HPM通訊

第十三卷 第二、三期合刊 目錄（2010年3月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

關孝和的《解隱題之法》

黃俊瑋
台灣師範大學數學系博士班

一、《三步抄》簡介

被賦予「算聖」之稱的關孝和，是和算史上最傑出的數學家之一，和算自他開始進入獨自發展的階段，也使得和算成為十七世紀以來漢字文化圈內最為發達的傳統數學。[1]然而，他出版的著作並不多，生前僅出版了《發微算法》(1674)，此書主要內容為其利用所創之「旁書法」與「演段法」，來解答《古今算法記》之中的 15 個遺題。不過，關氏並未在該書之中詳細記錄其演段過程，只記錄消元之結果，使得一般讀者們難以理解。後由其弟子建部賢弘於 1685 年出版了《發微算法演段諺解》詳其演段過程。

關孝和死後，弟子荒木村英 (1640~1718) 與孫弟子大高由昌將其遺稿整理出版，書名為《括要算法》。除此之外，他的著作皆以抄本形式在關流門內流傳，而這其中，便包含了重要的著作《三步抄》，由《解見題之法》、《解隱題之法》與《解伏題之法》三個部份所組成，可謂是關流數學知識傳承之中，最為基礎的內容。

就這三部稿本的數學內容而言，關孝和主要是依據數學問題求解的難易程度，而將問題分類為：見題、隱題與伏題三類。其中，見題所指的是以算術方法求解的簡單問題，內容了包含長度、面積、體積與表面積等相關幾何計算問題。隱題是以天元術求解一元多次方程式的代數問題。至於伏題，則是透過設輔助未知數，以布列多元方程組之相關代數問題。此外，另有潛題一類，指的是不能用代數方程式求解的數學問題。

事實上，《解見題之法》的內容共包含了四個部份：「**加減第一**」說明加減演算的意義；「**分合第二**」說明以文字代數法 － 旁書法表示的數學式子之變化方式；「**全乘第三**」討論幾何圖形中的正形的計算公式；[2]「**折乘第四**」則討論非正形 (亦稱作變形) 之相關幾何圖形之計算問題。[3]其中，關孝和共給出了平方與立方之公式、[4]梯形面積公式、勾股定理、

[1] 參考徐澤林 (2008)《和算選粹》之《發微算法》提要。
[2] 正形指的是正方形、矩形、立方體等方正且規則的圖形，其面積與體積之計算，只需將縱、橫、高直接相乘，不需要再額外乘上某個分數係數，故曰「全乘」。
[3] 包含三角形、梯形、角錐等。它們的計算公式是縱橫高相乘之後，再乘上 1/2。1/3，1/6 等係數，故曰「折

方錐、方切籠、[5]蕎麥形之求體積公式，[6]並有圓面積、球與球冠形之體積與表面積公式等。其中的勾股定理圖解，與李潢在《九章算術細草圖說》之中所補之圖形是一致的。

在全乘與折乘之中，其以「**假如…**」或「**假如有…**」的形式來提出問題，類似中國九章算術之「今有…」，並緊接著給出求得解答的抽象化公式，這部份則類似於九章的「術曰」內容。隨後，給出相關之圖形，並在「**術解**」之中，說明公式的來由，此地位則同於劉徽之注。其中，在術解的部份，關孝和大量地以採取「**解體用圖**」的原則，透過「**出入相補**」的方式，來說明如何求得各類圖形的面積與體積公式。

再來的《解隱題之法》，共包含了下列部份：**立元第一、加減第二，附併、相乘第三，附見乘、相消第四、開方第五，附得商。**討論天元式的各種演算方法，並藉由實際的例題，解說開方式的數值解法等。[7]至於上述部份之細節，留於下一章節之中，再行說明。

至於《解伏題之法》，主要是處理多元高次方程組的消元問題，最終歸結為兩個聯立高次方程的消元，並引入行列式的相關概念。關孝和將整個過程分成六個步驟：

1. 真虛－討論設立目的未知數與輔助未知數布列方程組的順序問題。
2. 兩式－多元高次方程組消元的關鍵步驟。
3. 定乘－確定「兩式」消元結果所得一元方程的次數。[8]
4. 換式－把「兩式」轉化為一個一元 k-1 欠方程組。
5. 生克－確定行列式展開式各項正負號。
6. 寄消－根據「斜乘」得到「生克」符號以及本身所帶的符號來決定各項的符號，最後得到行列式的結果。

在下文中，我們將會就《解隱題之法》的部份，進一步介紹與分析說明。

二、《解隱題之法》之內容分析一：化簡與相消

如前所述，《解隱題之法》主要包含了 5 個部份：立元第一、加減第二，附併、相乘第三、相消第四、開方第五，附得商。在「**立元第一**」之中，僅給出一句話：

立元者，立天元一也。

並給出一個相關之例子：

〇 太極

｜

此處，立元即設立未知數。其中，就一般對天元術之解讀與理解，我們可知道「太極」所標示的即為常數項的位置，然《解隱題之法》之中，對此並未給予任何的說明。而上述例子之中，該式所代表的便相當於現代符號的「$x+0$」。

接著「**加減第二　附併**」，討論的與多項式加減有關的問題。首先給出相關法則：「**加者，單位者謂加，眾位者謂併，各其異名相減，則同名相加，正無入正之，負無入負之。**」

乘」。

[4] 正方形求面積與正立方體求體積。

[5] 此為阿基米德多面體之一。

[6] 此為正四面體。

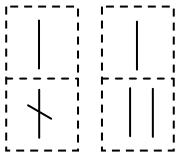
[7] 所謂的開方式，即為求解一元次方程式之問題。

[8] 關孝和之「定乘」方法是錯誤的，後來，由其孫弟子松永良弼予以訂正。

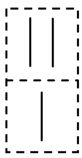
[9]再分別針對加與減給出例子。其中加者，指的是一式加上另一(單)式，而併者，指的則是一式加上許多(眾)式，而「異名相減、同名相加、正無入正之、負無入負之」這四個法則與《九章》之《方程章》的正負術內容相一致。「異名相減」指的是在相加的過程中，如果正負號相反(異名)時，在進行籌算的過程之中，必需將正負號不同的算籌對應消去，而「同名相加」代表的是當正負號相同(同名)時，相加的法則就是把同號的算籌加總即可，若用現代的符號表示，此相當於當a與b皆為正整數時，$a + (- b) = a – b$、以及 $- a + (- b)= - (a + b)$ 之法則。另外，「正無入正之」代表零加上正數為正數，「負無入負之」則代表零加上負數仍為負數。在提出了四個法則之後，作者給出了 2 個處理左右兩式「加之」的問題，以及 1 個處理左、中、右三式相加，意即「併之」的問題。其中一個問題如下所示：

假如[10]

