的進步則引領數學技術的提昇。[4]西元 1478 年，威尼斯北部的特雷維索城 (Treviso) 出版了最早印刷本的算術書《特雷維索算術》(*Treviso Arithmetic*)，作者不詳，此書的內容多半為商業算術，即解釋數字的寫法、數的計算以及貨物兌換上的應用。[5]《特雷維索算術》中的棋盤法 (Gelosia Method) 是數字的乘法運算，樣式如下圖三，此圖所表達的是運算式為$934\times314=293276$，眼尖的讀者會發現，這個計算方式與約翰納皮爾 (John Napier, 1550-1617) 的計算方式如出一轍，如圖四。



圖三



圖四

至於除法方面也與現在大不相同，當時流行的方法稱為「帆船法」(Galley Method) 或「消減法」，之所以稱作「帆船法」的原因是計算過程後所遺留下的數字，其形狀宛如一

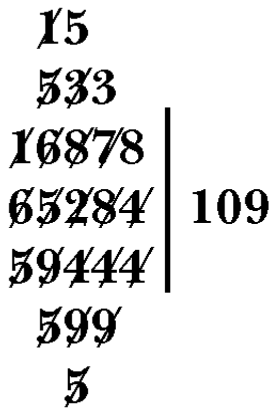
[3] Marcia, Ascher. (2002). *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Culture*. New Jersey :Princeton University Press, pp. 6-9.

[4] 法蘭克·斯懷茲 (Frank J. Swetz) 著、彭廣愷譯(2007)，《數學遊記》(The History of Mathematics: A Study Guide)》(台北 ： 河中出版社)，頁 61-76。

[5] .楊瓊茹，〈GELOSIA METHOD — 從阿拉伯出發〉，《HPM 通訊》4(12)。

艘帆船，如圖五與圖六，這種算法在當時歐洲流傳甚久，達三世紀。[6]

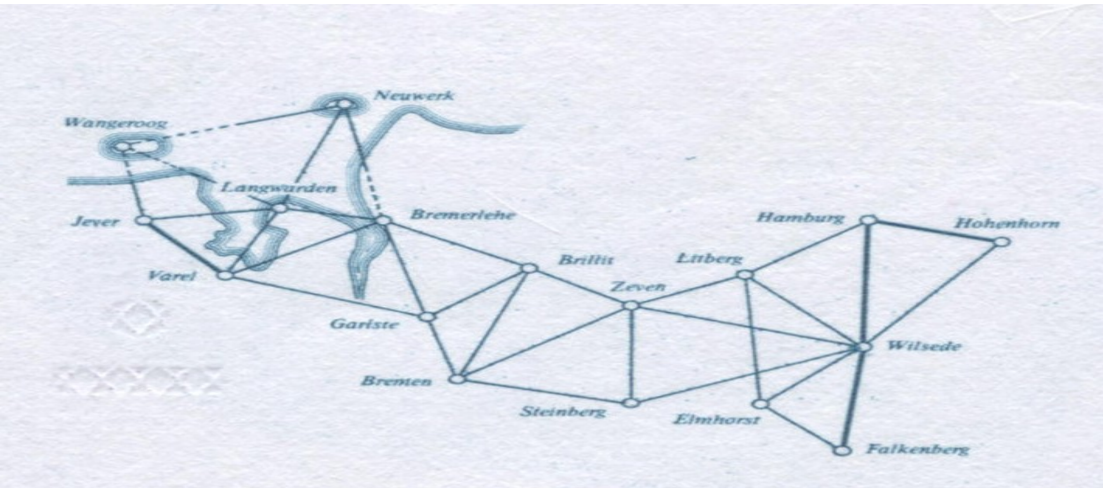
圖五



圖六[7]

III.2 三角測量法

海洋文化中，航海技術的進步取決於兩大因素的形成，一是測量技術的進展，一是航海地圖的準確性。關於測量技術的進展，最重要的是三角測量法，其中的原理是由已經的兩點 A 和 B，並且能從點 A 和點 B 目視到點 C，根據量測工具可以確認$\angle CAB$和$\angle CBA$的值，同時容易測出$\overline{AB}$長，根據正弦定理結果$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，不難算出$b=\overline{AC}$和$a=\overline{BC}$的長，這種方法常用於軍事測量，稱為「交叉法」，實際上的應用如圖七所示：

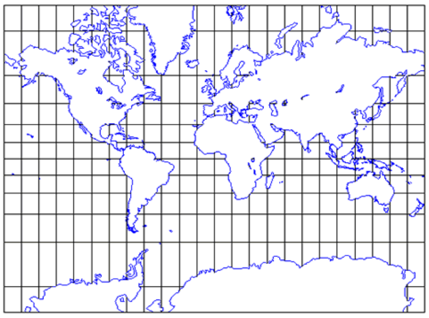


圖七

[6] 「帆船法」傳入中國見於李之藻的《同文算指》，可參考拙作(2002)，《《同文算指》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文)。

