HPM通訊

第十三卷 第一期 目錄（2010年元月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

小說家如何介入數學普及著述：以小川洋子的《博士熱愛的算式》為例

洪萬生
台灣師範大學數學系

「e的π和i之積的次方再加上1，就變成了 0。
我重新看著博士的紙條。永無止境地循環下去的數字，和讓人難以捉摸的虛數畫出簡潔的軌跡，在某一點落地。雖然沒有圓的出現，但來自宇宙的π飄然地來到e的身旁，和害羞的i握著手。他們的身體緊緊地靠在一起，屏住呼吸，但有人加了 1 之後，世界就毫無預警地發生了巨大變化。一切都歸於 0。」

以上出自小川洋子 (Yoko Ogewa) 的《博士熱愛的算式》（博士の愛した数式）頁 167-168。這是筆者第一次發現有人在歐拉公式 (Euler Formula) $e^{i\pi}+1=0$上發揮如此令人嘆為觀止的想像力。這個公式贏得很多數學家的青睞，的確有其獨到之處，以其形式簡潔，意義深遠故也。事實上，它將數學上最重要的五個數目 1, 0, $i(=\sqrt{-1})$，π和e連結在一起。這些數學概念的本質之掌握，至少需要高等微積分的素養。同時，有鑑於高等微積分總是被當作數學家的門檻，無怪乎數學家社群推選$e^{i\pi}+1=0$為數學史上的最漂亮公式了。

筆者有幸閱讀本書，真是多虧了蘇惠玉老師的〈溫柔與感傷的數學真理—閱讀《博士熱愛的算式》〉(2006)，以及單維彰教授的〈記憶著愛情的數學等式〉(2008)。蘇惠玉針對本書的內容，作了極精彩的摘要，值得引述如下：

「我的記憶容量只有八十分鐘」。

《博士熱愛的算式》是一本小說，主角是一位曾在大學裡教數論的博士，在 1975 年時因車禍影響，腦袋對記憶的容量像一只錄影帶一樣，只能容納八十分鐘，之後像錄影帶重新錄製一般，之前的記憶全部不見，他的記憶只存在 1975 年之前，每一天來照顧他生活起居的管家，不管工作了多久，對他而言，都是一個陌生人，博士只能

用他自己的方式面對每天開門時的尷尬：「你穿幾號鞋子？」「24 號」「多純潔的數字，是 4 的連乘（階乘）」;「你家的電話號碼？」「5761455 嗎？真了不起。這是一億以下的質數總數」數字的中性不具個人色彩，順利地幫博士保護了自己與隔離他人。

由於數學真理的不朽，所以能夠超越人類有限的記憶而存在，這就成了博士與別人獨特的溝通方式，藉由數學，博士和管家與她十歲的兒子建立了強烈的羈絆。博士稱管家的兒子「根號√」，因為他的頭頂平平的，很像根號，他說：「你是根號，這是一個面對任何數字，都不會有絲毫為難之色，以寬大的胸懷加以包容的符號，是根號。」因為管家的生日是 2 月 20 日(220)，博士腕錶的編號是 284，他跟管家解釋了何謂「友誼數」，並說：「這是一對友誼數，是很難得的組合喔。不管是費瑪還是迪卡爾，都只有找到一組而已，是在上天安排下結合的數字，你不覺得很美嗎？你的生日和刻在我手腕上的數字竟然有如此奇妙的關連。」

正因為「書裡介紹了許多數論的知識，除了友誼數之外，博士所解釋的合成數、質數、等差級數求合，透過書中第一人稱管家的感受，對比於博士記憶的有限，更能讓人體會數學的美與純粹，同時卻也帶著一絲淡淡的哀愁」，所以，惠玉才會指出：「雖然這是一本小說，也可以看成是一本數學的科普書」。針對這一點，單維彰也發現：小川洋子

寫在小說情節裡的數學，明顯深過前一陣子我們讀過的歐美作者，她寫了『真正的』數學。相較之下，那些西方作者在小說裡經常只有觸及數學的想像，或者只是影射或引用為談話的數學元素而已。或許小川本人的數學素養超過那些西方作者；也許，和台灣類似的強迫而深入的日本數學教育，在這位文科大學畢業生的身上留下了良好的根基，在她年近四十歲的時候開花結果，寫成這部當時被認為可以作為生涯代表作的這本小說。

因此，

閱讀這部小說是一個美好的經驗。跟西方小說在風格或氛圍上不同的是，這個小小的故事沒有強烈或激動的情節，不講究複雜而翔實的歷史或地理或科學的背景，或許是一種日本風味吧。