左　　右



加之得

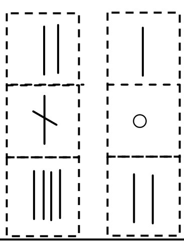


另外，作者亦原文之中的「加之」與「得」之間，加上小字「**右左一級數同名相加，正二。二級數異名相減，正一。**」詳細地說明此二式之相加運算過程。其它問題亦然。

接著，「**減者，其同名相減，則異名相加，正無入負之，負無入正之。**」[11]這四個法則與《九章》之中的《方程章》內容相一致，「同名相減」指的是在相減的過程中，如果正負號相同時，在進行籌算相減的過程之中，必需將正負號相同的算籌消去，而「異名相加」代表的是當正負號不同時，相減的法則就是把異號的算籌加總即可，若用現代的符號表示，此相當於當a與b皆為正整數時，$a - (- b) = a + b$以及 $- a - b= - (a + b)$ 之法則。另外，「正無入負之」代表零減去正數為負數，「負無入正之」則代表零減掉負數為正數。在提出了這四個減相關的法則之後，作者亦給出了 2 個問題，分別處理「以左減右」與「以右減左」的運算程序。其中一個例子如下：

假如

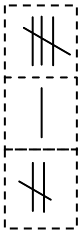
左　　右



[9] 徐澤林之譯本中，誤將「入」寫成「人」。
[10] 原本中，中文字為直式書寫，本文之中為節省空間，部份以橫式書寫。
[11] 徐澤林之譯本中，亦誤將「入」寫成「人」。

以左減右

減之，得



綜觀作者雖然僅給出了 5 個例子，但其中已包含了加、減與併的運算，同時也分別包含了加法的「同名相加、異名相減」以及減法的「同名相減、異名相加」，還有當係數為零時的相關之計算法則的應用。極具有教學上的示例意味。

緊接著，在「**相乘第三　附見乘**」之中，作者討論多項式的乘法。

首先給出術文：「**相乘者，置其式于左右，以左自上級到下級，逐遍乘右**同名相乘為正，異名相乘為負，乃當空級而乘者為空，**各相併，得式。**」以及：「**見乘者，置其式乘數，**乃歸除空、平方一、立方二、以上效之，**自乘者，倍之加一；再乘者，三之加二；三乘者，四之加三**次第效之，**為乘數。相乘者，兩式乘數相併加一，為乘數。**」

第一段術文所闡述的，是多項式相乘的方法，類似今日一般常用的直式運算法則。在此，我們試就關孝和所給的第一個例子來考察，並改利用現代的數字符號來代替其中的籌算表示：

假如[12]

0
1

自乘之，

左		右	左		右
					0
0	0	0		0	0
			0	0	1
1	1	1	1		
以左二級正	一遍乘右[13]				以左一級空遍乘右

二位相併，得

0
0
1

我們可以發現，上述過程就如同現代多項式相乘時的「直式分離係數法」：

---

[12] 徐澤林之譯本中，關於「相乘第三」的部份，其中多處的「左」與「右」應該相反，讀者宜多加注意。

[13] 原譯文的第一例之中，並無「以左二級正一遍乘右」，但其它例皆為省略。

```
   10
× 10      →假如 ( 1x + 0 ) 自乘
 00       →以左一級空偏乘右
10        →以左二級正一遍乘右
100       →二位相併，得
```

接著，上述第二段術文之中，所指明的規則，則是關於求已知乘數之多項式經過自乘以及再自乘等運算後，所得新多項式之乘數，以及兩個各已知乘數之多項式，相乘之後所得之新多項式之乘數。首先，關於關孝和所提出之多項式經多乘方之後的乘數規則，我們可歸納如下表所示：

	自乘 (倍之加一)	再乘 (三之加二)	三乘 (四之加三)
一次多項式	0 × 2 + 1 = 1 (二次多項式)	0 × 3 + 2 = 2 (三次多項式)	0 × 4 + 3 = 3 (四次多項式)
平方式(二次多項式)	1 × 2 + 1 = 3 (四次多項式)	1 × 3 + 2 = 5 (六次多項式)	1 × 4 + 3 = 7 (八次多項式)
立方式(三次多項式)	2 × 2 + 1 = 5 (六次多項式)	2 × 3 + 2 = 8 (九次多項式)	2 × 4 + 3 = 11 (十二次多項式)
三乘方式(四次多項式)	3 × 2 + 1 = 7 (八次多項式)	3 × 3 + 2 = 11 (十二次多項式)	3 × 4 + 3 = 15 (十六次多項式)

至於兩乘數為n次與m之多項式(意即n+1 次與m+1 次多項式)相乘之後，新多項式之乘方為「**兩式乘數相併加一**」，即新多項式為n + m + 1 乘方，，也就是n + m + 2 次多項式。例如關氏所給會第四例之中，左式相當於：$2x^2+(-3)x+6$，為一平方式，其乘方數為一，而右式相當於：$(-1)x^3+2x^2+4x+(-7)$ [14]為一立方式，其乘方數為二。此兩式相乘之後，經「**兩式乘數相併加一**」，可得：

$$(1+2)+1=4$$

此為一四乘方式，亦即為一個五次多項式。一般來說，n次與m次多項式相乘之後，為一個n + m次多項式[15]，為一個乘數為n + m - 1 之多項式，再者，k次多項式為乘數為k-1 的多項式，因此，n次與m次多項式之乘數分別為n - 1 與m – 1，所以當我們應用「**兩式乘數相併加一**」此一法則時，即為(n - 1) + (m - 1) + 1 = n + m – 1，其得一乘數為n + m - 1 之多項式，亦即為n + m次多項式。因此，這個法則的確滿足一般多項式相乘時之冪次計算規則。

再檢視前述之 k 乘方式取 n 乘方，乘方數為 (n + 1)×k + n (即 n+1 之加 n)之法則，k 乘方式為 k+1 次多項式，其 n 乘方即為此多項式之 n+1 次方，因此，為一個(k+1) (n+1) 次的多項式，其乘數為(k+1) (n+1) - 1 = kn + n + k。而就上述法則所述，(n+1)×k + n = nk + k + n，得一乘數為 nk + k + n 的多項式，因此，此法則亦滿多多項式任意次方後的冪次計算規則。

接下來的「**相消第四**」所討論的是關於得「開方式」的問題，在諸多解題的過程與場

---

14 根據前後文譯本中的 $x^3+2x^2+4x+(-7)$ 應為 $(-1)x^3+2x^2+4x+(-7)$ 才對，即右式之首項係數應為 -1。

15 在此指的是一般係數佈於整數域 (Integral Domain) 的多項式。

合之中，[16]我們依據題意列式並化簡而得「得數」與「寄左」兩個一元高次方程式，此時，必需再利用「相消」一法，將此聯立方程組化為一個一元高次方程式，進而再開方求此方程式的解。如其術文所示：「**相消者，如意求之，得寄左數與相消數，兩數之內，任意而其同名相減，則異名相加，正無入負之，負無入正之，得歸除及開方式。**」意即所謂的相消，就是依照題意列式，並利用前述加、減與乘等法則，得到「寄左數」與「相消數」，再透過「得數消寄左」或是「寄左消得數」的方式，最終可得一開方式。關孝和也分別給出了得數消寄左與寄左消得數的例子。在此，我們試以關孝和所提出的例子為例，並利用現代的數字符號來代替籌算表示：