[7] 圖五所表示的除法為 65284 除以 594，所得的商為 109 餘為 538。

III.3 地圖繪製



圖八

至於航海地圖的準確性，歸功於麥卡托 (Gerardus Mercator, 1512-1594) 的創意，他創立麥氏投影法，意思是將地球上經緯上投影至平面地圖上，以方便航海者使用，如圖八。他遵循兩個原則，一是所有的緯線都要對應到平行赤道的直線，並且與赤道等長，而經線必須與赤道垂直；二是地圖上必須是保角的，如此，兩地之間的方向才能確認。[8]為了解決第一原則，麥卡托將經線等距離隔開，而緯線長由於隨著緯度的增加而變小，在緯度為 x 時，緯線長為 $2\pi R\cos x$ (假設地球為球形，且半徑為R)，所以，只要在緯度為 x 時，將緯線長放大 $\sec x$ 倍即可，如圖九，接著馬上面臨到另一個問題就是如何計算 $\int_0^x \sec x dx$ 的值？這對於十六世紀的數學家顯然是個難題，在麥卡托時代只能利用逼近的方法以求近似值，如同我們學習微積分時的上和及下和的求法，如圖十。直到 1599 年才由數學家萊特 (Edward Wright, c.1560-1615) 解出：

$\int_0^x \sec x dx = \int_0^x \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^x \frac{1}{\sec x + \tan x} d(\sec x + \tan x) = \ln|\sec x + \tan x|$。[9]另一種解法如下：$\int_0^x \sec x dx = \int_0^x \frac{1}{\cos x} dx$，利用變換變數，令 $u = \tan\frac{x}{2}$，兩邊同時微分得

$du = \sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx$，移項得 $dx = \frac{2}{1+u^2}du$，而

$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$，如此原式得

$$\int_0^x \sec x dx = \int_0^x \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}du}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2}{1-u^2} du = \int \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right] du = \ln|1+u| - \ln|1-u|$$

$= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$。[10] 其中

---

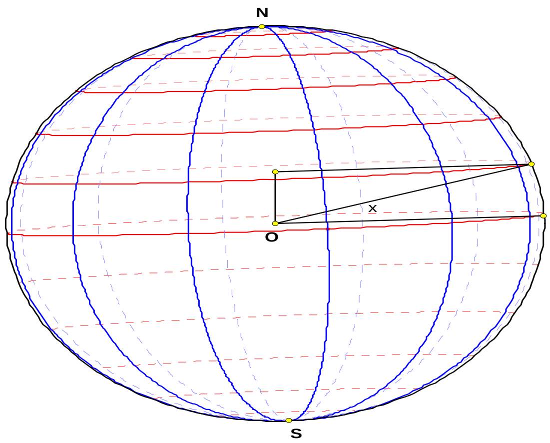
[8] 毛爾 (Eli Maor) 著、胡守仁譯(2000)，《毛起來說三角》(*Trigonometric Delights*)，(台北 ： 天下遠見出版社)，頁 217-224。

[9] 曹亮吉 (2004)，《從天文地理學數學》(台北 ： 天下遠見出版社)，頁 206-212。

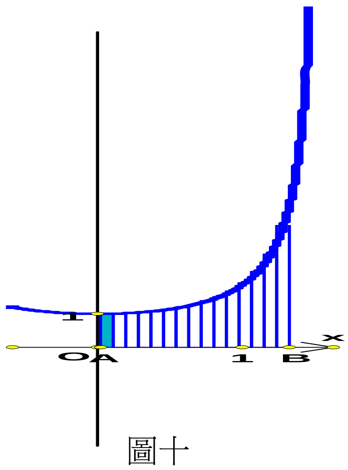
[10] 朱建正編撰 (1988)，《數學問題百則》，(台北 ： 中央研究院數學研究所)，頁 48-50。

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\sec x+\tan x$$

麥卡托自己明白沒有一個地圖能同時保持距離、形狀及方向，因此，他考慮以航海者的角度出發，選擇犧牲距離和形狀而保持方向，即保角，這就是俗諺所言：「方向對了，路途就不怕遙遠了。」



圖九

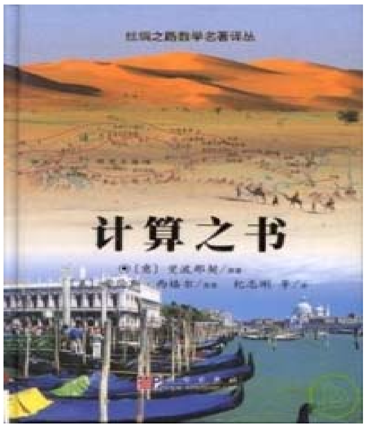


圖十

值得注意的是在 1599 年萊特發現 $\int_0^x \sec x dx$ 的解法後，此後的數學圈正蘊釀著大風暴，即 1614 年蘇格蘭數學家約翰納皮爾發表他的名著《對數的奇妙準則》揭開人類對於對數的探討，也影響後來的天文學、力學、物理學、航海的發展。[11]

