HPM通訊

第十三卷 第五期 目錄（2010年5月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

參加大學的服務貢獻中餐

［美國］李學數

我執教的大學在 4 月 29 日邀請我參加服務 25 周年的中餐。

在兩個月前，校長辦公室秘書要我促供一張以前的照片，以及寫一個不超過 100 字的短文談自己的二十五周年感言。

那時由於我要參加佛羅里達州的數學會議，沒有時間寫這短文，於是就抄了一首詩歌，然後寫一個句子充數。

中餐可以帶太太或者一個朋友，這一餐是值 25 美元，也可以購買餐卷。我太太說她要工作不能請假，她放棄參加。

我就邀請我好友羅先生來參加。他現在提早從 Cisco 退休，和我一起做研究，讓他來認識我們學校環境。

我們十一點半進入學生樓的大廳，門口貼上每個人安排的座位。我是安排在第九桌。已經有一對夫妻在第九桌，我們自我介紹，先生是在物理系的印度教授，在這裏教了二十年是搞光學的。

他說現在念物理系的學生不太多，他們的系不太大，只有十多位教授。

我說這裏還好，我在 Wichita Kansas State University 教書的 Chopra 教授告訴我，明年他們的物理系整個系要關門，真是悲慘。那裏的終生職教授要另外找事，而系主任才剛上任不久就要被解聘。

我們談論明年這裏大學要解聘一些教授和職員，現在有一些人開始戰戰兢兢的過日子。實在很難想像美國最富的州的大學要面對「無米之炊」 的困境。

我們聊一些印度大學的情況，他不時回印度去講學。也聊一些印度電影，他們告訴我最近看到了一部好看的電影：「我的名字叫可汗」。印度教授說印度有錢人許多都是姓「可汗」的回教徒。

我吃一小塊牛肉和蛋糕甜品。我喜歡吃甜食，旁邊有一個人沒有來，這甜食就由我代吃。我也把那裏的牛油麵包吃掉。

教授有 15 年，20 年，25 年，30 年，35 年，40 年，45 年的服務。唸到某年服務年的

教授排隊，講臺的銀幕顯現那個年大學與美國的重大事件。然後，教授個別上講臺與校長合影與領取紀念品。

可以看到三十年前停車費才兩角五分, 現在已要五元。二十多年前這裏有許多果園, 現在都變成房屋了。這裏曾是許多百萬與千萬富翁出現的矽谷，現在卻是有許多高資歷與高學位人士失業的地方, 真是”二十年河東, 二十年河西”。

輪到我時負責人唸我提供威廉艾倫德隆古爾 (Will Allen Dromgoole) 寫的《造橋者》的詩歌：

在一個寒冷陰沈的夜晚，
一個老人走在孤獨的路上，不久來到一個巨大、深厚的裂口，裂口下流著遲緩的水流。
他在微暗中走過去，
但是，當他安全到達彼岸時，
他回頭在那裏造了一座橋樑。
旁邊一個旅人說：“老人家，
你是在浪費你的力氣和精神，
因為這天結束時，你的旅程亦將結束，
你絕不會再經過這裏，
而你已渡過這個巨大、深厚的裂口，
你卻還要造一座橋，這是為了什麼？
造橋的老人抬起他那灰白的頭，
說：“這位朋友，在我來的這條路上，
有個少年跟在我後面，
他必定也會來到這裂口旁。
這個地方對我是沒構成煩惱，
但對那位少年卻可能是個圈套。
因為他也必須在微暗中渡過這裂口，
我這座橋是為他而造的，這位朋友！

我的感言簡單：感謝聖荷西州立大學提供我機會從事教學和研究, 我是為年青一代造橋的人，如果有來生我仍願意從事教育的工作。

25 年服務的紀念品是一個美麗的鐘。

離開餐會給太太電話，告訴她中餐是很精美，紀念品不錯是一個鐘。她的反應是很「中國式」:「怎麼送你鐘呢？」

我說這個比我數學系的好友 Ed Schmeichel 教授領到的一個石頭紀念牌好許多，他是服務 35 年。

東西文化不一樣，你怎能要求美國大學考慮中國教授的文化習俗 -- 在喜慶時，不能送鐘給人家。

離開大學老羅感嘅地說：在工業界你退休了很快就被人遺忘，還是教育界比較有人情味。（2010 年 4 月 30 日）

三角形外接圓半徑與內切圓之半徑比值

林炯伊
奎山中學

一、緣起

農曆過年的氣氛仍未散去，圍牆外不時傳來鞭炮聲慶祝新年，然而一群即將面對國中基測的孩子已經到學校，面對無情的考卷一張接著一張……

若△ABC 的外接圓面積：內切圓面積 ＝ 4：1，則下列敘述何者正確？
(A) △ABC 是正三角形
(B) △ABC 的內心與外心一定是同一個點
(C) △ABC 的內心與外心一定不是同一個點
(D) 外接圓周長：內切圓周長＝2：1