假如

0	4
2	
1	
寄左	得數

以得數消寄左，相消，一級數正無入，故負八，二級數正二，三級數正一，得開方式。

−8
2
1

假如

−2	−2
3	3
3	−1
1	
寄左	得數

以寄左消得數，相消，一級數同名相減，正五，二級數同名相減，空，三級數異名相加，負四，四級數正無入，故負一。得開方式。

5
0
−4
1

如此，經過相消之後，我們可得最終所需之開方式，接著，下一章節討論的便是《解隱題之法》之中，最為關鍵的一個步驟：開方。

三、《解隱題之法》之內容分析一：開方

---

16 可參考關孝和之《發微算法》。

解隱題之法的最後一個部份「**開方第五　附得商**」，即解一元高次方程式之方法，此法即為我們一般所知的霍納法 (Horner) 或所謂的秦九韶程序，而其中程序又可以現今高中所教之綜合除法來表示。「**開方者，立商，從隅平方式者，從廉命之命之乃超位如常，到實，咸同加異減，而開盡之諸級數有正負相反者，謂之翻法也。**」

關孝和所給出的第一個例子如下：[17]

假如開方式，$\begin{array}{|c|}\hline -35 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$，平方開之，立商五，命廉，同加方，得方正七，以商命五命之，異減實，恰盡。又以商五命廉，同加方，得方正一十二，

商五，$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 12 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$　。

上述所提「平方開之」，即為求解二次方程式 $x^2+2x+(-35)=0$ 之根。關孝和僅對演算程序給出相關之文字說明，並未實際記錄下整個演算的過程，所以，我們無從了解其演算的過程的奧義。

在此，我們首先利用一般的綜合除法來表達上述之程序。

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & -35 & 5\rightarrow \text{立商五} \\ & 5 & 35 & \\ \hline 1 & 7 & 0 & \rightarrow\text{異減實，恰盡} \end{array}$$

同加方，得方正七

$$\begin{array}{cc|l} 1 & 7 & 5\rightarrow\text{又立商五} \\ & 5 & \\ \hline 1 & 12 & \end{array}$$

同加方，得方正一十二

若我們再進一步以代數符號來表示，設 f(x)= $x^2+2x+(-35)$，首先以 f(x)除以(x-5)可得 f(x)= $x^2+2x+(-35)$ =(x-5)(x+7) + 0，再以其中的商式(x+7)除以(x-5)，可得 f(x)= $x^2+2x+(-35)$ = (x-5) [1×(x+5)+12] + 0，即 f(x)可由此過程化為：

$$1\times(x-5)^2+12\times(x-5)+0,$$

而其中，5 即為二次方程式 $x^2+2x+(-35)=0$ 的商(此方程式的根)。

至於第二個例子之中的「以立方翻法開之」，指的是求題目所述之「三次」方程式 $-x^3-5x^2+14x+30=0$ 的根。關孝和首先「立商為三」，然後，前述的方法，最後將 $-x^3-5x^2+14x+30$ 化為 $-(x-3)^3-14(x-3)^2-43(x-3)+0$，並得知 3 為其根。在此，我們無從了解為何關氏在此二題之中，分別會立商為五與三，或許是教學示例上循序漸進的考

[17] 從此開始，我們將保留原文的文字部份，並將籌式改為現代常用的數字符號，並且採取橫式來書寫。

量，先闡述我們如何從「翻法」的過程之中，確立所立之「商」(方程式的根)即為所求方程式的根。再於開方的第二個部份「得商」的內容之中，闡明如何實際求商的過程。以下篇幅之中，我們將同樣採用現代的數字符號來代替籌算表示，以利說明其開方法。

「**得商**」即求得一元高次方程式之根的方法，術文之中指出：「**先立商一，自隅命之，到實異減同加，而實餘者，復立商一，如前到實，逐如此，而實盡，則所立商，相併，為定商。**」上面這段話的意思，就是先假設商是 1，然後應用前述之程序(秦九韶程序或利用今日的綜合除法)，如果，最後「實」有餘者，即餘數並非「0」時，再對新的方程式，執行前述程序，重覆此過程，直到最後實盡，餘數為「0」時，把過程中逐次所立之「商」相加，便得「定商」，此即為方程式真正的根。我們就以關孝和所提出的例子來進行演示，而此題關氏並未對演算的過程的細節給予相關的注解說明，題目與過程如下：

假如，$\begin{array}{|c|}\hline -12\\\hline 1\\\hline 1\\\hline\end{array}$，先立商一個，自廉命之，到實異減同加，而得商一個，$\begin{array}{|c|}\hline -10\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}$；復立商一個，如前而得商一個，$\begin{array}{|c|}\hline -6\\\hline 5\\\hline 1\\\hline\end{array}$；又立商一個，如前而實盡，商一個 $\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 7\\\hline 1\\\hline\end{array}$。仍立所商，相併，得三，為定商。

上述過程相當於求方程式：$x^2+x+(-12)=0$ 的根，首先，立商為一，而在此，我們分別以綜合除法以及代數符號來表示：

原術文	綜合除法	代數符號
假如 $\begin{array}{\|c\|}\hline -12\\\hline 1\\\hline 1\\\hline\end{array}$， 先立商一個， 自廉命之， 到實異減同加， 而得商一個， $\begin{array}{\|c\|}\hline -10\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}$，	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -12 & 1 \\ & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & -10 & \\ & 1 & & \\ \hline 1 & 3 & & \end{array}$	先以 $x^2+x+(-12)$ 除以(x-1)可得 $x^2+x+(-12)$ = (x-1)(x+2) - 10 再以其中的商式(x+2)除以(x-1)可得 x+2 = 1 (x-1) + 3 故知： $x^2+x+(-12)$=(x-1)[(x-1) +3] − 10 $=(x-1)^2+3(x-1)-10$

此時，由於實為－10，並不等於 0，因此，復立商一個，繼續執行前述之過程，而這

相當於令 x_1 ＝x-1，可得一新方程式 $x_1^2+3x_1+(-10)=0$，這時：

原術文	綜合除法	代數符號
$\begin{array}{\|c\|}\hline -10 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$，復立商一個，如前而得商一個，$\begin{array}{\|c\|}\hline -6 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$，	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & -10 & 1 \\ & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 4 & \multicolumn{1}{\|c}{-6} & \\ & 1 & & \\ \hline 1 & 5 & & \end{array}$	先以 $x_1^2+3x_1+(-10)$ 除以(x_1-1)可得 $x_1^2+3x_1+(-10)$ ＝(x_1-1) (x_1+4) - 6 再以其中的商式(x_1+4)除以(x_1-1) 可得(x_1+4) = 1 (x_1-1) + 5 故知： $x_1^2+3x_1+(-10)$ =(x_1-1) (1 (x_1-1) + 5) + (- 6) $=(x_1-1)^2+5(x_1-1)-6$

此時，由於實為－6，仍然不等於 0，因此，又立商一個，繼續執行前述之過程，而這相當於令 x_2 ＝ x_1-1，再得一新方程式 $x_2^2+5x_2+(-6)=0$，這時

原術文	綜合除法	代數符號
$\begin{array}{\|c\|}\hline -6 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$，又立商一個，如前而實盡，商一個 $\begin{array}{\|c\|}\hline 0 \\ \hline 7 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$，	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 5 & -6 & 1 \\ & 1 & 6 & \\ \hline 1 & 6 & \multicolumn{1}{\|c}{0} & \\ & 1 & & \\ \hline 1 & 7 & & \end{array}$	先以 $x_2^2+5x_2+(-6)$ 除以(x_2-1)可得 $x_2^2+5x_2+(-6)$ ＝(x_2-1) (x_2+6) + 0 再以其中的商式(x_2+ 6)除以(x_2-1) 可得(x_2+6) = 1 (x_2-1) + 7 故知： $x_2^2+5x_2+(-6)$ =(x_2-1) (1 (x_2-1) + 7) + 0 $=(x_2-1)^2+7(x_2-1)+0$