III.4 航海問題

航海的數學問題常見於數學史料中，《計算之書》就是一例，它是中世紀數學的代表書籍，書中的題目內容來自當時歐洲人的生活模式，如圖十一，全書共十五章，[12]對於有意貼近中世紀歐洲生活史的人而言，此書是必須參考的經典文獻，下面兩則航海問題即是出自《計算之書》。



圖十一

---

[11] 對數 (logarithm) 一詞其實就是「比數」(ratio number)，也是納皮爾所創造的，而 logarithm 一詞則源自拉丁文 logos。

[12] 廣為熟知的「斐波那契數列」則位於第十二章的第七部分(第 474 頁)。

III.4.1 兩船相遇

兩船相離若干距離，第一艘船需 5 天、第二艘船需 7 天才可以駛完這段路程，問：若兩船同時出發，幾天後相遇？[13]

解法：把 5 乘以 7，得 35，假設它們 35 天後相遇，則在這些天中，第一艘船行駛了 7 倍的路程，第二艘船行駛了 5 倍的路程。因此，把 5 和 7 相加，得 12，把 1 乘以 35，除以 12，得 $\frac{11}{12}2$，即為它們相遇所需的天數。若想知道它們在何處相遇，則把 7 和 5 各除以 12，得第一艘船行駛了整段旅程的 $\frac{7}{12}$，第二艘船行駛了 $\frac{5}{12}$，設第一艘船每天朝第二艘船的方向行駛 $\frac{1}{5}$，第二艘船每天行駛 $\frac{1}{7}$，則將 1 除以它們的和；即得它們相遇所需天數，相遇處同上。

III.4.2 四人同船

四人同船轉運穀物，每人載量 $\frac{1}{4}$。第一人付給船主 $\frac{1}{3}$ 的穀物作為運費；第二人給了 $\frac{1}{4}$；第三人給了 $\frac{1}{5}$；第四人給了 $\frac{1}{6}$；船主從中共得運費 1000 莫迪亞，求該船的總載量。[14]

解法：假設該船總載量的四分之一部分，即每人所載份額為 60 莫迪亞，則該船總共裝載了 240 莫迪亞。因為第一人給了載量的 $\frac{1}{3}$；第二人給了 $\frac{1}{4}$；第三人給了 $\frac{1}{5}$；第四人給了 $\frac{1}{6}$，所以，取 60 的 $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$，得 57 莫迪亞，但結果應該是 1000。因此說：假設該船的總載量為 240 莫迪亞，則運費為莫迪亞，那麼總載量為多少，運費為 1000 莫迪亞？將 240 乘以 1000，除以 57，得 $\frac{10}{19}4210$ 莫迪亞，即為該船的總載量。[15]

沈康身的《歷史數學名題賞析》中也列出航海問題，如中世紀歐洲約 1593 年的算術題目：「四個商人在貨船上分別裝貨54,72,124,150拉司特(每拉司特合 12 噸)。啟航後遇到暴風雨，水手把過重荷載頭海，如共投海 46 拉司特又 4 噸。問每人應分擔多少？」答：$75\frac{6}{100},100\frac{8}{100},172\frac{36}{100},208\frac{1}{2}$ 噸。[16]

IV. 海洋生物中的數學

IV.1 扇形

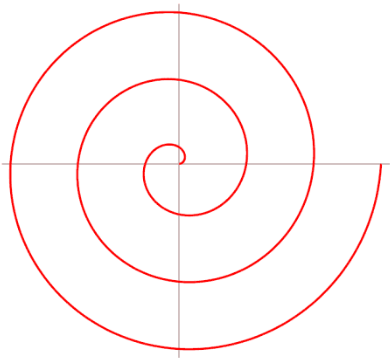
海洋中生物形態往往也是數學教育取材的重心，例如：扇形取自扇貝形，其為海產雙

---

[13] 紀志剛、汪曉勤、馬丁玲、鄭方磊等譯 (2008)，《計算之書》（北京：科學出版社），頁 313。
[14] 紀志剛、汪曉勤、馬丁玲、鄭方磊等譯《計算之書》，頁 318。
[15] 解法中的分數表示法為中世紀歐洲分數表示法。
[16] 沈康身 (2002)，《歷史數學名題賞析》（上海：上海教育出版社），頁 202。

殼類軟體動物，分佈於潮間帶或沙質海底生活，其半徑大小約 2.5-15 公分左右，數學中的扇形面積與周長的幾何概念源於此，如圖十二。另一個受到數學家青睞的海底動物就是海螺，全世界有 7 萬多種，海生的種類通稱為海螺，成員通常生活在淺水或平坦的泥地中。

