

「數學史融入教學—以對數表為例」課後問卷分析

林倉億

國立台南一中

筆者在高一第一冊「3-5 指數與對數的應用」課程開始之初（2010 年 12 月下旬），以布里格斯 (Henry Briggs, 1561~1630)求 $\log 2$ 的方法為主體，設計了一份學習單來引入對數表，並實際在課堂上使用。學習單的內容與使用情形，亦寫成〈數學史融入教學—以對數表為例〉一文，刊載於 2010 年 12 月號的《HPM 通訊》上。而在「3-5 指數與對數的應用」課程結束之後（2011 年 1 月上旬），製作了一份課後問卷（參見附錄），請學生填寫，作為自己教學後的一種檢視。

實施方式是利用某一節課將問卷發下，給一節課的時間寫（不強迫填寫），學生可以翻閱學習單的內容，亦未禁止彼此討論。填寫時間最多就是一節課，先完成者就自習。總共發出 40 份問卷，收回 37 份，其中又有 2 份只作答前兩題。問卷採不記名方式，收回後，筆者再將每份問卷編號（與學生的座號無關）。

從學生填寫的回答中，發現有設計教材之初的預期效果，給予筆者繼續進行類似課程的信心與動力，但也有出乎意料之外的影響，提醒在設計類似教材時，還要多加留意的地方。藉此文與大家分享筆者所得到的收穫。

第一題：在這份學習單中，你印象最深刻的是哪些部分？_____（至多選兩個）

- (1) 巴比倫人的泥板 (2) 許凱的方法 (3) 納皮爾及他的對數 (4) 布里格斯的著作《對數算術》與對數表 (5) 布里格斯求 $\log 2$ 的方法 (6) 對數表的使用（學習單中的例題）
(7) 內插法 (8) 對數與克卜勒的行星第三運動定律

此題的選項均為學習單中的內容，目的是要了解學生覺得學習單的哪些部分較為特別。統計結果如下表：

選項	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
人數	3	6	15	5	21	6	7	5

如筆者先前所預期的，這份學習單的主角「布里格斯求 $\log 2$ 的方法」獲得近三分之二學生的青睞。不過，「(3) 納皮爾及他的對數」竟獲得近一半同學的支持，筆者倒是感到十分不解，因為它在整份學習單中所佔的比重並不大，不過，在看完學生下一題的回答後，終於豁然開朗。

第二題：你怎麼看待或評價布里格斯求 \log_2 的方法，及他製作的對數表？

學生的回答大抵上可以分成幾類。第一類是佩服布里格斯的巧思，想到利用 2^n 的位數來估算 \log_2 。經筆者統計，共有 21 位學生表達了對布里格斯方法的讚許、佩服。例如：

編號 4：「真的滿厲害的，要不是有在課業上學習到求 \log_2 的方法，我完全不知到還可以這麼做。」

編號 9：「『天啊！好聰明的人！』在了解這方法後，心中馬上浮現這句話。在沒有各種儀器輔助的幫助下，竟然可以計算出如此複雜的東西，且那不是隨便就能想出的方法，更是令人稱奇啊！」

編號 15：「過程複雜，但技巧令人耳目一新。」

編號 24：「求法相當神奇，完全無法想到。」

第二類則是欽佩布里格斯製作對數表的毅力。例如：

編號 8：「他好強，沒算到「起瘋」，真是佩服佩服。」

編號 16：「布里格斯花了很多年來運算，在那個沒有計算機的時代，竟然能算到那麼精準，由此可見他的毅力真是十分地驚人！」

編號 22：「他製作對數表時，沒有發瘋，真是厲害。」

編號 32：「布里格斯在當時連計算機都沒有的狀況下，利用紙、筆及幾十年的時間，作出了精準的對數表，可見他對數學有多麼大的熱情，堅持幾十年的這股意志也令人甘拜下風」