對學生來說這不是一個難題，因為這不是一題許多人答錯的題目。事實上很少人寫 (D) 以外的選項，而 (D) 正是標準答案。

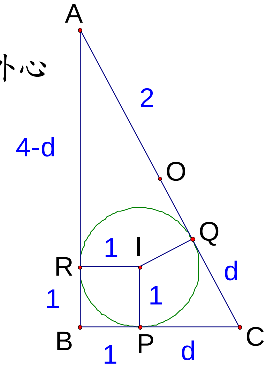
學生甲：「選項(A)與(B)為等價，因為這是單選題，所以答案不是(A)或(B)。而(C)選項有明顯的反例為正三角形，故此題選(D)。」

學生乙：「由外接圓面積:內切圓面積＝4：1，可得半徑比為 2：1，故周長比＝2：1，選(D)。」

在時間的壓力下，沒有人去管 (A) 與 (B) 到底對不對，是否有非正三角形而外接圓半徑 R 與內切圓半徑 r 的比值＝2 的例子。反正選 (D) 不會錯就好。(以下簡稱 $\frac{R}{r}$ 為「Rr 比」)

二、課堂上

在講台上，我注意到這個問題要找出非正三角形的例子並不容易，但是，單選題卻暗示 Rr 比＝2 的三角形不只正三角形。於是，我開始用國中數學構造反例。



反例 1. 構造 Rr 比＝2 的直角三角形

如圖，△ABC 中，∠B＝90°。I 為內心，P、Q、R 為切點。O 為外心(亦為 $\overline{AC}$ 中點)。令 $\overline{IP}$ ＝r＝1，$\overline{OA}$＝R＝2，$\overline{CP}$ ＝d。

由切線性質，$\overline{CQ}=\overline{CP}$ ＝d，$\overline{AR}=\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{CQ}$ ＝4－d，

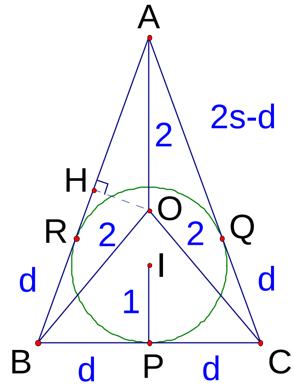
另外，IPBR 為正方形，故 $\overline{RB}=\overline{IP}$ ＝1，$\overline{BP}=\overline{IR}$ ＝1

再由畢氏定理，$4^2=(1+d)^2+(4-d+1)^2$

整理得到 $d^2-4d+5=0$，d 無實數解！故所有直角三角形的 Rr 比 $\neq 2$。

反例 2. 構造 Rr 比＝2 的等腰三角形

如圖，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=2s$。I 為內心，P、Q、R 為切點。O 為外心



（A、O、I、P 四點共線），H 為 O 點到 $\overline{AB}$ 的垂足。

令 $\overline{IP}=r=1$，$\overline{OA}=R=2$，$\overline{CP}=d$。

由 $\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AP}}{2}$ ＝△ABC 的面積＝$\dfrac{r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})}{2}$

推得 $d\sqrt{4s^2-d^2}=d+2s \quad \ldots(1)$

由 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OH}}{2}$ ＝△AOB 的面積＝$\dfrac{\overline{OA}\times\overline{PB}}{2}$

推得 $s\sqrt{4-s^2}=d \quad \ldots(2)$

(2)代入(1)可得 $s\sqrt{4-s^2}\sqrt{s^4}=s\sqrt{4-s^2}+2s$，$s^6-6s^4+9s^2=0$

$\Rightarrow$ (s,d) 只有一解$(\sqrt{3},\sqrt{3})$，即 s＝d 的正三角形解。

大部分的學生其實都預期反例存在，也就是正三角形以外，也有 Rr 比＝2 的三角形，而老師馬上就可以舉出例子。於是，在解到方程式「$d^2-4d+5=0$」無解時，學生的反應有「怎麼會是這樣的結果？」、「嗯……判別式小於零」、「接下來怎麼辦？結論是什麼？」…等。

因為國中數學基本上只能解決直角或等腰三角形的問題，而等腰三角形的情形對於大部分學生太過複雜，所以，我只演示了直角三角形的情形。對於到底有沒有非正三角形的 Rr 比＝2，只能說「老師回去找到例子再告訴大家」。