圖十二



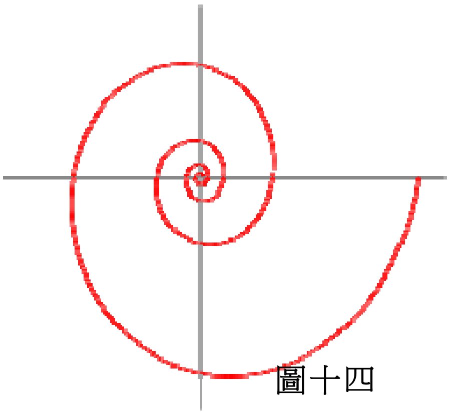
圖十三

IV.2 阿基米德螺線

人類歷史上第一個研究螺線者，當屬阿基米德（Archimedes, c.287B.C.- c.212B.C.)，他的《螺線》(*On Spirals*)一書中討論螺線的形成與螺線上的切線，他將螺線定義為:「均勻線性運動及均勻圓形運動之合成。」所以，阿基米德螺線又稱為「等速螺線」。即當一點P沿動射線OP以等速率運動的同時，這射線又以等角速度繞點O旋轉，它的極坐標方程為$r = a\theta$，所以，點P回到極線時，其與上次回到極線時的距離永遠等於$2\pi a$，如圖十三。

IV.3 等角螺線

另一個著名的螺線就是等角螺線(又稱對數螺線、生長螺線)，是由笛卡耳（René Descartes, 1596-1650）在 1638 發現的，後來，雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli,1654-1705）後來重新研究之，他發現了等角螺線的許多特性，如等角螺線經過各種適當的變換之後仍是等角螺線，他十分驚嘆和欣賞等角螺線的特性，故要求死後將之刻在自己的墓碑上，並附詞「縱使改變，依然故我」(eadem mutata resurgo)，可惜雕刻師誤將阿基米德螺線刻了上去$2\pi a$，如圖十四。[17]



圖十四

海洋生物中的等角螺線代表就是鸚鵡螺（又稱菊石)，牠存於印度洋和太平洋海區，北至日本南方，南至大堡礁，西至安達曼海，東至斐濟等地區均有發現，由於生存年代久遠，科學家稱之為：「活化石」。許志農教授在《高中數學珍寶》曾以對數螺線編寫一道數學問題：「阿螺正在研究一個對數螺線。他從螺線中心畫出一條射線，該射線與螺線剛好交於

[17] http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%89%E8%A7%92%E8%9E%BA%E7%BA%BF

六個點，離中心最近的點與中心距離 128 公分。更巧的是，這六個交點與中心的距離都是整數值，且都不超過 1000 公分。(1)問該螺線的公比? (2) 問其餘五個點與中心的距離? 」[18]

IV.4 海洋生物的生存環境

科學家發現海洋生物目前正受人類使用殺蟲劑 DDT 的危害，進一步發現，自然界的細菌分解 DDT 的能力與目前海洋中 DDT 含量成比例關係，同時研究報告顯示細菌需要花 7 年的時間才能分解百分之 10 的 DDT 含量，生物學家經測量發現海洋生物的生存條件必須在目前 DDT 含量的一半之下，請問需要經過幾年時間海洋生物才能健康長大？[19]

假設$Q(t)$代表海洋中t年後 DDT 含量，令$Q(0)=Q_0$代表目前 DDT 含量

，因為細菌分解 DDT 的能力與目前海洋中 DDT 含量成比例關係，令$\frac{dQ}{dt}=kQ(t)$

，則$\frac{Q'(t)}{Q(t)}=k$，左右同時對t積分得 $\ln Q(t)\big|_0^t=kt\big|_0^t$，即$\frac{Q(t)}{Q(0)}=e^{kt}$，得$Q(t)=Q_0\cdot e^{kt}$，令

$t=7$代入得$Q(7)=Q_0\cdot e^{k\cdot 7}=0.9Q_0$，即$\left(e^k\right)^7=0.9$，所以$e^k=0.9^{\frac{1}{7}}$，得

$Q(t)=Q_0\cdot 0.9^{\frac{t}{7}}$，生存條件要求 DDT 含量在目前一半之下，所以，$0.5\cdot Q_0=Q_0\cdot 0.9^{\frac{t}{7}}$，

即$0.5=0.9^{\frac{t}{7}}$，左右取對數得$\log_{10}^{0.5}=\log_{10}^{0.9^{\frac{t}{7}}}$，整理得$\log_{10}^{0.5}=\frac{t}{7}\log_{10}^{0.9}$，最後得$t=7\frac{\log_{10}^{0.5}}{\log_{10}^{0.9}}\cong 46$年。

V. 海洋文化中的數學模型

V.1 捉放捉理論模型

定理：假設隨機變數Θ遵尋正規分佈$N(\theta,\sigma^2)$，其中 θ 為未知參數；對Θ作 n 次獨立

---

18 參考答案為(1)公比為$\frac{3}{2}$。(2)五個點依次為$192,288,432,648,972$。

19 改寫自 Coreen L. Mett and James C. Smith.(1985). *Calculus with application*. U.S.A.: McGraw-Hill, Inc, pp. 227-228.