編號 15：「原來求出對數表是如此辛苦，連用計算機的我們都算（按）的哇哇叫了，更何況是親自計算的呢！」

有趣的是，整份問卷中共有四位學生用了「瘋」字來形容布里格斯製作對數表，很坦率地表達出他們對布里格斯的毅力是感到不可思議的佩服。

第三類與納皮爾有關。例如

編號 17：「把它改成以 10 為底的對數，既簡單又好看，比之前的 \log 以 $1-10^{-7}$ 為底的對數表好用多了。」

編號 18：「把原先納皮爾以 $1-10^{-7}$ 為底的對數改成以 10 為底，造福後來的我們，要不是布里格斯把納皮爾那鳥數字改掉，我們現在學第三章就會是悲劇了！」

編號 19：「幸好他改變了納皮爾先生以 $1-10^{-7}$ 為底的 \log ，才造福了後世的學生（謝謝！！）」

編號 33：「我覺得他把對數表換成以 10 為底，真是個明智的選擇，要不然我們現在算對數就……很 XX 了……（ $\log_{1-10^{-7}} \frac{N}{10^7}$ 這什麼鬼東西啊！？XD）」

雖然有些學生的用詞略嫌不文雅，但卻很直接地表達出納皮爾的對數所帶來的震撼，無怪乎在問卷的第一題中，會有那麼多人選擇「(3) 納皮爾及他的對數」。

第三題：完成這份學習單後，有沒有影響你對「對數」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

這一題的回答內容是筆者最為關心的，若有正面的回饋，不僅是設計教材時的辛勞有了回報，也是繼續類似課程的最大動力。皇天不負苦心人，問卷上呈現的，大多是正向的意見。其中一種是覺得學習對數變得比較有趣，例如

編號 8：「在學習上多了一些趣味，比較不會讓人覺得死氣沉沉。」

編號 9：「本來以為對數是背的東西，沒想到有這麼有趣的方法！！」

編號 12：「覺得這種課外活動有趣且有意義，不只知道 log 怎麼用，也能了解它的發展史，這是從小到大未曾體驗過的經驗。」

編號 33：「在我覺得這份學習單讓我了解到對數的發展史，我覺得收穫滿大的。」

另一種則是了解到對數表的製作的目的、辛苦，以及對數的有用。例如

編號 3：「原本覺得對數只是來整學生，現在發現對數是很有用的。」

編號 6：「我終於了解到對數表是一個大工程，有了對數表，各種天文、航海測量變得更便利，要好好學習前人的方法。」

編號 11：「一開始我認為對數很抽象，但在完成此學習單後漸漸的了解其實對數就是工具。」

編號 13：「有了 log，除了多了一堆運算律和煩人的題目外，其實它蠻實用的。」

編號 14：「以前都把它當成一個沒有實用性的東西，後來才知道它這麼好用。」

編號 30：「在知悉對數的起源後，不禁對數學家前輩多了許多敬意，為了使如此方便的運算方法發揚光大，不惜花費青春歲月製作『對數表』。」

不過，憑良心說，這一類回答並不能全部歸功於學習單，因為問卷是在整個「3-5 指數與對數的應用」課程結束後填寫的，學生們在另外的教材上做到了許多對數實際應用的題目（任何一本課本、講義都有許多這種問題），這些應用問題也會增強他們認為對數是有用的認知。

還有少數幾個學生認為這份學習單對他們的學習、理解對數有幫助。

編號 2：「對數比較容易理解（跟前幾章節相比）。」

編號 10：「使我更了解其中的內涵，也幫助我使用對數時更容易上手。」

編號 17：「看完了學習單後，覺得對數是比較好玩的數學，沒有什麼死背的公式，要套哪些公

式，就是只要算的時候小心他的陷阱而已，再來就是算的時候要小心而已。」

編號 19：「讓我更了解布里格斯等的想法，並對『對數』有了更深層的認識。」

編號 27：「有，更了解對數。」

老實說，類似的回答對任何一位教師都是一種莫大的鼓勵，筆者也不例外。不過，筆者所受過的數學教育訓練就像是警笛一樣，一直在腦海中響起，不斷地提醒自己：「僅就這些回答就認定這份學習單真的增進學生對對數的理解，這樣也未免太自我感覺良好了。應該要多做一些求證，比如說訪談等，才能知道學生的回答是不是『真的』，又可以進一步知道學習單是『如何』增進理解的。」想到這裡，一種莫名的疲憊感油然而生，轉而不禁佩服數學教育學家的辛苦、偉大。至於筆者這樣小小的高中教師，偶爾的自我陶醉是很需要的，可以維持教書的熱情。