因此，由上述演算過程，可知 x_2 ＝1 即為此新方程式的根。但，又由於 x_2 ＝ x_1-1 且 x_1 ＝x-1，所以 x＝ x_1+1＝(x_2+1)＋1＝x_2+1+1＝1+1+1，可知，x=3 為原方程式 $x^2+x+(-12)$=0 的根，此即為術文之中所謂的「相併，得三，為定商。」同時，也可知 $x^2+x+(-12)=(x-3)^2+7(x-3)+0$

倘若，開方的過程中，無法像上例一樣，每次立商為一，就能很順利地使得「實盡」時，又該如何呢？關孝和為此再給出了另一個輔助的方法：

或實翻而不能盡者，立負商，如前到實異減同加而實盡，則前商相併，內併減負商，為定商。

而其所舉之例子如下：

假如 $\begin{array}{\|r\|}\hline -18 \\ \hline 24 \\ \hline -11 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$，先立商一個，自隅命之到實，異減同加，而得商一個，

－3
8
－5
2

又立商一個，如前而實翻，而不能盡，商一個，

2
4
1
2

又立負商五分，異減同加，而實盡，負商五分，

0
4·5
－2
2

仍所立商，相併，得二個，內減負商五分，餘一個五分，為定商。

上述過程即為求方程式 $2x^3+(-11)x^2+24x+(-18)=0$ 之根，首先，「**立商一個，自隅命之到實，異減同加，而得商一個**」，我們由綜合除法可得如下結果：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -11 & 24 & -18 & 1 \\
  & 2 & -9 & 15 & \\
\hline
2 & -9 & 15 & \multicolumn{1}{|r}{-3} & \\
  & 2 & -7 & & \\
\hline
2 & -7 & \multicolumn{1}{|r}{8} & & \\
  & 2 & & & \\
\hline
2 & -5 & & &
\end{array}
$$

於是，$2x^3+(-11)x^2+24x+(-18)=2(x-1)^3+(-5)(x-1)^2+8(x-1)+(-3)$，此時，我們可發現，其中的實為(-3)並不等於 0，因此，「**又立商一個，如前而實翻，而不能盡，商一個**」，我們令 x_1 = x-1，則上式化為 $2x_1^3+(-5)x_1^2+8x_1+(-3)$ 再一次利用綜合除法：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -5 & 8 & -3 & 1 \\
  & 2 & -3 & 5 & \\
\hline
2 & -3 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{2} & \\
  & 2 & -1 & & \\
\hline
2 & -1 & \multicolumn{1}{|r}{4} & & \\
  & 2 & & & \\
\hline
2 & 1 & & &
\end{array}
$$

於是，$2x_1^3+(-5)x_1^2+8x_1+(-3)=2(x_1-1)^3+1(x_1-1)^2+4(x_1-1)+2$，此時，我們注意到，雖然上式之中的實為 2 並不等於 0，但「實」從原本的(-3)變成 2 的過程，已產生了變號，此即為術文所曰之「**實翻，而不能盡**」，此時，我們若設：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3+(-11)x^2+24x+(-18) \\
&= 2(x-1)^3+(-5)(x-1)^2+8(x-1)+(-3) \\
&= 2(x_1-1)^3+1(x_1-1)^2+4(x_1-1)+2 = 2(x-2)^3+1(x-2)^2+4(x-2)+2
\end{aligned}
$$

則因為可知 f(1) = $-3<0$，且知 f(2) = $2>0$，這時，由堪根定理可知：f(x)在 1 與 2 之間

有實根，於是，接下來必須改立「負商」，於是關孝和「**又立負商五分，異減同加，而實盡，負商五分**」，這裡，我們又令 $x_2 = x_1 - 1$，則上式化為 $2x_2^3 + 1x_2^2 + 4x_2 + 2$，再一次利用綜合除法：

$$
\begin{array}{llll|l}
2 & 1 & 4 & 2 & -0.5^{18} \\
 & -1 & 0 & -2 & \\
\hline
2 & 0 & 4 & 0 & \\
 & -1 & 0.5 & & \\
\hline
2 & -1 & 4.5 & & \\
 & -1 & & & \\
\hline
2 & -2 & & &
\end{array}
$$

於是，$2x_2^3 + 1x_2^2 + 4x_2 + 2 = 2(x_2 + 0.5)^3 + (-2)(x_2 + 0.5)^2 + (4.5)(x_2 + 0.5) + 0$，

因此，「**實盡**」，即由上述演算過程，可知 $x_2 = -0.5$ 為此新方程式的根。此時「**仍所立商，相併，得二個，內減負商五分，餘一個五分，為定商**」這是由於 $x_2 = x_1 - 1$ 且 $x_1 = x - 1$，所以 $x = x_1 + 1 = (x_2 + 1) + 1 = x_2 + 1 + 1 = -0.5 + 1 + 1$，可知，$x = 1.5$ 為原方程式 $2x^3 + (-11)x^2 + 24x + (-18) = 0$ 的根，同時，如術文最後一個籌式，我們也知：

$$2x^3 + (-11)x^2 + 24x + (-18) = 2(x - 1.5)^3 + (-2)(x - 1.5)^2 + (4.5)(x - 1.5) + 0$$

然而，並非所有一元高次方程式的根，都可以如上二例所述一般順利地求得，因此，關孝和又給出下列的術文：

或實有不盡者，以方隨開商位數除實，而以所得依正負而加減於開商，為次商，以之自隅命之到實而如前，以方除實，而以所得又加減於次商也，次第如此，而得定商。

接著給出下面的例子：

假如，

−9
3
2
1

先立商一個，自隅命之到實，異減同加，而得商一個

−3
10
5
1

又立商二分，如前而得商二分

−0.792
12.12
5.6
1

又立商六釐，如前而得商六釐

−0.034324
12.8028
5.78
1

如此，實有不盡，故于是以方除實，得正三毫四六強，加入前開商，共得一個二分六三四六強，次第如此，而得定商。

---

[18] 這裡請注意，籌算並無表示分數的方式，僅以位值的方式來表示小數。

此題為求 $x^3+2x^2+3x+(-9)=0$ 的根，關孝和「**先令商一個**」而得：

$$x^3+2x^2+3x+(-9)=(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+(-3)$$

此時，倘若我們再令商一個，將會得到：

$$x^3+2x^2+3x+(-9)=(x-2)^3+6(x-1)^2+16(x-1)+13$$

即「實翻」：常數項由－３變成１３。然而，關孝和這裡並未令「負商」，而是「**又立商二分**」，又得：

$$x^3+2x^2+3x+(-9)=(x-1.2)^3+5.6(x-1.2)^2+12.12(x-1.2)+(-0.792)$$

實未盡，接著「**又立商六釐**」，再得：

$$x^3+2x^2+3x+(-9)=(x-1.26)^3+5.78(x-1.26)^2+12.8028(x-1.26)+(-0.044424)$$

實仍未盡，關孝和不再重覆上述程序。

此時，其以「**以方除實，得正三毫四六強，加入前開商，共得一個二分六三四六強**」，此即為現代微積分教科書之中，用以求方程式之根的牛頓迭代法。其中的「**方**」即為最後一式之一次項係數：12.8028，而「**實**」則為此式之常數項係數：- 0.044424。