事實上，蘇惠玉也針對這一部「數學小說」(mathematical fiction) 的風格，提出了如下的評論：

我很少看到一本小說容納這麼多數學元素，卻不顯得突兀的，作者自言她想要「呈現數字的永恆和人類有限的對比」，這一點，作者藉著創造博士這個人物，很巧妙的做到了。一個記憶只有八十分鐘的老人家，人類的一切技能，甚至是對摯愛友人的記憶都沒辦法保存時，卻能夠靠永恆的數學真理將感情緊緊聯繫。本書中同時利用第一人稱管家的感受，讓我們經歷一段奇妙的數學學習之旅，讓我們用不同的角度與更柔軟的心態來看待數學。這本書我不想將她定位為書背書評中所寫的「記憶與愛情之間關係的一個寓言」，而是人類與數學之間的相處所綻放的光芒，因為短暫，所以珍貴。

顯然，小說家小川洋子在人物的塑造和情節的安排上，都充分地照顧了數學知識－尤其是數論相關的材料－之特性。由於她的手法高超，數學與文學契合無間，因此，小說結構渾

然天成，足以印證小川洋子令人豔羨的書寫才華。

現在，且讓我們再考察一個情節之安排，說明數學概念如何可以融入人物與事件，而成為小說書寫的基本素材。例如說吧，博士問管家 1 加到 10 如何運算？一般的作法是 (1＋10)=11，11×5=55。管家花很多天來思考。兒子告訴她，學校裡上體育課時，老師整隊時喊出：「各排，向中間靠攏」。管家想到了「中間」的概念：

> 我把 10 寫在角落，將 1 到 9 寫成一排，並在 5 上畫了圈。
> 毫無疑問，5 成為這九個數字的中心。前面有四個數字，後面也有四個數字追隨著。5 昂首挺胸，自豪地向空中伸出雙手，似乎在向世人宣告，自己才是正確的目標。(頁 72-73)

管家把 10 拿掉 — 跟別的數字不一樣的兩位數 — 然後求取中間值（算術平均數），最後再把 10 加進來。她對待自己的人生亦復如此，差異與極端的部分且擱置一旁，先求取中間值：「向中間靠攏」。她不強調也不抱怨單親身份，而是訴諸於普遍性的母愛。

小川洋子是日本文壇的知名職業作家，她準備書寫本書時，大概發現數學知識（尤其是數論方面）是文學家值得而且應該取材的面向。本書的成功，乃是由於數學知識的認知意義，非常巧妙地融入故事情節之中。因此，本書意外地擁有了數學普及的功能。這或許是具有普及知識關懷的數學家與數學教師喜愛本書的原因之一。

平心而論，小說的基本功能除了娛樂功能與獲得資訊之外，最重要的價值，乃在於引領讀者思考人生、社會與世界之相關議題；而這些思考的激發，並不是因為作者解說 vs. 讀者閱讀 — 如此一來，小說就成為論說文或是勵志讀物。事實上，小說利用人物、情節、意象和隱喻等方式，啟發讀者自己去思考，因而思維具有了更豐富與更深刻的內涵。

數學小說的特色既然以數學或是數學家為主題，優秀的作品應該是啟發讀者透過數學的隱喻來沈思人生，而不是透過小說來學習數學。我們不否認數學小說具有普及數學知識的功能，在大學裡與數學相關的通識教育課程，也很適合採用數學小說作為教材或參考讀物。然而，數學小說與其他小說一樣，本質是以文學（不論是純文學或是通俗文學）本身目的而訴求。以數學家為主角，這本小說為我們指出：數學與美、與上帝、人生創傷記憶的逃避與療癒、謎題的追尋與解答、個人史與家族史的詮釋等等，都息息相關。數學家或數學教師極易理解小說中的數學，但是，數學作為「隱喻」(metaphor) 而不只是「事實」(fact)，這方面閱讀所需的想像力與作者的寫作功力有關，也與社會整體理解隱喻的文化素養有關。

我們希望經由更多數學小說的出版與翻譯，可以引發中小學師生與社會大眾對數學的興趣，從而減少他（她）們的恐懼感，同時，也幫助他（她）們更能欣賞文學敘事以數學作為隱喻，所營造出來的抒情之美與秩序之美。

參考文獻

小川洋子 (Yoko Ogawa)(2003).《博士の愛した数式》。東京：新潮社。

小川洋子 (Yoko Ogawa). (2004)《博士熱愛的算式》（王蘊潔翻譯）。台北：麥田出版社。

林芳玫、洪萬生 (2009).〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉，《科學教育學刊》17(6): 533-551。