最後，當然也有一些負面，或是非正面的回答，若將這些都視而不見的話，那才真的是「自我感覺良好」。

編號 23：「log—對數，一個看似簡單，但是影響廣泛的東西，有了它，天文學上很多的數字都會變得比較簡單，加速了天文學的進程，只是，我討厭它，對數，好多好難，好討厭。」

編號 24：「令我更加了解對數的功用，稍微改變了原本嫌它麻煩的心情。」

編號 28：「原來要成為現在的對數是那麼艱難的事，而它的影響卻如此深遠，雖然不喜歡它們，但還是克制自己，少罵幾句好了。」

編號 20、31：「沒有。」

第四題：完成這份學習單後，有沒有影響你對「數學」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

將數學史融入教學，學生除了可以學到數學外，更可以多了歷史與人文的關懷，改變對數學的看法。許多研究已經驗證上述的論點，問卷中的這一題並不是要做學術上的檢驗，僅是當作一種回饋資料的收集，自己參考而已。

編號 1：「數學融入有趣的歷史故事可讓上課輕鬆不少。」

編號 5：「現在所學習的"數學"是由過去的學者建立的理論所構成，光只是學習就感覺非常困難，何況是從無到有的過程。若是我們也能有一點點的貢獻給後人，或許就是促成未來科技發展的基礎。」

編號 7：「有，對於數學的東西要了解它可以計算什麼題型，甚至是如何用於生活上的，讓數學不只是應付考試用的。多數數學觀念的產生，如同發明物，和人類需求有關，而了解它的歷史就可以把數學生活化。」

編號 9：「有！我一直沒有利用數學的小故事 or 數學家創造公式……各種不同的有趣方法來學習數學，之前"背"或"了解"，長期下來會對許多有興趣的科目感到無聊，而用這種方法不但會更專心的去聽課，且會對數學更加的喜愛！」

編號 10：「我原本認為數學的各種概念是容易建構的，原來每一種在現代認為理所當然的概念都需透過數學家努力的研究才能統整出來，甚至因此而貢獻一生。」

編號 11：「數學不再只是數學，而是融合了生活周遭事物。」

編號 12：「以前算數學都只是背一些運算公式、理論，也不知道它怎麼來的，這份學習單讓我體認到數學的奧妙！」

編號 15：「數學以這種方式呈現，的確能吸引我們的注意，也較能投入，讓我們了解數學的發展、應用和較有趣的一面。」

編號 23：「數學，不只是算，還有它的歷史一樣是很動人的，或許，想得到更多靈感，就該翻開數學史，看看古人，怎麼算的，想法又是什麼？」

編號 25：「數學不再只是計算，它融入了一些故事，讓無味的數學變得十分有趣。」

編號 32：「透過這份學習單，更瞭解古人研究數學有多麼艱辛，很慶幸自己誕生在這個時代，可以將過去數學家的智慧學起來，真的很幸運。」

其中編號 17 最吸引筆者的目光：「有吧！他讓我比較喜歡去算數學了，尤其是 log 的部分，他影響了我對數學的看法，以前常逃避數學，現在看到數學都想要去了解他。」