觀測得$\Theta_1=\theta_1,\dots,\Theta_n=\theta_n$。那麼θ之最佳可能值為 $\bar{\theta}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k}{n}$，即$\bar{\theta}$為似然函數

$L(\theta;\theta_1,\dots,\theta_n)$之最大點。當似然函數$L(\theta;\theta_1,\dots,\theta_n)$取最大值的點$\hat{\theta}=\hat{\theta}(\theta_1,\dots,\theta_n)$叫做θ的最

大似然推估值(the maximum likelihood estimate)，提昇到「所有可能」，$\widehat{\Theta}=\widehat{\Theta}(\Theta_1,\dots,\Theta_n)$叫

做θ的最大似然推估子(the maximum likelihood estimator)。

例如：海洋中有 N 條魚，先捉起N_a條魚做記號，然後放回，然後再任意捉起 n 條魚，發現其中有n_a條魚是有記號的，求 N 值為何？(以N_a、n、n_a表示)

方法一：利用比例想法，假設海洋中的魚群分佈是平均分佈的，因為

$N:N_a\doteq n:n_a$ ，得$N\doteq\dfrac{n}{n_a}\cdot N_a$。

方法二：利用統計學中的大數法則，假設隨機變數 Y 表示第二次捉魚，觀察每次捉到

的結果，即$Y=\begin{cases}1,\text{若有記號, 機率為}\dfrac{N_a}{N}\\0,\text{若無記號, 機率為}1-\dfrac{N_a}{N}\end{cases}$，根據似然函數的想法得函數

$L(N)=C_{n_a}^{n}\left(\dfrac{N_a}{N}\right)^{n_a}\left(1-\dfrac{N_a}{N}\right)^{n-n_a}$，微分得

$L'(N)=C_{n_a}^{n}\left[n_a\left(\dfrac{N_a}{N}\right)^{n_a-1}\left(-\dfrac{N_a}{N^2}\right)\left(1-\dfrac{N_a}{N}\right)^{n-n_a}+\left(\dfrac{N_a}{N}\right)^{n_a}(n-n_a)\left(1-\dfrac{N_a}{N}\right)^{n-n_a-1}\left(\dfrac{N_a}{N^2}\right)\right]$，即

$\left(\dfrac{N_a}{N}\right)^{n_a-1}\left(1-\dfrac{N_a}{N}\right)^{n-n_a-1}\left[n_a\left(-\dfrac{N_a}{N^2}\right)\left(1-\dfrac{N_a}{N}\right)+\left(\dfrac{N_a}{N}\right)(n-n_a)\left(\dfrac{N_a}{N^2}\right)\right]=0$，

整理得$\dfrac{n_a(-N_a)(N-N_a)}{N^3}+\dfrac{N_a\cdot(n-n_a)\cdot N_a}{N^3}=0$，去分母得

$n_a(-N_a)(N-N_a)+N_a^{\,2}(n-n_a)=0$ ，移項得$N_a(n-n_a)=n_a(N-N_a)$，

移項得 $N-N_a=\dfrac{N_a\left(n-n_a\right)}{n_a}$，

最後得 $N=N_a+\dfrac{N_a\left(n-n_a\right)}{n_a}=\dfrac{N_a\cdot n_a+N_a\cdot n-N_a\cdot n_a}{n_a}=\dfrac{n}{n_a}\cdot N_a$。[18]

V.2 鮭魚數量模型

海洋中的生物數量通常是按其繁殖時間而產生週期變化的，以常見的鮭魚為例，其遷徙過程為鮭魚在淡水環境下出生，之後移到海水生長，又會回到淡水繁殖，如圖十五，特別的是鮭魚會回到自己的出生地裡進行繁殖，其成長過程為卵階段，此時的鮭魚卵相當大的部分會被成年的鮭魚吃掉，而剩下的卵還得經過環境的考驗，接著是幼魚階段，而後成熟為成年鮭魚，在每個繁殖期內描述鮭魚從卵、幼魚、成魚的演變過程，我們引進微分方程的概念，嵌入一個長期離散變化規律的方程，進而看出每個階段數量的變化。

圖十五

V.2.1 模型假設

用 x_n 表示第 n 個繁殖期(即週期)開始時成年鮭魚的數量，以條計數，則 $n=1,2,3,\ldots$ 用 $y(t)$ 表示在每個週期內的時刻 t 幼魚數量，為了將產卵過程和幼魚被環境淘汰的作用分離出來，不妨設 $n\langle t_a\le t\le t_b\langle n+1$，其中 $t_a=n+\varepsilon,t_b=n+1-\varepsilon$