洪萬生、林芳玫 (2009).〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉(與林芳玫合撰)，《HPM 通訊》12(11): 1-11。
洪萬生 (2009).〈《博士熱愛的算式》「問題討論」11 則〉，《HPM 通訊》12(11): 12-13。
單維彰 (2008).〈記憶著愛情的數學等式〉，載台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (http://museum.math.ntnu.edu.tw)。
謝佳叡 (2000).〈最美的數學式〉，《HPM 通訊》3(4): 6-11。
蘇惠玉 (2006).〈溫柔與感傷的數學真理－閱讀《博士熱愛的算式》〉，《HPM 通訊》9(6): 19-20。
Lin, Fang-Mei & Wann-Sheng Horng (2009). "Review of Yoko Ogawa's The Housekeeper and the Professor" (coauthored with Fang-Mei Lin, the first author), *Mathematical Intelligencer* online 31 October, 2009.
Ogawa, Yoko (2009). *The Housekeeper and the Professor* (Trans. By Stephen Snyder). New York: Picardo.
數學小說網站 (Mathematical Fiction website)：http://www.cofc.edu/~kasmana/MATHFICT/

十九世紀韓國數學普及的推手－南秉吉

英家銘
台灣師範大學數學系博士候選人、
英國劍橋李約瑟研究所訪問研究員

緒論

長期以來，國際學界將韓國傳統的科學與數學，看成中國科技的一個小分支。因此，並沒有足夠多的研究，來告訴我們韓國古代科學發展的軌跡，或者是科學家與其所屬社會脈絡的互動。近年有越來越多的研究者進入韓國科學史的領域，一方面是由於韓國的經濟實力起飛，另一方面，則是包含台灣在內的國際學界逐漸瞭解到，韓國的科學與數學發展，有其獨特的面相值得史學家來研究。例如，韓國朝鮮王朝 (1392 - 1910) 獨有的「中人」技術官僚階級，在保存與發展科學知識上，有何不同於中國士大夫與歐洲貴族的地方？為什麼朝鮮貴族「兩班」階級的部分儒士，在優渥的生活與似錦的官運這些背景之下，仍願意研究過去一度被視為「九九賤技」的算學？抑或是，在朝鮮王朝中後期，算學家如何透過中國所翻譯或編纂的西方數學著作，來學習西學，並將之與基於籌算的傳統韓國數學融合？當然，這篇短文，不可能回答這些問題。不過，筆者或許可以用三千字的篇幅，簡要敘述筆者所研究的韓國數學家南秉吉 (Nam Pyŏng-Gil, 1820-1869)，內容主要聚焦於他的生平、社會背景、算學交遊，以及從他的著作中所看出的一些蛛絲馬跡，說明他對普及數學的努力。

南秉吉所處之社會背景及其生平簡述

南秉吉出身朝鮮貴族兩班世家宜寧南氏，歷代家族有多位成員任三品以上「顯職」。南秉吉的十八世祖南在是朝鮮王朝初期的領議政（正一品）。[1]南在的胞弟南誾更是在 1392 年擁立李成桂建立朝鮮王朝的開國功臣之一。[2]由此可見宜寧南氏在朝鮮貴族中的地位。南秉吉的兄長南秉哲 (1817 - 1863) 曾任吏曹判書兼大提學。[3]南秉吉本身的仕途亦尚稱順遂，以下為《朝鮮王朝實錄》中所記載，南秉吉的從政歷程：

1848 年　增廣別試文科乙科及第[4]
1850 年　增廣文科殿試丙科及第
1856 年　成均館大司成（正三品）
1857 年　黃海道觀察使（從二品）
1860 年　觀象監提調嘉義大夫前吏曹參判同知成均館事（從二品）

---

1 《增補文獻備考》〈帝系考〉，頁 6。
2 蔡茂松，《韓國近世思想文化史》（台北市：東大圖書公司，1995），頁 22。
3 洪萬生，〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉，《科學教育學刊》8 期（2000），頁 216；張復凱，《從南秉吉 (1820-1869) 《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之「對話」》，（國立台灣師範大學數學系碩士論文，2005），頁 11。
4 關於本文提到之朝鮮王朝時期的科舉制度與官制，因篇幅限制不做詳述。請參考蔡茂松，1995，頁 195-236。

1861 年　形曹判書（正二品）

1862 年　議政府左參贊（正二品）

1863 年　水原留守（正二品）[5]

1865 年　漢城府判尹（正二品）（兼）藝文館提學（從二品）[6]

1869 年　吏曹判書（正二品）、漢城府判尹（正二品）[7]