三、課後研究

成果 1. 任意三角形的 Rr 比大於等於 2。若 Rr 比等於 2，必為正三角形。

證明：令三邊長為 a, b, c，三角形面積＝Δ，則有 $\Delta=\dfrac{abc}{4R}$，$R=\dfrac{abc}{4\Delta}$

$\Delta=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$，$r=\dfrac{2\Delta}{(a+b+c)}$

$\Delta=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ (Heron 公式)

故 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{abc}{4\Delta}\div\dfrac{2\Delta}{(a+b+c)}=\dfrac{abc(a+b+c)}{8\Delta^2}=\dfrac{2abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

不失一般性，假設最長邊為 a，則有

$$
\begin{aligned}
& abc-(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\
& =abc-\left[a+(b-c)\right]\left[a-(b-c)\right](b+c-a) \\
& =abc-\left[a^2-(b-c)^2\right](b+c-a) \\
& =abc-\left[-a^3+(b+c)a^2-(b-c)^2(b+c-a)\right] \\
& =a^3-(b+c)a^2+abc+(b-c)^2(b+c-a) \\
& =a(a-b)(a-c)+(b-c)^2(b+c-a)\geq 0
\end{aligned}
$$

故 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{2abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\geq 2$ (反思 1)

當等號成立時，

$abc-(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=0$

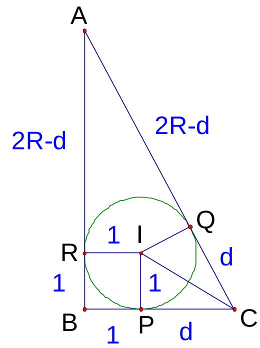
$a(a-b)(a-c)+(b-c)^2(b+c-a)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a(a-b)(a-c)=0 \\ (b-c)^2(b+c-a)=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c$ 證明結束。

此結果同時也說明了若等腰三角形的 Rr 比＝2，則必為正三角形。

成果 2：任意直角三角形的 Rr 比大於等於$1+\sqrt{2}$。不等式中等號成立時，必為等腰直角三角形。

證明：如圖，△ABC 中，∠B＝90°。I 為內心，P、Q、R 為切點。



令 $\overline{IP}$ ＝r＝1，$\overline{CP}$ ＝d ，Rr 比＝k (故 $\overline{AC}$ ＝2R＝2k)。

由畢氏定理 $(1+d)^2+(2k-d+1)^2=(2k)^2$，

整理得 $k=\dfrac{d^2+1}{2d-2}=\dfrac{1}{2}(d-1+\dfrac{2}{d-1})+1$。

因為在直角△ICP 中，∠ICP＝$\dfrac{1}{2}$∠ACB＜45°，

$\Rightarrow$ ∠ICP＜45°＜∠CIP $\Rightarrow$ $\overline{IP}<\overline{CP}$ $\Rightarrow$ 1＜d $\Rightarrow$ $d-1>0$

由算幾不等式 $k=\dfrac{1}{2}(d-1+\dfrac{2}{d-1})+1\geq\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{(d-1)(\dfrac{2}{d-1})}+1=1+\sqrt{2}$ (註 4)

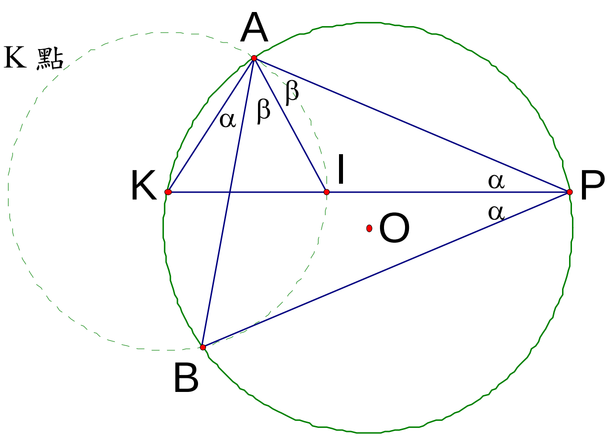
等號成立時，$d-1=\dfrac{2}{d-1}$ $\Rightarrow$ $d=1+\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}=2R-d+1=2k-d+1=2+\sqrt{2}=1+d=\overline{BC}$ 證明結束。

這裡須注意，任意的△ABC 若 Rr 比等於$1+\sqrt{2}$，則△ABC 未必是等腰直角，可以既不是等腰也不是直角三角形！譬如，三邊長為 $1,1,2-\sqrt{2}$ 就是一個 Rr 比等於$1+\sqrt{2}$，但不是直角三角形的例子。