我們先令 f(x) $=x^3+2x^2+3x+(-9)$ ，先利用上法求得第一個近似根 $x_1=1.26$，此時，

f(x)= $(x-1.26)^3+5.78(x-1.26)^2+12.8028(x-1.26)+(-0.044424)$

若 f(x)對 x 微分，可得 f’(x)= $3(x-1.26)^2+2\times5.78(x-1.26)+12.8028$ 。所以，

f '(1.26) = 12.8028，f (1.26) = - 0.044424。因此，

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.26-\frac{-0.044324}{12.8028}=1.26+0.034698\ldots=1.2634698\ldots。$$

此 x_2 即為「一個二分六三四六強」，最後，可重覆上述之迭代過程，於是「**次第如此，而得定商。**」不過，這裡需要注意的是，未必所有的多項方程式都存在有理根，因此，「次第如此」的過程雖然所得之值會越來越接近此多項式真正的實根，然不一定保證最終必能得到此 $\{x_i \mid i\in N\}$ 的極限值。故關氏上謂之「**定商**」的意義，有待進一步商確。

四、《解隱題之法》之教育意涵

《三步抄》作為關流門內最基礎的一本書籍，我們可推斷其具有知識傳承與教育上的意義。在《解見題之法》之中，它主要討論了幾何圖形的面積、體積與弧長公式，於是，在各問題之後立即給出相對應的一般公式之外，也進一步利用「圖解」的方式，來闡明這些公式的由來，或者利用圖形直觀地說明法則或公式的正確性，儘管這些並非嚴格的形式化證明。

相對地，在《解隱題之法》之中，由於主要涉及的是多項式運算與求解的算則，作者並未進一步提出相關之證明。事實上，在本書中，作者總是先提出抽象的數學規則或數學方法，接著，再給出該數學規則或方法所相關的問題。這點與印度婆什迦羅所著之《莉拉沃蒂》類似：《莉拉沃蒂》一書之中所提到的各種法則，也多由後代注釋者提出相關證明或闡述其「生成緣由」。另一方面，如與中國的《九章算術》對比，則後書大多數的場合總是先以「今有」引出問題，再給出答案與抽象性的術文，則在體例上有著顯著的差異，儘管後世的劉徽和李淳風也提供注文，來說明這些抽象術文的來由。

此外，就如同前文所述，我們可以發現，雖然關孝和在各個單元之中，所提供出的例

子並不多，但這些例子皆有足夠的一般性，能充份涵蓋各種情況與法則的應用。例如在「**加、減第二，附併**」之中，雖然他僅給出了 5 個例子，但其中已包含了加、減與併的運算，同時，也分別包含了加法的「同名相加、異名相減」以及減法的「同名相減、異名相加」，還有當係數為零時的相關加減計算法則。又例如，在「**相乘第三，附見乘**」之中，以四個例子給出了二次多項式與三次多項式進行自乘的例子，也給出二次多項式再乘方之計算，並且也給出二次多項式與三次多項式相乘的計算實例。對於一般讀者或學習者而言，只要透過對四個例子之研讀過程，便能進一步了解相乘與見乘之相關法則。

緊接著，在「**相消第四**」之中，關孝和也分別給出了「得數消寄左」與「寄左消得數」的例子，完整地示範了這兩種不同的情況。至於最後的「**開方，附得商**」，共點出了五個例題，其中，亦是由簡至難、循序漸進的方式來設計例題。作者先提出簡單的例題，在給定已知「商」的情況，從而提出了「平方開之」和「立方法開之」的兩個例子，再輔以「開方過程」每一步驟之解說，來引導讀者了解學習此一開方法。這整個過程亦能與現今我們常用的綜合除法作一相互對照。接著，再提出真正求商的問題，以本單元的第三個例子，說明如何以所謂的「霍納法」(Horner) 或所謂的「秦九韶程序」，來求任一個一元高次方程式的數值解。至於第四個例子則是再進一步說明，倘若在前述的過程之中，遇到「實翻」(即常數項變號) 時，必需立「負商」才能完成求商之程序。而最後一個例子，則是說明當所求方程式的根，並非「漂亮」的整數或分數時，可輔以「**以方除實，而以所得又加減於次商也，次第如此，而得定商。**」此一程序，來逼近所求方程式之根，而此程序即為我們所熟悉的「牛頓迭代法」。

如此，由五個實例，由易而難，由簡而繁地引導讀者與學習者，極有教學上的示例意味。而這些單元之中所給的實例，也大多具所謂「啟蒙例」與「典範例」(或張本例 generic example）的意義，具有足夠的一般性，可由這些例子的學習過程，來推得一般性的法則或順利處理其它的問題與情況。這一進路可以參照相關之數學教育研究。Vinner (1983) 發現學習者的概念心像（concept images）通常會包含典範現象（prototypes）。當要求個體說明某一概念時，通常會以他在心智中最為活化的認知結構，作為基本範例描述此概念。這種以基本範例說明某一概念的情形，就是一種對此概念所產生的典範現象。解題主要是以典範例的概念心像處理而非概念定義來進行，其中，典範例被當成是一個參考點，或者這個典範例只是眾多例子中最活躍的一個。

因此，呼應史學家的研究觀點，《三步抄》作為關流門內學習數學知識的基礎，必具有其數學教學與知識傳承上的意義。對比《發微算法》，其中關孝和僅給出「相消」與「寄左」式，以便相消得開方式，並未詳加記錄與說明演算過程與其思考脈絡的書寫方式，這或許更能佐證關氏書寫《三步抄》時所秉持的教學意義。無怪乎在他身後，被稱為《三步抄》的這些稿本，終能成為流派內的基本教科書，廣泛地傳抄與流傳。

參考文獻

Vinner, S. (1983). “Concept definition, concept images and the notion of function”, *Int. J. Math. Educ. Sci.Technol.* 14(3): 293-305.