由上所列，可以看到南秉吉一生歷任許多重要的官職，與其算學研究相關的經歷，會在後文敘及。這裡筆者先簡單地討論一個問題，就是在出身世家貴族且官運亨通的南秉吉，何以對算學研究有興趣？這個問題還沒有確定的答案，筆者只能在下面提供一些社會背景與他的一段文字，來討論此問題。

南秉吉所處的朝鮮王朝後期，其實已經歷過超過一個世紀「實學」思潮的洗禮。所謂「實學」，朝鮮王朝時期各思想家的說法不同，但主要可視為經世治國與利用厚生之學。1592 年豐臣秀吉侵韓（壬辰倭亂）與 1635 年清帝皇太極征朝（丙子胡亂）之後，朝鮮傳統社會的秩序崩解，而知識份子希望改革土地制度、生產技術與商品流通的社會層面，實學運動因而興起。此外，清帝國在東亞站穩腳步後，建立了康雍乾時代高度的物質文明，朝鮮知識份子，也希望拋棄「崇明排清」的包袱，向清帝國學習最新的科學技術以改善人民生活。因此，這段「經世致用」、「利用厚生」的實學運動，從十八世紀前半，一路延燒到十九世紀，數學家黃胤錫 (1729 – 1791) 與洪大容 (1731 – 1783) 也名列實學派思想家。[8]

南秉吉並不被認為是實學派思想家，不過，從他為南秉哲著《海鏡細草解》(1861) 所寫的序文之中，或許也可以看出一點實學思想的端倪：

> （前略）六合之內，目之所覩，耳之所聞，手之所作，心之所思，莫不有自然之數，而天下國家經濟之術係焉。虞書在璇璣玉衡，以齊七政王制，以三十年之通制，國用量入以為出者，皆是物也。數源於九九，而至於勾股則大無不包矣。法始於加減乘除，而至於天元一則廣無不通矣。（中略）夫數也者，無內無外，莫載莫破，大而天地經緯，小則米鹽凌雜，惟變所適利用。無窮先儒以為，信之於五性，猷土之餘五行，余謂數之於六藝亦然。蓋格致之實學，家國之實用，經世者之所首務。故周官有取士，孔門稱通藝，在昔諸儒，未有不遊於斯也！ (後略)[9]

由此可見，南秉吉認為，治理國家所需的「經濟之術」與「格致之實學」，都奠基於「數」。這或許可以說明，南秉吉在實學思潮的影響下，以研究算學做為格物致知與經世濟民的首

[5] 以上《朝鮮王朝實錄》內容，皆轉引自張復凱，2005，頁 11-12。

[6] http://sillok.history.go.kr/ 〈高宗實錄〉二年二月二十六日壬辰條、二年三月二十六日辛酉條。

[7] http://sillok.history.go.kr/ 〈高宗實錄〉六年一月十四日丙戌條、六年五月二日癸酉條。

[8] 筆者這段對實學的描述，過於簡化，未必能讓讀者理解實學運動的背景。關於實學發展詳細的過程，有興趣的讀者請參閱蔡茂松，1995，頁 419-508；金容雲、金容局，《韓国数學史》（東京：槙書店，1978），頁 219-228；以及 Lee, Ki-baik, *A New History of Korea* (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1984), pp. 232-242。

要工作，而且他認為所有知識份子都該學習。也因此在他二十年仕途過程中，南秉吉不斷地在算學上進行研究與普及的工作。

南秉吉的算學著作與其算學交遊

南秉吉不僅算學著作豐富（見後文），在天文學方面也有數部著述。[10]主要是他於 1860 – 1861 年任職「觀象監提調」（國立天文台長）時所寫下的。[11]在此筆者只略論他的算學著作。他在這方面的著述有七部，分別為《玉鑑細艸詳解》(18??)、《緝古演段》(1854)、[12]《無異解》(1855)、《測量圖解》(1858)、《九章術解》(1864?)、《勾股述要圖解》(186?)、[13]《算學正義》(1867)等。[14]這七部著作內容，不僅涵蓋許多中國古算的重要內容，例如大部分的《九章算術》與以籌算為基礎的代數方法「天元術」，尚且包括大部分當時韓國人已知，經中國傳入的「西方」數學，例如實用歐氏幾何與測量、以筆算為基礎的算術、代數方法「借根方」等。

這些著作，除了他自己獨力完成的之外，也有與其他人合作完成的作品。例如《算學正義》，在作者署名的地方，是「宜寧南秉吉編撰、陜川李尚爀校正」，可見這是他與李尚爀合作的著述。李尚爀 (1810 - ?) 是出身中人階級的算學家。南秉吉兄弟與李尚爀三人，會互相為其他二人的書寫序，並且討論算書中的內容。也有研究認為，他們三人可看成一個團隊，彼此的算學知識並無差異或高下之分。[15]南氏兄弟結識李尚爀，可能是在南秉吉任職觀象監提調的時候，這個時期南秉吉結識了許多任職此地的中人算學家。[16]此外，尚有其他算學家或天文學家曾與南秉吉討論天文曆法與算學，並有證據留在南氏或其他算學書中的序言，這些人包括任職觀象監臺官的李俊養，以及朝鮮王朝後期算家趙羲純。[17]