在介紹下一個成果之前，先證明兩個引理：

引理 1：若 A、B 為圓 O 上兩相異點，P 為圓上異於 A 與 B 的任意點，K 為 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點而且 K、P 兩點位於 $\overleftrightarrow{AB}$ 的兩側。則△PAB 的內心 I 落在以 K 為圓心，$\overline{KA}$ 為半徑的圓上。



證明：假設∠APB＝2α，∠BAP＝2β，

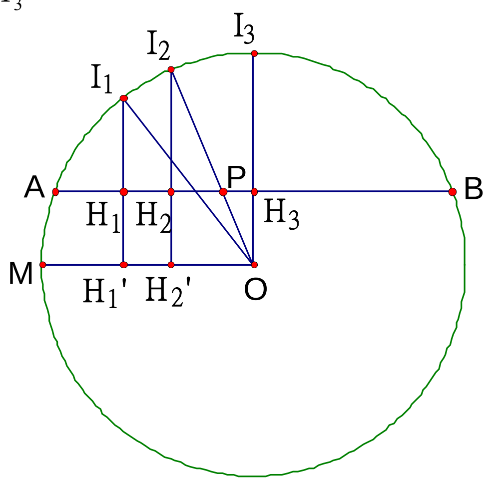
因為 I 是△PAB 的內心，所以 $\overleftrightarrow{PI}$ 平分∠APB 並且過 K 點

$$\Rightarrow \angle KAI = \angle KAB + \angle BAI = \frac{\overset{\frown}{KB}}{2} + \beta$$

$$= \angle KPB + \beta = \alpha + \beta = \angle AIK$$

$\Rightarrow \overline{KI} = \overline{KA}$　　證明結束。

引理 2：若 $\overset{\frown}{MAI_1I_2I_3}$ 是 $\frac{1}{4}$ 圓，O 為圓心，B 為圓上另一點使得 $\overline{I_3O} \perp \overline{AB}$ 且 $\angle I_1OA < \angle I_2OA < \angle I_3OA$，$H_1$、$H_2$ 與 H_3 分別是 I_1、I_2 與 I_3 到 $\overline{AB}$ 的垂足，H_1' 與 H_2' 分別是 I_1、I_2 到 $\overline{MO}$ 的垂足，則有 $\overline{I_1H_1} < \overline{I_2H_2} < \overline{I_3H_3}$。



證明：將△I_1OH_1' 以 O 為中心順時針旋轉 $\angle I_1OI_2$ 後會得到 $I_1 = I_2$、O、H_2'、H_1' 四點共圓，再由

$\angle I_1OM = \angle I_1OA + \angle AOM < \angle I_2OA + \angle AOM < \angle I_2OM$

$\Rightarrow \angle OI_1H_1' > \angle OI_2H_2'$

$\Rightarrow \overline{H_1'O} > \overline{H_2'O}$ (大弧對大弦)

$\Rightarrow \overline{I_1H_1'} < \overline{I_2H_2'}$ (因為等斜邊直角三角形)

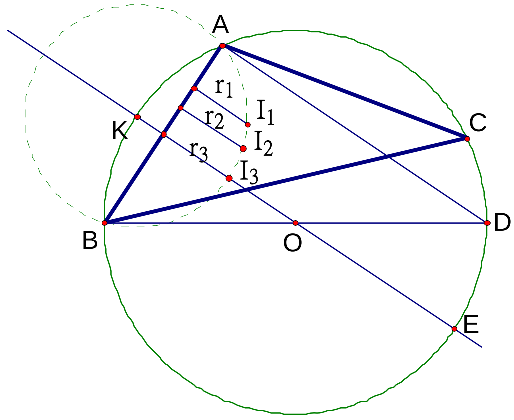
$\Rightarrow \overline{I_1H_1} = \overline{I_1H_1'} - \overline{H_1H_1'} = \overline{I_1H_1'} - \overline{H_2H_2'} < \overline{I_2H_2'} - \overline{H_2H_2'} = \overline{I_2H_2}$

再令 $\overline{I_2O}$ 交 $\overline{AB}$ 於 P 點，則有

$\overline{I_2H_2} < \overline{I_2P} = \overline{I_2O} - \overline{PO} = \overline{I_3O} - \overline{PO} < \overline{I_3O} - \overline{H_3O} = \overline{I_3H_3}$