徐澤林 (2008).《和算選粹》，北京：科學出版社。

婆什迦羅 (徐澤林等譯). (2008).《莉拉沃蒂》，北京：科學出版社。

賞析古典數學：《九章算術》之「其率術」

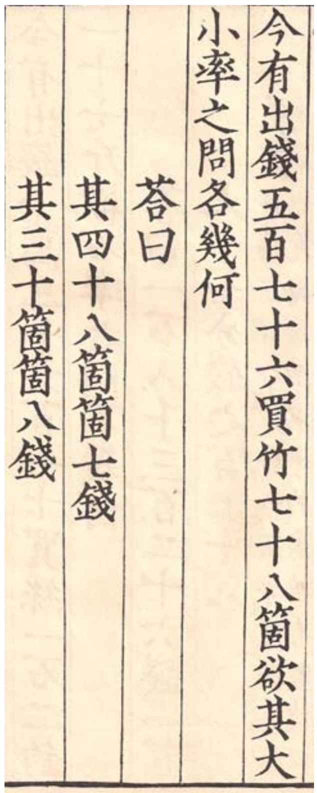
胡政德
台灣師範大數學系博士班

數學被認為是人類文化的發展的產物。從歷史的角度來看數學與文化之間的關係，通常比較興盛的文明，它的數學通常比較發達。在這裡我們不去說三道四強調中國文化的優越性，我們只想要瞭解古代的數學，藉由賞析古典的數學文本，以現代的數學知識，來瞭解古代的數學意涵，進而來評估數學的價值。

古典數學書籍何其多，其中比較有系統又具有代表性的，代表西方的古典數學書籍是《幾何原本》，而可以代表東方的古典數學書籍則是《九章算術》。因此，以下我們就快點來賞析東方古典數學書籍《九章算術》。

《九章算術》顧名思義就是有九章，一下要介紹那麼多章節，實在太冗長也太無趣了，以致失去我們想要賞析古典數學書籍的目的。筆者在這裡選擇了「其率術」這個主題。為什麼特別對這個主題感興趣呢？其實只是出於一個想要把徹底理解的好奇心。在台師大《九章算術》讀書會中，林美杏跟大家講解〈粟田章〉，而「其率術」就是其中一個小主題。聽完許久，我還是很不懂書本的意思。然而，這個問題也是大家閱讀數學書籍最常遇到的問題，數學課本裡面把過程的寫的詳詳細細，但是，讀者大都還是看不懂為什麼要這樣做。這時候，大家就請好好靜下心來，欣賞這個不太懂得數學問題吧！

我看不懂的這個問題，是有關於買賣東西算錢的問題，古文題目如右圖。


今有出錢五百七十六買竹七十八箇欲其大
小率之問各幾何
荅曰
其四十八箇箇七錢
其三十箇箇八錢

今有出錢五百七十六，買竹七十八箇。欲其大小率之，問各幾何？

荅曰：

其四十八箇，箇七錢 。

其三十箇，箇八錢 。

譯文：(參考郭書春，《九章算術譯注》)

假設出錢 576 錢，買 78 個竹子。想按大小計價，問各多少錢？

答：其中 48 個，1 個值 7 錢

其中 30 個，1 個值 8 錢

以今日數學語言表徵：

$576 \div 78 = 7 \ldots 30$

$48 \times 7 = 336 \ldots (1)$

$30 \times 8 = 240 \ldots (2)$

$(1) + (2) = 576$

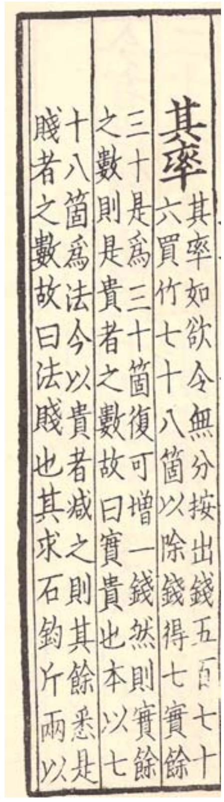
啊哈 (A-ha)！你看懂了嗎？

怎麼有如此巧妙的算法，可以將一個數字 576 拆成兩個連續整數之倍數的合成 (48×7+30×8)。如果給你任意一個數字，譬如：1234，你怎麼把他拆成兩個連續整數的倍數的合成。當然這個答案不是唯一，你可以動筆算算看！

雖然我們以現代的數學來解讀，可能無法完全詮釋古代文本的意思，但是，那又何妨？大家也許都處理過中學代數的問題，但你會去鑽牛角尖說這樣的解法，不符合這個文字題

的意思嗎？以數學的角度來賞析數學正有這個好處，我們可以自己的想法來瞭解數學。

我們在回到與「其率術」有關的問題上，那麼，古代人怎麼解釋他的想法呢？大家一定都很好奇，古文的部分就請參考右圖，不再詳述，我們直接看白話文翻譯 (參考郭書春，《九章算術譯注》)：


其率
其率如欲令無分按出錢五百七十六買竹七十八箇以除錢得七實餘三十是爲三十箇復可增一錢然則實餘之數則是貴者之數故曰實貴也本以七十八箇爲法今以貴者減之則其餘悉是賤者之數故曰法賤也其求石鈞斤兩以

> 其率，是想要使答案沒有分數。按：出 576 錢，買 78 個竹子，用它 (竹子個數) 除錢數，得到 7，實還剩餘 30。這就是有 30 個，每個的價錢可再增加 1 錢。那麼，實中剩餘的數量就是價錢貴的數量，所以說「剩餘的實是貴的數量」。本來以 78 個作為法(分子)，現在以貴的數量減它，那麼它的剩餘都是價錢賤的數量，所以說「剩餘的法是賤的數量」。…(以下說明用在其他不同的單位也是一樣的作法。)

以今日數學語言表徵：

$576 \div 78 = 7 \ldots 30$ (餘數)

其中 30 個是 8 錢(貴)

$78 - 30 = 48$

剩下的 48 個是 7 錢 (賤)

為什麼？為什麼這樣算就是答案了呢？有興趣的可以自己想一想，想要讓腦袋休息一下的就和我一起來看下面的過程吧：

假設 7 錢的竹子 x 個，8 元的竹子 y 個。所以

$\begin{cases} 7x + 8y = 576 \\ x + y = 78 \end{cases}$，接下來就用大家國中學過的解二元一次聯立方程式！

將第二式乘以 7，可以得到 $7x + 7y = 78 \times 7$

$\begin{cases} 7x + 8y = 576 \\ 7x + 7y = 546 \end{cases}$，兩是相減我們就可以得到 $y = 30$，也就是除法運算裡的餘數。

原來，古代數學書偷偷的蘊含了這麼巧妙的數學意涵。原本困惑我一段時間的古文，透過短短的思考解析之後，我們就能夠來賞析古代的數學了吧！

參考文獻

郭書春 (1998).《九章算術譯注》，瀋陽：遼寧教育出版社。

數學家傳記寫作坊

時間：2010 年 3 月 13 日
地點：台灣師範大學公館校區數學系館 M106
　　　台北市汀州路四段 88 號
主辦：台灣數學博物館
贊助：台灣數學教育學會、台灣師範大學數學系
承辦人：洪萬生教授 02-7734-6640
　　　　張靜宜 02-7734-6630

主旨：

數學家傳記是一向是課堂上數學教師最常運用的教學插曲。不過，究竟如何因時因地呈現，大概不容易找到一套準則。洪萬生曾經為文（見〈HPM 隨筆（一）〉，《HPM 台北通訊》第一卷第一期）說明數學教師在課堂上運用數學史的三個層次，其中第一個就是「說故事」！然則究竟怎麼「說」呢？我們認為史實的「求真」固然重要，但是由於我們的目的在於數學的教與學成效，所以，只要能夠提振學生的士氣與興趣，就已經達到初步的目的了。當然，學生如果因此而得到人格與認知兩方面的啟發，那麼，數學史的運用價值就更高了。此外，如果可以在引入傳記的脈絡中，「**從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想**」，那就更是「善莫大焉」了。至於傳記如何具體地「融入」教學過程之中，我們也曾提供了一些建議，請參考洪萬生，〈HPM 隨筆（二）：數學史與數學的教與學〉（刊《HPM 台北通訊》第二卷第四期）。