南秉吉對普及算學所做的努力

瀏覽南秉吉所著算書，七部中有五部主要是為來自中國的算書做注解。筆者揣測，原因也是來自於實學派思想家希望學習清帝國最新的科技與物質文明，而科技背後的數學方法則是必須瞭解的基礎。南秉吉於是為了要讓朝鮮知識份子（包含任職觀象監的兩班天文官與中人算學家）容易理解中國古代與當代的算書，因此寫下許多注解與細草。以《無異解》為例，這是在討論中國古算中以籌算解高次方程式的「天元術」，以及在清帝國的「數

---

9 金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 – 數學篇》（首爾：驪江出版社，1985），第五卷，頁 3-5。

10 洪萬生，2000，頁 216。

11 俞景老主編，《韓國科學技術史資料大系 – 天文篇》（首爾：驪江出版社，1986），第六卷，頁 4；第十卷，頁 1。

12 《緝古演段》成書時間的討論，可參閱張復凱，2005，頁 12-13。

13 《勾股述要圖解》序文中看不出此書為何時出版，但在其中有提到「李君志叟曾見某家有勾股述要，故介紹得見…時適無暇…置諸匣中亦數年矣。邇來余善病…搜出玩繹」等語句，代表此書可能是南秉吉晚年作品；此外根據首爾大學圖書館的紀錄，此書出版於朝鮮王朝高宗年間 (1863 - 1907)，而南秉吉死於 1869 年，故我們可以猜測此書寫成於 1863 到 1869 年之間。

14 其餘各文本成書時間請參閱金容雲、金容局，1978，頁 268-272。

15 例如張復凱，2005。

16 Horng, Wann-Sheng, "Sino-Korean transmission of mathematical texts in the 19th century: A case study of Nam Pyong-gil's *Kugo Sulyo Tohae*", *Historia Scientiarum* 2002 no.12, 88-89.

17 金容雲主編，1985，第六卷，頁 250、第八卷，頁 4；俞景老主編，1986，第六卷，頁 7、490。

學百科全書」《數理精蘊》(1723) 所介紹的簡字代數「借根方」，兩者之間的異同。中國「天元術」在宋元時發展，但到明代已無人能懂。然而，朝鮮王朝五百年來的數學家，卻將之良好地保存下來，用於曆法與測量計算。十八世紀之後的韓國算家也學會了《數理精蘊》中的「借根方」。等到乾嘉學派學者所校勘的中國古算書籍再度傳入朝鮮之後，南秉吉寫下了《無異解》，試圖從算理的角度出發，協助其他需要使用「代數」的學者理解兩種方法並無二致。[18]

另外有證據顯示，為了推廣算學研究，南秉吉極可能用自己的財力將其他算學著作「印而布之」，希望讓它們廣為流傳。他在《劉氏勾股述要圖解》的序言中說道：「我東素乏文獻，至於數學尤不可知」，所以當他看到一部《劉氏勾股述要》的時候，他就附上圖解並「付之活印」，因為劉氏的「人雖不傳，書不可不傳」。[19]其他經由南氏「助印」的數學文本，還包括李尚爀的《算術管見》(1855) 與《翼算》(1868)，洪正夏 (1684 - ?) 的《九一集》(ca. 1714)，以及趙羲純的《算學拾遺》 (19 世紀中葉) 等等。[20]

結語

南秉吉受實學思潮影響，認為知識份子應該學習算學，做為經世致用之本。雖然沒有證據告訴我們他從很年輕的時候開始學習算學，不過，他在而立之年，就開始出版算學著作，注解並討論中國古代算學與傳入中國的西方數學。此外，他還刊印許多自己與他人的算學著作。這些舉動，都告訴我們，他是一位熱心於研究並傳遞算學知識，希望普及數學的推手。十九世紀中葉的朝鮮，所面臨的內憂外患，比起清帝國是有過之而無不及。南秉吉在這樣的時代，仍希望從算學入手，逐步提升朝鮮的國力。他也可算是值得我們當代知識份子效法的對象之一吧！