故 $\overline{I_1H_1} < \overline{I_2H_2} < \overline{I_3H_3}$　　證明結束。

成果 3. 若△ABC 是鈍角三角形，則 $\frac{R}{r} > 1 + \sqrt{2}$。反之不一定成立。



證明：不失一般性令鈍角△ABC 中∠A＞90°，

O 為△ABC 的外心，K 為 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點，

過 B、K 作圓 O 的直徑 $\overline{BD}$、$\overline{KE}$。

I_1、I_2、I_3 分別為△ABC、△ABD、△ABE 的內心，

r_1、r_2、r_3 分別為△ABC、△ABD 與△ABE 的內切圓半徑，
由引理 1 可知，I_1、I_2、I_3 皆落在以 K 為圓心，
$\overline{KA}$ 為半徑的圓 K 上。因為
∠ABC＝180°－∠A－∠ACB＝180°－∠A－∠ADB
＜180°－90°－∠ADB＝∠ABD
所以，$\overset{\frown}{AI_1}=\angle$ABC＜∠ABD＝$\overset{\frown}{AI_2}$，$\angle I_1KA<\angle I_2KA$
另外，因為 $\overline{BD}$、$\overline{KE}$ 皆過 O 點且 B、D、K、E、O 互異，所以 K、E 在 $\overline{BD}$ 的兩側
⇒ ∠ABD＜∠ABD＋∠DBE＝∠ABE ，$\overset{\frown}{AI_2}=\angle$ABD＜∠ABE＝$\overset{\frown}{AI_3}$，$\angle I_2KA<\angle I_3KA$
又 $\angle I_3KA=\overset{\frown}{AI_3}=\angle$ABE ＜90° （等腰△ABE 之底角）而且 $\overline{I_3K}\perp\overline{AB}$
所以，由引理 2 可得 $r_1<r_2<r_3$，令 R 為圓 O 半徑⇒ $\frac{R}{r_1}>\frac{R}{r_2}$。因為△ABD 是直角三角形，由成果 2 的結果可得$\frac{R}{r_2}\geq 1+\sqrt{2}$，故$\frac{R}{r_1}>\frac{R}{r_2}\geq 1+\sqrt{2}$。

反之為何不對？因為$\frac{R}{r}=\frac{2abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$，令 a=b=10000 為一個很大的數，而 c＝1，便製造出一個 Rr 比很大，但卻是銳角三角形的例子。證明結束。

成果 4. 若△ABC 滿足$\frac{R}{r}<1+\sqrt{2}$，則必為銳角三角形。反之不一定成立。

證明：由 成果 2 可知若$\frac{R}{r}<1+\sqrt{2}$，必不為直角三角形。由 成果 3 知鈍角三角形的$\frac{R}{r}>1+\sqrt{2}$，故三角形的 Rr 比若小於$1+\sqrt{2}$，必為銳角三角形。反之，一個銳角三角形有可能是兩腰很長的等腰三角形，而使得$\frac{R}{r}>1+\sqrt{2}$。證明結束。

至於三角形的存在性，亦即給定$\frac{R}{r}$為一個任意數（大於 2），則存在無限多個這種三角形。讀者可參考鄭再添，〈「兩內離圓夾住三角形的條件」解答〉，《數學傳播》第 12 期第一卷。

反思 1

對於不等式 $\frac{abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\geq 1$的證明經歷一個有趣的過程，因為分式裡的每一項皆為正數，所以，我們很自然地想利用「算幾不等式」：

$$(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)\ge 3\sqrt[3]{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

故 $$\frac{abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \ge \frac{abc}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \quad \ldots(A)$$