同樣地，仍是有另類的回答。

編號 6：「有，原來數學知識深不可測，學得越多，越覺得恐怖。」

編號 20、31：「沒有。」

編號 28：「原來數學家那麼難當，花了自己的一生才創出公式，然後就死去，也沒什麼享受到人生和成就，只供後人景仰，真不知是幸還是不幸。」

編號 33：「唉！那時的人還真命苦，我整天算數學腦漿都乾了，他們竟然一生都在算==，而且還是手算，真是佩服他們的毅力啊！」

第五題：你希望以後能再有類似的學習單嗎？請用數字 1~5 表示，數字越大代表越希望有再次的學習單。_____（限用正整數 1、2、3、4、5）

就有回答此題的 35 份問卷作統計（如右表），平均是 4.1，代表願意填寫問卷的學生，基本上都是期待類似的教學活動，其中填「5」的學生有 15 位，低於 3

數字	1	2	3	4	5
人數	0	1	11	8	15

的只有 1 位。無論學生們期待的理由為何，對筆者來說，這就是設計下一次類似教學活動的最大信心來源。

以上就是問卷中五個問題的分析。整體說來，學生的反應屬於正向的，與筆者當初設計的目的「希冀由此讓學生體驗到前人製作對數表的堅持與辛苦，然後，思考為何要花數十年的時間製作它，它對當時的人們到底有什麼重要性？」算是相當吻合。不過，仍有一些筆者未考慮到的部分，比如說，納皮爾的對數似乎成了「負面的」，這倒是抹煞了他的貢獻，以後有機會應該替他平反平反。另外，學生可能對數學或對數產生的負向想法，下一次使用類似教材的時候，也要多所留意。

最後，筆者在實施這份教材的時候，邀請一位實習教師進教學現場觀察，並在事後提出一些意見。以下就是這位陳俊龍老師事後所寫的心得感想：

聽了老師的兩節課後，覺得這份學習單的優點是容易引起學生的學習動機，同時也給了學生一個對數表是怎麼產生的歷史背景，同時每段內容後面都有問題與討論，可以加深學生的學習印象，而且老師上課講解過程都蠻順暢清楚的，整體來說，我覺得學生可以學到東西。至於缺點，真的要雞蛋裡挑骨頭的話，我認為可以讓學生多點練習，像是除了算 $\log 7$ 以外，也可以讓他們在課堂上算 $\log 3$ 等等之類的，或是那時上課老師有給他們分組算，那些組之後也可以交換練習，我想這樣他們一定會更熟悉這部分的內容。

缺點的部分（筆者要求一定要寫）陳老師寫得比較含蓄，其實在上完這份教材後，我們有一起討論，陳老師觀察到有部分學生雖然對教材還滿感興趣的，不過就只是自己看教材，並沒有跟著筆者的節奏，也沒有注意聽筆者問了哪些問題、說了什麼。特別是到了後來用計算機求 $\log 7$ 的近似值，有少數學生並未參與，而是發呆或是在做其他的數學練習題。陳老師提出的這些現場觀察，的確是筆者當時所疏忽的，非常感謝他的提醒。

以上的分析或檢討，不僅是作為筆者下次教學的努力方向，也可以讓有興趣想要利用數學史來教學的老師作為參考。

學習單之課後問卷

一、在這份學習單中，你印象最深刻的是哪些部分？_____（至多選兩個）

- (1) 巴比倫人的泥板 (2) 許凱的方法 (3) 納皮爾及他的對數 (4) 布里格斯的著作《對數算術》與對數表 (5) 布里格斯求 $\log 2$ 的方法 (6) 對數表的使用（學習單中的例題） (7) 內插法 (8) 對數與克卜勒的行星第三運動定律

二、你怎麼看待或評價布里格斯求 $\log 2$ 的方法，及他製作的對數表？

三、完成這份學習單後，有沒有影響你對「對數」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

四、完成這份學習單後，有沒有影響你對「數學」的看法？無論是知識上、情感上的、正面的、負面的……等等均可，若有影響的話，請具體寫出。

五、你希望以後能再有類似的學習單嗎？請用數字 1~5 表示，數字越大代表越希望有再次的學習單。_____（限用正整數 1、2、3、4、5）