[18] 關於此書的詳細討論，讀者可參考洪萬生，2000。
[19] 金容雲主編，1985，第六卷，頁 4。
[20] 金容雲主編，1985，第八卷，頁 4。

賞析古典數學：《九章算術》之「開方術」

胡政德
台灣師範大數學系博士班

我想很多人會問我，賞析古典數學有何樂趣呢？有什麼好處？為什麼會想要賞析數學？先回答最後一個問題，這個答案很簡單，也很主觀，因為，大多數的人不會欣賞數學，如同我不會欣賞美麗的畫作一樣，畫作看起來都很漂亮阿！但如果有人可以帶體驗、瞭解其意義，不知有多好！所以，我想藉由欣賞這些古典數學，讓一般大眾也可以來接觸數學。

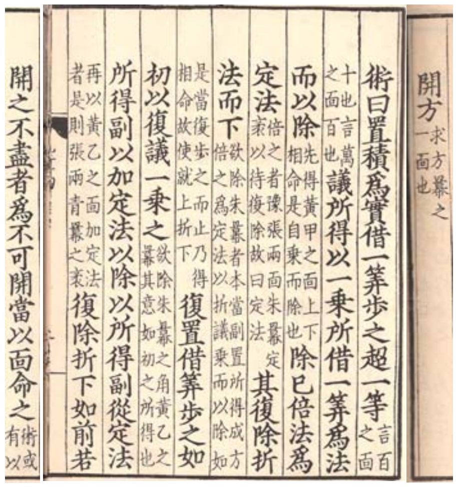
數學與繪畫同樣都是人類的文化產物，我們可以從欣賞、瞭解甚至評估人們所創造的文化，以提昇自己的文化素養。而賞析數學與其他藝術最大的不同，在於數學結構本質之美，它可以用不同的具體形式來呈現與操作，但卻都不會失去或打破其關係，讓人們常有「啊哈」(Aha)！感覺，這就是欣賞數學最獨特的樂趣！

在這裡要介紹《九章算術》中的「開方術」，中國古代人們如何開平方與開立方。「開方術」這個章節其實非常的不簡單，在《九章算術》中講解「開方術」就佔了一整個頁面，其中劉徽與李淳風的註解佔了大部分，單以文字來敘述數學算法真的很繁雜，而「開立方」可想而知，更是繁雜。如果只介紹古文翻譯與解釋那就太無聊了，也無法達到賞析數學的目的。因此，以下我們就以不同的表徵形式來賞析古代的開方吧！

開方術

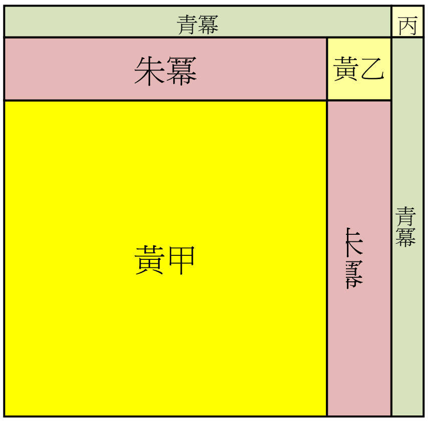
「開方」這個數學主題屬於中學數學，現行數學九年一貫課程將它規劃在八年級數與量的主題（能力指標：8-n-02 了能求二次方根的近似值）。雖然中學數學已經不再強調使用公式來開平方，但我們不妨來欣賞古代人開平方的過程。也許你也學過直式開方法，那正好可以比較一下與古法相同或相異處。

首先，大家可以先看一下古文開方術的敘述 (參考右圖為善本文字)，其中較大的文字為九章算術古文，小字為古人劉徽或李淳風的註解說明。以下我們可以參考郭書春的現代譯文，楷體文字為古文翻譯，正體部分為註解翻譯，括弧內為作者註解：


開方求方冪之一面也
術曰置積為實借一筭步之超一等言百之面十也言萬之面百也議所得以一乘所借一筭為法而以除先得黃甲之面上下相命是自乘而除也除已倍法為定法倍之者豫張兩面朱冪定袤以待復除故曰定法其復除折法而下欲除朱冪者本當副置所得成方倍之為定法以折議乘而以除如是當復步之而止乃得相命故使就上折下復置借筭步之如初以復議一乘之欲除朱冪之角黃乙之冪其意如初之所得也所得副以加定法以除以所得副從定法再以黃乙之面加定法者是則張兩青冪之袤復除折下如前若開之不盡者為不可開當以面命之術或有以