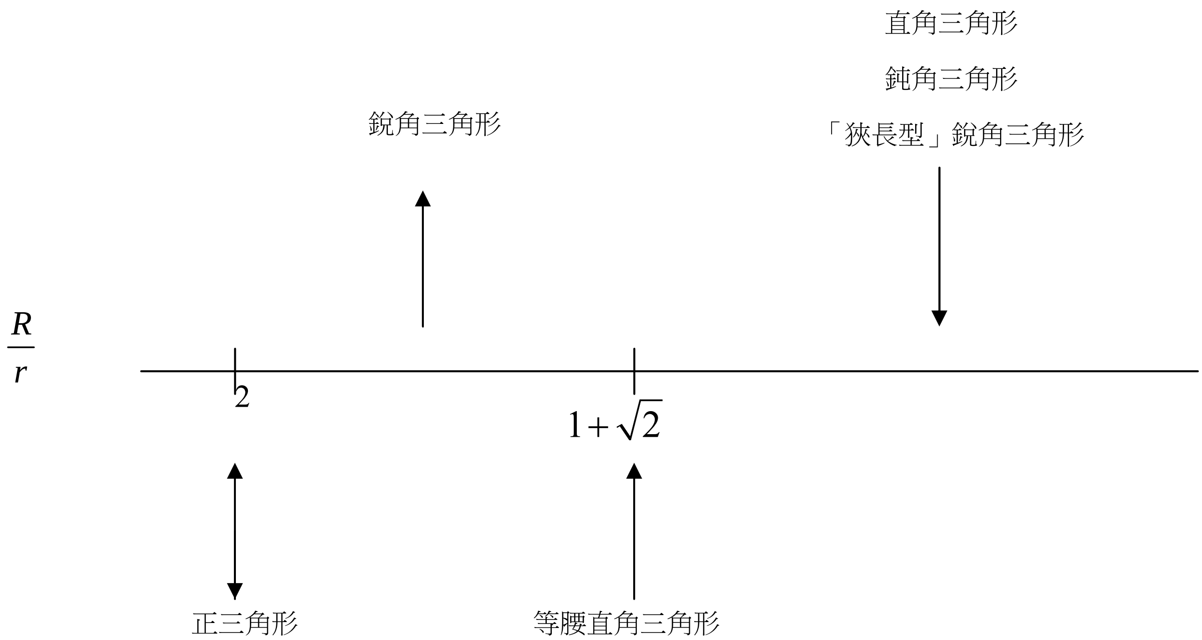
然而，只作了一次估計，就使得不等式陷入萬丈深淵……無論再使用什麼方法，都無法得到想要的結果！因為 a、b、c 之中只要有一個小項，就會使得分子很小，但是分母卻「不太反應」這小項的影響。例如：(a, b, c)＝(3, 3, 0.000006) 時，$\dfrac{abc}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\dfrac{0.000054}{2.000002^3}$ 是一個小於 1 且接近 0 的值，這表示 (A) 式已經失敗，沒有繼續推導的必要。雖然算幾不等式一般來說是保守的估計方法，但探討失敗的原因，是在對分母作算幾估計時，無法保有「產生小項的因素」，導致「分子有小項而分母未必有小項」，而失去原分式對於下界的嚴格限制。這讓我不禁反省：是否因為自己對於工具的了解不夠，而導致一些難以解決的數學問題一直徒勞無功不自知。

反思 2 此種問題對數學學習的影響

評量的目的是能夠幫助學習，找出比較不熟悉的或還沒學會的概念，然而，回過頭來看此選擇題，除了變成了多選題、沒考到要考的概念、各選項之間不互相獨立的毛病外，更糟的是，在「分數決定一切」的大環境下，造成學生不求甚解的態度---將來學數學不論遇到什麼疑問，能像這次一樣得到分數就算了，不必管它是不是真的有反例？

四、結論

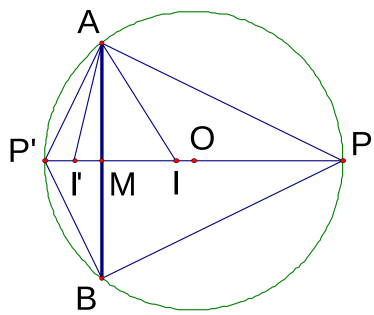
Rr 比是判別三角形的新工具！



其他推論：若 A、B 為圓 O 上兩相異點，P 為圓上異於 A 與 B 的任意點。則△PAB 的 Rr 比最小值發生在 P 位於優弧 AB 而且 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 的時候。

由引理 1 與 2，可得到 P 點必須位於 $\overline{AB}$ 的中垂線上，才會有最大的內切圓半徑，而使得△PAB 的 Rr 比最小。現在令 P 位於優弧 AB 上且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，P’位於劣弧 AB 上且 $\overline{P'A}=\overline{P'B}$。$\overline{AP}$ ＝a，$\overline{AP'}$ ＝b，$\overline{AM}$ ＝d，

由△AP’M～△PAM，得到 $\overline{P'M}=\dfrac{bd}{a}$，$\overline{PM}=\dfrac{ad}{b}$



由內分比性質，得到 $\overline{I'M}=\dfrac{bd}{a}\times\dfrac{d}{b+d}$，$\overline{IM}=\dfrac{ad}{b}\times\dfrac{d}{a+d}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{I'M}}{\overline{IM}}=\dfrac{\frac{bd}{a}\times\frac{d}{b+d}}{\frac{ad}{b}\times\frac{d}{a+d}}=\dfrac{b^2(a+d)}{a^2(b+d)}$，因為 P 位於優弧 AB，

故 $\overline{AP}>\overline{AP'}$，a>b

$\Rightarrow \dfrac{\overline{I'M}}{\overline{IM}}=\dfrac{b^2(a+d)}{a^2(b+d)}=\dfrac{ab^2+b^2d}{a^2b+a^2d}<\dfrac{ab^2+b^2d}{ab^2+b^2d}=1$