，ε 為極小的數，在 $\left[n,t_a\right]$ 和 $\left[t_b,n+1\right]$ 允許鮭魚在數量上的變化，根據這些符號將鮭魚繁殖、成長和淘汰的假設敘述如下：

1. $y\left(t_a\right)$ 與 x_n 成正比，比例係數 α 相當於一條魚的產卵量。

[18] 蔡聰明(1994)，〈誤差論與最小平方法〉，《數學傳播》，(台北:中央研究院數學研究所)，21(3)，頁 9-10。

2.單位時間內 $y(t)$ 減少的比例與 x_n 成正比，比例係數 β 反映鮭魚吞食幼魚的情形。3. x_{n+1} 與 $y(t_b)$ 成正比，比例係數 γ 表示在繁殖期末幼魚存活長成鮭魚的比例。

V.2.1 模型建立

根據上述三個假設情形下，我們可以得到三個數學關係式。

1.令 $y(t_a)=\alpha x_n ---(1)$。

2. 令 $\dfrac{y'}{y}=-\beta x_n ---(2)$，其中 $n\langle t_a \le t \le t_b \langle n+1$。

3. 令 $x_{n+1}=\gamma y(t_b)---(3)$

由 2. 得 $\int_{t_a}^{t}\dfrac{1}{y(t)}dy=\int_{t_a}^{t}-\beta x_n dy$，同時積分得 $\ln y(t)\Big|_{t_a}^{t}=-\beta x_n\cdot y\Big|_{t_a}^{t}$，代入上下限得 $\ln y(t)-\ln y(t_a)=-\beta\cdot x_n(t-t_a)$，整理得 $\ln\dfrac{y(t)}{y(t_a)}=-\beta\cdot x_n(t-t_a)$，化簡得 $\dfrac{y(t)}{y(t_a)}=e^{-\beta x_n(t-t_a)}$，最後得 $y(t)=y(t_a)\cdot e^{-\beta x_n(t-t_a)}---(4)$。再將 $(1)(4)$ 式代入 (3) 得 $x_{n+1}=\gamma\alpha x_n e^{-\beta(t_b-t_a)x_n}, n=0,1,2,...$，若令 $a=\gamma\alpha, b=\beta(t_b-t_a)$，可得 $x_{n+1}=ax_n e^{-bx_n}, n=0,1,2,...$，此式即第 $n+1$ 個繁殖期開始時成年鮭魚的數量，我們可以根據第 n 個繁殖期開始時成年鮭魚的數量來推測 x_{n+1}，此數學模式就是遞迴(Recursion)概念。[19]這是生物數學中著名的伏爾泰拉方程式，是義大利數學家伏爾泰拉(V. Volterra, 1860-1940)為了描述亞得里亞海中食肉魚(鯊魚類)與被食魚數量變化而提出的數學模型，[20]他於 1931 年出版的《生存競爭中的數學原理》標誌著生物數學的誕生，直到 1974 年，聯合國教科文組織已將生物數學列為一門獨立學科。

VI. 結論

總之，海洋文化中的島嶼、生物形狀、數量等，都與數學息息相關，可見，人類數學

[19] 參考姜啟源(1996)，《數學模型》（新竹：凡異出版社），頁 471-473，書中的數學模式除此例外，還有一例，為漁船出海的數量與時機，以期求取最大經濟利益模型。

[20] 參考李文林(2005)，《數學的進化－東西數學史比較研究》（北京：科學出版社），頁 308-309。

的發展過程中也必須考慮海洋文化層面，從古至今皆關係密切。相傳秦始皇常攜帶算袋出門，一次出遊東海時，不小心把算袋失落水中，後來變成烏賊。正好唐代筆記小說《酉陽雜俎》中有一〈烏賊〉條稱：「昔秦王東遊棄算袋於海，化為此魚，形如算袋，兩袋極長。」[21]姑且不論傳說是否屬實，海洋文化與數學之間的連結是不言而喻的。