開方這是求方冪(正方形)的一邊長。術：布置面積為實。借一算，將它向左移動，每隔一步移一位。這意味著百位術的邊長為十位數，萬位數的邊長是百位數。商議所得的數，用它的一次方乘所借一算，作為法，而用來做除法。這是先得出黃甲(參考下圖)的一邊長。上下相乘，這相當於邊長自乘而減實。作完除法，將法加倍，作為定法。將法加倍，是為了預先展開兩個朱冪已經確定的長，以便作為第二次除法，所以叫定法。若要作第二次除法，應當所縮小法，因此將它退位。如果要減去朱冪，本來應當在冪邊布置所得到的已確定的正方形的邊長，將它加倍，作為定法，通過縮小、商議、乘等運算，而用來作除法。如果這樣，應當重新自右向左移動，到無法移動時而停止，才能相乘。這樣太瑣碎，所以使它就上面縮小而將它退位。再布置所借一算，向左移動，像開始作的那樣。用第二次商議得的數的一次

方乘所借一算，這是想減去位於兩朱冪形成的角隅處的黃乙之冪。它的意思如同第一步的得數所做的那樣。將第二位得數在旁邊加入定法，用來作除法。將第二位得數在幫邊併入定法。再用黃乙的邊長加入定法，是為了展開兩青冪的長。如果再作除法，就像前面那樣縮小退位。如果是開方不盡，稱為不可開方，應當用面命名一個數。



光看古文大家一定不懂在說什麼，我們馬上使用一個數字 (625) 實例來說明：

(商)議 □ 實　6 , 25 除 法	(商)議 $\boxed{2}$ 實　6 , 25 除　4 法　$\boxed{2}$	(商)議　2 實　225 除 法　4(定法)
將 625(積)放在實，借一個□(算)放在議，然後以兩個位數為一個處理步驟。 所以 625 分成 6 與 25 兩個步驟。	討論(商議)□為多少，以 1 倍的□為法所以除為$□^2$ (法×商)。因此，這個例子中□=2，(如果□是 3 則 9>6，就不行了)。因此，除是為 4。	將 6－4 (實減除，即是，除以)。然後以 2×2 為定法(被法為定法)。然後 6－4 所剩下的 2 與 25 合併起來(其復除，折法而下)

(商)議　2$\boxed{5}$ 實　225 除 法　4$\boxed{5}$	(商)議　2 5 實　225 除 法　45(定法)	補充說明： 開方過程主要包含六個步驟一直從復執行：
再借一個□放於 2 的後面(復置借算)，步驟和一開始一樣。然後討論□為多少，以 4□為法(1 倍的□加定法)。所以 4□×□≦225 可以估計□為 5 (45×5=225)。然後得到除為 225。	然後在將 5 放在 4 後面組成一個數字為定法。然後將 225(實)－225(除)，後面還有數字就將其放下來(折下如前)。如果數字開方不盡則用面之，譬如，10 之面($\sqrt{10}$)。	借算步之：決定計算位數 議：先估計商為若干。 法：依據規則算出法。 除以：將法與商相乘為除然後將實減除。 定法：依規則計算定法，已作為下次計算的預備。 折：將餘數並於下個步驟。

讀完古代人的開方術，就像看了一個新的公式一樣，我們怎麼知道它是對的呢？劉徽與李淳風的註解，就給了這個計算過程一個圖形的說明 (詳細的翻譯可以參考郭書春的《九章算術譯注》，以下我們就來看看關於這個圖解：

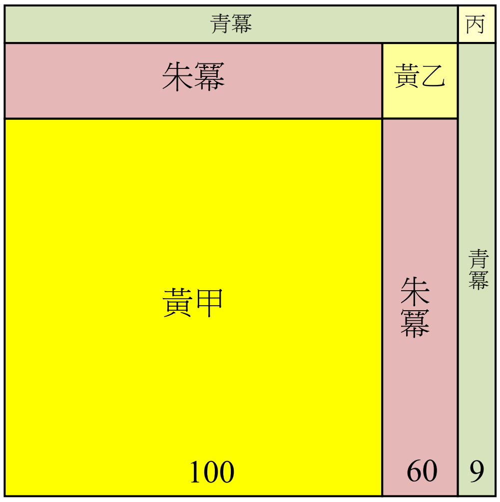
如果數字是 1 則平方為 1；

如果數字是 20 則平方為 400；

如果數字是 300 則平方為 9000；

如果數字是 4000 則平方為 2500000；

如果假設一個數字，將其開方之後得到三位數，譬如：28561 為 169 的平方，我們可以將 169 寫成 100+60+9，參考右圖。而 28561 會大於 100^2(10000)，小於 200^2 (40000)，因此，可以推得百位數字為 1。又另外一個例子，625，其介於 20^2(400)與 30^2(900)之間。因此，古人以兩個位數為一個處理步驟，從最大的數字開始估計，慢慢的往下估計。那麼我們一定會疑惑，當我們估計最高位數（圖形意義為整個正方形扣掉其中一個正方形(黃甲)後），那怎麼繼續估計下一位數呢（圖形已經不在事一個正方形了）？這個答案其實很簡單，大家可以參考圖，想一想！