$\Rightarrow$△PAB 的 Rr 比＝$\dfrac{\overline{OP}}{\overline{IM}}<\dfrac{\overline{OP}}{\overline{I'M}}$＝△P’AB 的 Rr 比　　證明結束。

機率的大秘密

李政憲
北縣林口國中

第一幕：兩顆骰子的打賭

「噹！噹！噹！噹！……」下課鐘響，小翔與明耘兩人三步併作兩步追上數學老師。「老師！老師！」洪老師回頭，推了推鼻樑上的眼鏡，「哦！是你們啊！有什麼事嗎？」「老師，我們有問題想請教您。」小翔在老師話還沒說完，便一股腦兒地把要講的話說出。

「是什麼問題呢？」

「就是昨天啊！我們家表哥到我家來玩，我們倆閒著無聊，我表哥突然就提議要玩丟骰子遊戲，方法是他作莊，只要我連丟一個骰子四次，至少出現一次一點我就贏。」

「嗯，然後呢？」

「結果不曉得是不是手氣好，玩了半個鐘頭以後，我還小贏他一點呢！」小翔比出勝利的手勢，接著又說：「只是後來他說只丟一顆不過癮，要一次丟兩顆。」

「哦！」

「因為顆數變多，我想機率變小了，所以我們的規則就改變了。」

老師接著問：「怎麼改變呢？」

「連丟二十四次，同樣是出現兩次一點我就贏。」

老師微笑：「嗯，結果呢？」

「這一次幸運之神就沒站在我這裏了，結果後來我所贏的錢又慢慢地輸回去了。」

一直沒說話的明耘開口了：「剛剛我們上一節下課就在辯，他說機率是一樣的，我說應該會不一樣，不然他不會先贏了又輸。」

「你們很有實事求是的精神嘛！小翔，你是怎麼算的呢？」

小翔接著說：「一顆骰子丟出一點的機率是$\frac{1}{6}$，所以連丟四次我贏的機率是$\frac{1}{6}\times 4=\frac{2}{3}$，自然我會贏啦！」接著又像連珠炮繼續下去：「只是我是覺得後來兩顆骰子丟出兩個一點的機率是$\frac{1}{36}$，連丟二十四次後我贏的機率應該是$\frac{1}{36}\times 24$，一樣是$\frac{2}{3}$啊！」

老師轉頭：「明耘，那妳是怎麼想的呢？」

「我是覺得連丟四次的機率應該不可以乘以 4 吧！不然連丟六次不就要乘以 6，一定會出現一次一點了嗎？」

老師微笑：「很好哦！妳把上課時老師說的機率與固定頻率不能誤用，分辨地很清楚呢！」接著又問：「那你們覺得現在應該怎麼算呢？」

明耘接著回答：「我記得這個題目應該要用老師上課提過的『獨立事件聯集定律』來算，應該不能算贏的機率，要反過來先算輸的機率。」

小翔搶著說：「啊！那我知道、我知道。沒有丟出一點的機率是$\frac{5}{6}$，所以連丟了四次

以後，就是$\frac{5}{6}$連乘四次，$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$……，ㄟ……，是多少啊？」

老師接著說：「面對這個計算較複雜的問題，我們只要先知道它的機率是不是超過$\frac{1}{2}$就可以了。你們覺得要怎麼算呢？」

小翔很快就反應：「用計算機就好了嘛！」

明耘想了想，接著說：「如果不用計算機的話，連乘兩次是$\frac{25}{36}$，也就是$\frac{75}{108}$，分子分母各減掉一些，大約是$\frac{70}{100}$，再用 0.7 乘以 0.7 等於 0.49，應該會小於$\frac{1}{2}$吧！」