參考文獻

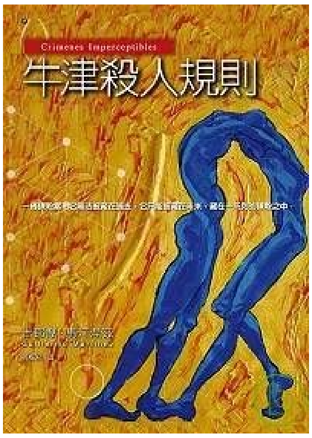
1. 楊瓊茹，〈GELOSIA METHOD—從阿拉伯出發〉，《HPM 通訊》4(12)。
2. 蔡聰明 (1994)，〈誤差論與最小平方法〉，《數學傳播》21(3): 3-13。
3. David Eugene Smith "The First Printed Arithmetic (Treviso, 1478)," *Isis* 6 (1924): 311-331, at p. 314.
4. 毛爾 (Eli Maor) 著、胡守仁譯 (2000)，《毛起來說三角》(*Trigonometric Delights*)，台北：天下遠見出版社。
5. 朱建正編撰 (1988)，《數學問題百則》，台北：中央研究院數學研究所。
6. 李文林 (2005)，《數學的進化－東西數學史比較研究》，北京：科學出版社。
7. 沈康身 (2002)，《歷史數學名題賞析》，上海：上海教育出版社。
8. 法蘭克‧斯懷茲 (Frank J. Swetz) 著、彭廣愷譯 (2007)，《數學遊記》(*The History of Mathematics: A Study Guide*)，台北：河中出版社。
9. 姜啟源 (1996)，《數學模型》，新竹：凡異出版社。
10. 紀志剛教授、汪曉勤、馬丁玲、鄭方磊等譯 (2008)，《計算之書》，北京：科學出版社。
11. 曹亮吉 (2004)，《從天文地理學數學》，台北：天下遠見出版社。
12. Anne, Rooney (2009). *The story of Mathematics: From creating the pyramids to exploring infinity*. London: Arcturus Publishing Limited.
13. Coreen L. Mett and James C. Smith (1985). *Calculus with application*. U.S.A.: McGraw-Hill, Inc.
14. Marcia, Ascher (2002). *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Culture*. New Jersey: Princeton University Press.
15. Swetz, Frank (1987). *Capitalism and arithmetic*. La Salle: Open Court .

[21]〔唐〕段成式，《酉陽雜俎》（台北：臺灣商務印書館，1965），頁 126。

書評--《牛津殺人規則》

蘇惠玉
西松高中

書名：牛津殺人規則 Crimenes Imperceptibles
作者：吉耶摩.馬汀涅茲 (Guillermo Martinez)，
譯者：孫梅君
出版社：大塊文化
出版年份：2007 年
出版資料：190 頁
ISBN：978-986-213-024-7



《牛津殺人規則》從書名應該很容易猜測出它是一本推理小說。作者馬汀涅茲於 1962 年出生在阿根廷，擁有數學科學博士學位，曾經在英國牛津做過短期研究，現任教於布宜諾斯艾利斯，本書是他最有名的作品，並改編成電影（電影名稱為 The Oxford Murders）。電影於 2008 年 1 月開始在西班牙上映，由伊利亞‧伍德 (Elijah Wood)主演。

本書以一位到牛津數學進修的阿根廷青年作第一人稱敘述。青年某天在家門口碰到一位備受尊敬的數學教授塞爾登，他宣稱收到一張紙條，上面寫著青年房東太太的地址、時間與「序列第一項」的字條，因而到此察看，二人發現房東太太被謀殺了。伴隨著寫有「序列第二項」與「序列第三項」字條的出現，也陸續發現了第二樁與第三樁謀殺案件。整本書的情節與結構與一般的推理小說無異，就是發生了謀殺案，想辦法找出兇手而已，情節相當簡單，然而序列與謀殺案之間有何關係？在刑事偵察的推理劇中，兇手留有字條通常暗示著會有一系列的案件發生，而警方則會請專家對字條進行嫌疑犯的心裡剖析，警方通常會急於知道序列的選擇與謀殺案被害者的選擇是否有關？要解決謀殺案是否要先知道序列的下一項才行？

隨著謀殺案件的發生與對序列的討論，作者的意圖慢慢的顯現出來。在書中出現的序列第一項為一個圓圈，是數字 0 還是字母 O 不曉得，所以作者藉由數學教授塞爾登開始說明「序列」的接續原則在數學上的意義。序列符號的解讀在第一項時會碰到一個問題：即是解讀的背景脈絡。因為只有一項，所以應該純粹以圖形的觀點來考量？還是放在語意的層面上考量？就好像單一件謀殺案發生時，刑事偵察要從哪方面考量犯罪動機一樣，是情殺？還是金錢糾紛？序列的不確定性，就好像系列謀殺案中被害者選擇的不確定一般。

然而當我們在作數列的教學或評量時，給了數列的第一項、第二項、第三項之後，總期望學生能夠依此瞭解這個數列的規則，並依照這樣的規則找出下一項。但是作者藉由一位自殘成植物人的邏輯數列編造者的例子，生動地讓讀者瞭解維特根斯坦的「有限規則的弔詭」，[1] 以及序列接續的不確定性。例如數列「2, 4, 8」下一項應該是什麼？大多數人會回答 16，但是實際上也可以是其他的答案，只是由複雜許多的規則所造成，我們總能找到

一個規則、一個解釋讓你能用任何數當成此數列的第四項。因此序列的接續幾乎是不可能的，答對下一項也只是因為你的答案剛好就是出題者所設想的答案而已。

隨著序列第二項（二條直立短括弧構成的魚形，如 ⬭ ）、第三項（三角形）陸續的出現，這個序列所在的背景脈絡似乎慢慢清楚了。原來謀殺犯利用了畢達哥拉斯學派所用的符號來當序列：