接下來再繼續看古人的說明，這裡要繼續估計下一個位數的數字(黃乙的邊長)。古人將一個正方形，看成黃甲、黃乙及兩個朱冪，黃乙與兩個朱冪的和必須小於剛剛扣掉(除以)黃甲的面積，以實際數據為例，假如黃以邊長為 x，則$(200+x)x$ 要小於 18561，可以估計 $x=6$。

所以古文中，「定法」也就是兩個朱冪的長的和 (1+1=2)，然後併黃乙的邊長，可以得到一個數字 (26)，其實可以看做將左邊朱冪向上轉 90 度，以形成一個長方形，以長方形的邊長乘以黃乙的邊長則會整個面積。

因此，可以一直重複計算估計下去，可以趨近其開方數。

以上以古人的解釋說明為主，距離現代使用的數學符號還有點距離，以下我們就使用現代的數學語言來詮釋古人的作法：

開平方其實就是 $x^2=N$，求正數 x=?(i.e. $x=\sqrt{N}$)

$x=a_n10^n+...+a_1 10^1+a_0=a_n a_{n-1}...a_0$ (ex:169=1×10^2+6×10+9)。因此，我們想要估計 x 的多項式係數(a_i)。以下我們為方便設 $a=a_n\times10^n, b=a_{n-1}\times10^{n-1}, c=a_{n-2}\times10^{n-2}...$

$(a)^2=a^2 \ldots\ldots (I)$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b \ldots\ldots (II)$

$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=(a+b)^2+[2(a+b)c+c]c...(III)$

...

我們便可以依據(1)估計出 $a(=a_n\times10^n)$，使得$(a_n-1)^2\times10^{2n}<N\leqq(a_n)^2\times10^{2n}$。

當知道 a，我們可以依據(2)，估計出 b，我們可以經上面的式子改寫成如下：

$(a)^2=a^2 \ldots\ldots (I)$

$(a+b)^2=(I)+(2a+b)b \ldots\ldots (II)$

$(a+b+c)^2=(II)+[2(a+b)c+c]c \ldots\ldots (III)$

...

因此，b 的估計就簡化成，簡化成只需要估計$(2a+b)b$要比前一次的餘數大。

依此類推，每次所需的估算只需對前次計算的餘數進行計算。

這樣的算法，比較現代國中課本常用的 10 位逼近法，開平方術的概念比 10 位逼進法困難。但在計算量上，開平方術遠比 10 位逼進法少，尤其在數值很大的時候。而從其他可推廣性而言，10 位逼進法亦適合在其他次方的開方，但開平方數要推廣到開立方術，這其中又是一個複雜的歷程，這個部分等我們下次談到古代的開立方術再繼續討論。而開平方就如同直式除法一般，也有直式開方法，以下我們來看看直式開方法的過程，這裡以 625 這個數字為範例：

步驟(1)	步驟(2)	步驟(3)	步驟(4)
$\sqrt{6\,,25}$	$\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\sqrt{6\,,25}$ 4 2	$\boxed{2}$ 2 $\sqrt{6\,,25}$ +2 4 4 2 25	2 $\boxed{5}$ 2 $\sqrt{6\,,25}$ +2 4 4$\boxed{5}$ 2 25 2 25 0
先將除數分成兩位兩位，從個位數字開始分(如果有小數點，從小數點開始分，缺項補 0)。因此，兩個數字一個單位。	從第一位開始估計計算。以此題為例，$2^2 \leqq 6 < 3^2$，所以□為 2。	左邊將除數加上商，同時，將直式跟號裡的部分進行處理，如同直式除法的處理。	繼續估計下一位數，以□表示，此時除數部分有些變化，會將除數乘 10(向右移一位)，譬如：4□。然後再估計□為若干。如果無法除盡可以重複步驟(3)一直作下去，無數字的部分只需補上 00 即可。

以上便是直式開方法，可以看出來，直式開方法與中國古代開方法異曲同工之妙處了嗎？真是非常的有趣！

原來，古代數學書偷偷的蘊含了這麼巧妙的數學意涵。原本可能困惑大家的古文，透過這番解析之後，大家一定和我一樣能夠來賞析古代的數學了吧！甚至可以開始來評估數學的價值了！有興趣的人可以更進一步的比較在計算機中開平方的運算過程。

參考文獻

郭書春 (1998).《九章算術譯注》，瀋陽：遼寧教育出版社。