為此，我們特別舉辦「數學家傳記寫作坊」，以推動數學家傳記之書寫，從而鼓勵中小學教師在課堂上說這些故事，或者推薦給學生充當補助教材。這些作品都將永久陳列在台灣數學博物館網站的「數學家傳記」專欄，供所有的訪客參考引用。如有機會，當然也希望出版紙本，以廣流傳。

有關此一寫作坊，我們歡迎中小學數學教師報名參加，特別是台灣數學教育學會會員，我們更是竭誠歡迎。我們將期待與會的中小學教師利用 190 分鐘的時間，撰寫一篇傳記（也可以合作撰寫），最後，再進行各 10 分鐘的成果發表。因此，與會者最好隨身攜帶筆記型電腦。

在評審方面，我們將邀請道本周 (Joseph Dauben) 教授、洪萬生教授、左台益教授擔任。

議程（暫訂）：

9.30-10.00：報到
10.00-10.10：開幕
10.10-10.50：道本周教授演講
10.50-11.20：咖啡時間
11.20-12.00： 琅元教授演講
12.00-13.10：午餐
13.10-13.30：傳記撰寫注意事項（洪萬生）

13.30-15.00：寫作坊第一節
15.00-15.20：咖啡時間
15.20-17.00：寫作坊第二節（完稿）
17.00-18.20：成果發表（預定最少 6 篇）

附錄：數學家傳記的教育意義與價值

底下四篇文字是我們閱讀 Helen Pycior 有關數學家傳記與數學教育之關連的論文 "Biography in the Mathematics Classroom" (in Ivor Grattan-Guinness ed., *History in Mathematics Education* (Paris: Belin, 1987), pp. 170-186) 之心得報告，原刊《HPM 通訊》第二卷 (1999) 第 10 期。我們特別在此轉載，以方便中小學教師將傳記融入教學之參考。由於 Pycior 是任教於歷史系的專業數學史家，因此，她對於「傳記」如何引進數學教室，難免比較求全。其實，要是她有機會走進數學課堂實際參與教學，她對「傳記」如何利用說不定會有「另類」的反省。換言之，一旦數學史家有了教學關懷之後，他（她）們對於數學史如何「融入」數學的教與學，或許會變得比較從容與自在才是。

I. "Biography in the Mathematics Classroom" 讀後心得　林倉億

"If they are just repeating favorite anecdotes, they are not using biography."，我認為對許多人而言，這句話是本篇文章中衝擊最大的一句。許多數學教師常常在課堂使用數學家的軼事，並且深信這般對學生學習數學有莫大的幫助，因而增強了不少教好數學的自信；然而，這句話卻會迫使他們去思考更進一步的問題，也是數學史家 Helena Pycior 強調的三方面：

‧使用的目的；
‧隨著目的，而選擇相關層次的傳記；
‧時時吸收最新的傳記資料。

從 Pycior 在文中不憚其煩、苦口婆心的解說中，我們可以強烈感受到，她極力將傳記的使用目的，從娛樂提升到更高層級 － 紀念價值 (commemoration) 與數學的人性化 (humanizing)。對後者的效果與使用更是諄諄善誘，在學生普遍畏懼、討厭數學的情勢下，將數學或數學家人性化，將有助於縮小學生對數學的距離感，更進一步地可讓學生心中無數的挫折感，得到一種抒發，就如洪老師舉過的例子：天縱英明的康熙對符號代數都是一頭霧水，在學生對自己的挫折感到釋然後，教師再要來引導他學習，就會比較容易了。

Pycior 也提醒教師切勿將數學家塑造成聖人，或者是利用數學家來做道德教化。不過，我覺得她所提的理由有點牽強，例如，如此做會面臨到「一個好的數學家應該是如何？」這樣的問題，一直未談到問題核心。我認為傳記的使用，除了幫助學生學習數學外，還可讓學生在成長方面 (指的是對事物的洞察力、包容力與創造力) 得到啟發，這啟發主要來自於學生內省自覺的，而不是教師一味的要求學生屈從道德教條 (例如做人應該如何如何，不可以如何如何等)。

本文前半部都在論述一個好傳記所應俱有的條件，它除了讓我們知道如何挑選傳記或看傳記時，應該注意那些細節，更深的含意，是希望每一位要使用傳記輔助教學的教師，在內容的挑選與編排上都能夠謹慎以對，以一個好的傳記家來期許自己。

（附記：本文原刊於《HPM 通訊》第二卷第 10 期）

II. 傳記在數學課堂上的使用　陳鳳珠

傳記和軼事的相關材料是許多數學課程中的標準內容,但該如何使用傳記史料和舉數學上的例子作說明一樣，要小心注意才是。

由 Helena Pycior (1987) 的 “Biography in the Mathematics Classroom” 文中可知，在數學課程中適切地使用傳記有三大要點：

1. 傳記中不可以完全是軼事（亦即毫無根據的說法）；
2. 不可扭曲傳記主角生平且加入虛構情節；
3. 須根據現代已校訂的科學傳記做出發點。

其中特別要注意的是，將軼事蒐集起來並非就等於傳記。對於軼事和傳記部分的選擇，與在數學課堂中融入傳記的目標是很有關係的。在數學課堂中融入傳記的目標，從「娛樂效果」到對未來數學家建立「角色模範」的範圍是相當廣泛的，所以如何去調配其中的比例，顯然足以試驗教師的智慧與用心。

將傳記融入於數學課堂時，作者強調一部好的傳記必須賦予歷史人性化的一面，因為大多數的人感興趣的是他人如何和自己相似的部分。如果傳記賦予「往日」一般，也賦予數學人性化的一面，那麼學生將不只可以體會到那些偉大的數學家一如常人，更重要的，是普通的平凡人也可以成為偉大的數學家。譬如：在中國數學史上鼎鼎大名的康熙皇帝，就在符號代數的學習過程中，表現了類似今日國中學生茫然不知的模樣，這樣的學習經驗便可以啟發學生的一些同理感受，也因此可降低學生的學習挫折感。傳記也可能對學生人格發展有些影響，因為藉由對於不同文化所建立的人類知識的模仿，傳記可以延伸學生的生命經驗。

不過，傳記內容的層次應和課程目標做結合。例如，將軼事作為主要內容以達到娛樂的效果，但卻須相當注意其內容的真實性，避免過於誇大不實，否則容易讓學生覺得不易接近，甚至會認為那些數學家超乎常人而影響自信。然而，具有人性化的數學，需要的是好的傳記，其中必須以人性化的角度去探索與說明數學家的活動。將著名數學家建立成為學生的角色模範 (role model) 之目標，對數學教師而言，更是責無旁貸。當然「時間」在數學課程中，是另一個必須面對的因素，教師必須視課堂中所能利用的時間，加以調整傳記的內容和多寡。