> 圓圈是「一」，在完美之中的統一，...，一切事物的開始，涵容、完備於自身的界線中。「二」是倍增的象徵，是一切對立與二元的符號，帶入了存有。它是由兩個圓交錯而成，夾在中央狀似杏仁的橢圓形...。「三」，三合(triad)，是兩個極端的結合，是為歧異帶來秩序與和諧的可能性。它是將凡俗與不朽擁抱在單一整體中。
>
> ...「一」是點，「二」是連接兩點的直線，「三」則是三角，同時也是平面。

任何人只要瞭解犯人所使用的序列脈絡，自然就可猜到下一項應該是代表「四」的符號「四元體 」，這個符號是畢氏學派的徽記，那十個點即是一加二加三加四的和，代表物質與四大元素。然而知道序列的下一項之後，對知道何人為兇手並沒有幫助。作者在此安排了一個戲劇化的轉折，同時點出了本書結構上的一個重點—不完備定理。

當系列謀殺案的情節公布之後，誰會接續下去犯下一樁類似的案件？可能是原犯，也可能只是模仿犯而已，因此，也會有無法捉到原系列謀殺案犯人的情況發生。在此書中，有另一人瞭解這個序列接續的原則，將此序列伴隨發生的謀殺案當成是上天給的徵兆，允許他接續下去犯下一樁死了十人的謀殺案，警方以為結案了，然而，原本的犯人卻也消失在人海中。刑事的偵察如同數學的證明一樣，有些數學命題偏偏無法在同一個系統裡，證明其真偽。

本書的作者同樣察覺到數學證明與刑事偵察的類似，因此，他以探長辦案來暗喻一般數學真理的證明。「真理與真理中能被證明的部分有所不同」，所以，在蒐集了許多實質與間接的證據之後，有時候還是沒有足夠的證據來證明某個嫌犯有罪。如同哥爾德的不完備性定理所揭示的，數學中也會發生這樣的情況。他還以我們求圓面積常使用的內切多邊形的逼近方法來隱喻對真相、真理的追求：

> 他把真相比擬為圓周，而人類企圖用一系列的內切多邊形來逼近它，邊的數目越多，就會越趨近於圓。這是個樂觀的隱喻，因為這些連續的階段能讓人感知道最後的圖形。

然而，真相如果像一個不規則的圖形，周邊有許多尖角和缺口，當我們試圖以多邊形的方式去逼近這個圖形時，每一次的新嘗試都會斷裂成更多的尖角和缺口，就是無法獲得一個最終的圖形。作者又再一次的連結到哥爾德的不完備性定理與刑事偵察上。

在本書中作者還藉由數學「時事」增加一點懸疑性。他讓安德魯・懷爾斯對費瑪最後定理證明的那一天，成為謀殺案可能發生的時間點，也以讓懷爾斯成為可能的受害者，來增加環繞著畢氏學派的神秘性氛圍。不過，由於此書在 2003 年出版，稍有數學背景的人都知道懷爾斯成功證明了費瑪最後定理，因此，作者想增加的懸疑性並沒有產生什麼作用。另外，本書中以阿根廷青年為第一人稱，此青年在書中沒有名字出現，我覺得作者似乎想要以此青年在書中旁觀者的角色，來比喻成在浩瀚的數學證明過程中，各個數學家的角色一般，對數學真理所包含的知識內容沒什麼可置喙的，不過是個參與推理的旁觀者而已。

馬丁涅茲在此書中設計了一個簡短的推理小說情節，來闡述數學上的不完備性定理。藉由序列的不確定，連結到謀殺案中被害者與加害者的不定；藉由無法定罪真正犯人的情況，來比喻數學上的不完備定理。當讀者有數學概念的背景知識，這一本小說當然不會「與數學無關」；[2] 然而，不瞭解數學的人，在看了這樣一本有趣的推理小說之後，也多少了解了一點數學知識與某些數學概念，這一點就一本數學普及讀物而言，也已經成功達到目的了。

註解

1. 維根斯坦曾舉出關於遵行規則之有名困局：「這就是我們的弔詭：沒有任何行動是由一規則所決定，因為每一行動都可當成是（can be made out to）遵循該規則。回答是：如果每一行動都可當成是遵循某規則，那麼這些行動亦能被當成是違反該規則。這麼一來，既無遵循亦無違反規則可言。」參考何志青 (2009)，〈推論證成與遵循規則〉，載《哲學論評》（台灣大學）第三十八期。
2. 這本書在網路上的書評，有許多篇加上了「與數學無關」的字眼。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
英國劍橋：英家銘（李約瑟研究所）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）葉吉海（陽明高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤（新竹高中）、陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士勳、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
台南縣：李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）