最後，我們該如何評量傳記在數學課程中所得到的效果呢？這自然是從目標的分析開始，第一步是列出課堂中所要使用傳記與軼事的材料；接著，評估在教學中是否達成。在此情形之下，仔細檢視教師所使用於課堂中的傳記和軼事的資料，不但提供了善用課堂時間的機會，更能了解教師本身在教學過程和對於數學家所遺漏或漠視的部分。在實際的教學演練之後，教師應確定學生對所呈現目標的接受性；教學效果是否符合原本計劃的目標；與是否教學情境的不適合和須調整或改變目標與層次。總而言之，細查所準備的傳記材料；決定目標；配合傳記不同層次的內容；並根據最近的傳記內容加以更新，如此才能確使傳記內容融入數學課程中，達到實際的效用。

（附記：本文原刊於《HPM 通訊》第二卷第 10 期）

III. 試析 “Biography in the Mathematics Classroom”一文　蘇俊鴻

Pycior 在本文中試圖討論傳記在數學課堂上使用的指導方針；什麼樣的傳記才是「好」傳記？何謂「完善」的科學傳記 (complete scientific biography)？在課堂使用傳記的目的為何？最後，她更希望教師能重新檢視自已在課堂上使用傳記的情形。

對作者 Pycior 而言，一本「好」的傳記必須滿足三個條件：

・獨特的 (individual)
・真實性 (truthful)
・藝術性 (artistic)

由於傳記是針對傳主個人生活及成就的再呈現，所以，它是獨特的；呈現的原則是真實的，寫作者不能摻入個人的情感與價值判斷；必須在有限篇幅內，將眾多資料適當剪裁，去蕪存菁，因此，它是藝術的。然而「完善」的科學傳記作品，除了是一本「好」的傳記外，也必須能將科學家的科學工作的偉大貢獻與其個人特質、日常生活點滴等結合。更甚者，也必須留意當時外在環境對科學家的影響。通常這些非科學因素與科學知識活動的互動，是相當複雜且糾葛，對傳記寫作而言，是一項重大挑戰。

Pycior 在文中最重要的一點，是提醒數學教師在使用傳記來幫助教學進行時，必須清楚地掌握使用時「目標」。一般而言，使用傳記的目的，不外乎為了增進上課的趣味性；或是透過對數學家的生平了解，對學習者人格上的激勵；或是對學習材料的再「體驗」與省察。根據教師對「目標」的設定，來決定選擇傳記材料的多寡與內容呈現的層次。此外，Pycior 也有著傳記材料使用的執著與禁忌：

・傳記絕不可只是軼聞；
・絕不可扭曲傳記的內容；
・要隨時更新傳記材料，保持其準確性。

這當然是 Pycior 本身對真實性要求的落實，但是否如此嚴格，倒有值得商榷與轉圜的空間。譬如對「軼聞」的使用，實在無傷大雅，且能增進對學習材料了解的情形下，何妨一用！（附記：本文原刊於《HPM 通訊》第二卷第 10 期）

IV. Biography in the Mathematics Classroom 心得報告　謝佳叡

傳記，難寫；數學家傳記更是難寫
傳記，難讀；數學家傳記更是難讀
想要在數學課堂上使用傳記，更是難上加難

傳記難寫，難在若是「自傳」，雖直接擁有事蹟資料，卻常拋不開個人主觀好惡，下筆常有偏頗。而能留傳者又常是有成之人，所記之事自然頗具公信，一旦有偏則影響深遠。例如，物理學家理查費曼 (Richard Feynman, 1918-1988) 自傳式的書籍《別鬧了，費曼先生！》(Surely You ’re Joking, Mr. Feynman) 一出版即成暢銷書，受歡迎的原因，想必不是基於人們樂於探索其背後的物理定律，而是費曼趣味盎然的溝通方式，及令人聞之大呼過癮的事蹟，然而知識層面的結果是真（如發現某個定理、現象等事實），其間的過程難免加油添醋，捨陋揚善。

相反的，若是他述傳記，對資料的收集、調查、安排得費許多工夫，對於傳記人物的內心及隱私僅能透過訪談、私交、書信，更得加入自己的想法及臆測，加得多了則失去原貌，荒腔走板；少了又千瘡百孔，失了傳記應有的生命力。「自傳」有失公允，「他傳」亦失公允；前者失之主動，後者失之被動，故云：「傳記，難寫！」

數學家傳記更是難上一層。倘是「自傳」，不論是否這些數學家都擁有好的文學素養足以為己傳，當埋在浩瀚的數學領域中怕也不得閒，真理的探索是無止境的，且越是探索自然科學越是覺得自身之渺小，我想這是數學家（或是科學家）很少留有自傳的原因了。若是「他傳」而作者不懂點數學者，自然難有深刻的數學家傳記，等到擁有足夠的數學能力，豈不也埋入這個學門，如非特殊原因也就難得空閒為他人做傳了。

恰有能力也有時間記傳者，還得面對一些問題，大部份數學家除了數學知識的創作外，也都會有伴隨著吸引人的生平軼事，但他們是否會如處理數學般的細心態度去面對這些材料？是否也該如此？且傳記的層次、標的要放在何處？人為主或是數學知識為主？科普取向或是專業取向？紀念性質或是娛樂性？所有這些問題都必須考量，而這些往往難以兼顧。如重於數學知識本身則必過於生硬嚴肅，令人難以接近；如重於數學家軼事，則必不夠深刻，流於風花雪月而失去數學精神，在此一關聯下，數學史的本身應不是唯一目的，終究必須歸於數學知識。正因如此，坊間書局要找尋數學家傳記並非易事，不然就如《現

代數學的巨星—希爾伯特的故事》（儲家康著，凡異出版社，1998），全書著重於數學故事，閒暇讀之自有趣味，若當成做學問的參考用書顯然「不對門路」。

傳記，是史料，是文學，也是理性創作！因為是史料，故要「真」，不可虛偽造假，即使有臆測、評論也都得建立在有憑據上。傳記也是文學作品，而文學是藝術之一，是藝術就要講究「美」，用字遣詞要美，段落結構也要美，更要有令人感動之美。作者將傳記主角的事蹟透過文字型式傳達於讀者，沒有好的寫作能力是無法引起讀者共鳴的。此外傳記也是理性創作，除了提供大量的知識外，也藉由這些卓越的人物來興起積極作用、提昇文化素養，開拓人生視野，無論藉以憑弔或鑑古知今都出於「善」。傳記材料的安排以時間為主軸，人物事蹟為橫軸，不可倒果為因、亂了始末，故傳記寫作非得理性不可。而讀者要從一本傳記中辨別史料的真偽、領略傳記人物的貢獻、瞭解傳記中作者欲表達的重點，更要懂得賞析而有自己想法，故曰：「傳記，難讀！」

數學家傳記難讀之處又更甚了。若說傳記材料的安排以時間為主軸，人物事蹟為橫軸，則數學家傳記又得加入數學知識一軸，使得廣度及深度都遠勝其他。數學家主要的貢獻在於抽象的創作及實際的應用，沒有論文、數學式子何以感受數學家的創作精髓；但加入論文、數學式子又讓多數人望而卻步。例如在讀到牛頓 (Isaac Newton) 對數學的貢獻只停留在和萊布尼茲優先權的爭奪，而不去看他對微積分或對分析的其他方面（如無窮級數和二項式展開），那麼從數學家的角度看來，牛頓算是「缺席」了。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
英國劍橋：英家銘（李約瑟研究所）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）葉吉海（陽明高中）
新竹市：洪誌陽、李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士勳、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
台南縣：李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）