這時三人正巧走回數學老師的辦公室，老師順手拿了桌上的計算機：「小翔，你算算看。」

只見小翔飛快地按了計算機上的按鍵：「0.482253，哇！明耘，妳好準哦！」

明耘不好意思地笑了笑：「再用互補事件的概念，用一減去輸的機率，贏的機率超過一半，難怪小翔一開始會贏了。」

小翔手沒閒著，按下計算機後，嘴巴接著說：「原來只有 0.51 多，難怪玩了半個鐘頭，我只有贏一點點。」

「可是老師，兩個骰子的機率要怎麼算呢？」明耘問。

「想想看，兩個骰子丟出不是兩個一點的機率是多少？」

兩人異口同聲地說：「$\mathbf{\frac{35}{36}}$！」

「所以呢要丟 24 次？」

「難不成要$\mathbf{\frac{35}{36}}$連乘 24 次？怎麼算啊？計算機一次一次按很累呢！」小翔問。

「如果沒有工程用計算機，這時候就要透過電腦方便計算了。」

只見老師已經把電腦打開，開啟程式按下數字，「答案約為 0.508596，」

明耘接著說：「老師，我想到了！用計算機也可以先計算出連乘 4 次或 6 次的答案，再用這個答案去連乘就可以了。」

「明耘不錯哦！用到我們教過的指數律呢！」老師誇獎。

「所以用 1 去減，所得機率就不到$\frac{1}{2}$，難怪我後來會輸了。」小翔恍然大悟，此時鐘聲再度響起。

「其實機率還有不少故事可以講呢！想不想聽？」老師詢問。

「好啊好啊！」兩人異口同聲。

「那就午休時間再來吧！」

「好，謝謝老師！」

《第一幕完》

第二幕：機率的由來

「報告！」

「哦，是你們兩位啊！請坐吧！」老師帶兩位同學到旁邊椅子坐下。

「謝謝老師。」

「你們知道機率是怎麼來的嗎？」老師詢問兩位同學。

兩人異口同聲：「不知道ㄟ……」

「早在十四世紀時，義大利和荷蘭為了保護商船，成立了海上保險公司，這是將統計調查加以系統化後，針對特別事件推算機率的由來。」

「哇！十四世紀！那不就有五百年以上了。」小翔驚嘆道。

「嗯，其實還在更早的西元前1200年，特洛伊戰爭時就曾以羊骨及狗骨頭製作骰子，讓希臘士兵在圍城時不會無聊。」

「特洛伊戰爭？那不就是『木馬屠城記』的故事嗎？」小翔問。

「那不是故事！是真人真事。」明耘糾正。

「嗯，十九世紀時，已經有考古學者證實真有此事了。」老師補充說明，並接下去說道：「而到了西元前後的羅馬時期，骰子甚至是從皇帝到平民都十分熱衷的遊戲。」

「老師，他們會賭博嗎？」小翔問。

「那是當然的囉！所以後來的羅馬，以至於猶太民族，甚至到中世紀時的基督教會，都曾明文禁止擲骰子或玩撲克牌的遊戲。而在十三世紀時，法國的路易九世也頒佈了禁止擲骰子與製造骰子的禁令。」老師說明。

「所以，他們在玩骰子時，就已經會計算機率了嗎？」明耘問。

「可惜的是這一千多年的歷史，似乎並沒有這兩者直接相關的記載。」老師說。

小翔接著：「我想如果我生長在那個時代，說不定就可以靠機率騙吃騙喝了。」

「我看才不呢！早上是誰在說丟骰子的機率都是固定的呢？」明耘取笑著。

「唉喲！那是人有失蹄……啊不，是馬有失蹄……也不是，是人有什麼的，唉喲！隨便啦！反正就是一時的誤用而已啦！」小翔強辯。

老師笑著接下去說：「失之毫釐，差之千里，不過機率真正開始蓬勃發展，還是跟賭博有關哦！」

「怎麼有關？」兩人問。

「十七世紀時，法國的梅雷（註１）與他朋友的一場賭局中，規定誰先贏得三局，就可以把所有的賭金贏走，可是才玩到一半，賭局被迫中斷，這時梅雷已經贏得兩局，而他的朋友只贏一局。」

「後來呢？」兩人詢問。

「由於賭局無法繼續，因此要以目前的戰績去分配所有的賭金。」

「多少錢啊？」小翔問。

「大概是64枚金幣，只要算出兩人應得的比例就好了。」

小翔嘟囔著：「不會算那個梅什麼的贏就好了嗎？幹嘛那麼辛苦。」

明耘接著：「因為他的朋友也有反敗為勝的機率啊！」

小翔不甘示弱：「可是他贏的機率比較大啊！」

明耘又回一句：「所以才要算兩個人贏的機率與比例啊！」兩人開始口槍舌戰。

「好啦！別吵了，有老師在休息呢！」老師緩頰。

「就像你們所爭的，梅雷也想到同樣的問題，可是他自己無法解決。所以他就請教了他的另一個朋友巴斯卡（註２），希望可以尋求解決的方法。」

「巴斯卡？是國二學乘法公式那個『巴斯卡三角形』的巴斯卡嗎？」明耘問。

「嗯，沒錯，那時他就已經以數學專長聞名於法國了。」老師回答。

「後來呢？」小翔問。

「巴斯卡有了一些想法後，自己也不能肯定是不是正確的，於是就寫信請教了當時的另一位業餘數學家費馬（註３）。」

「是費馬最後定理的發現者嗎？」明耘詢問。

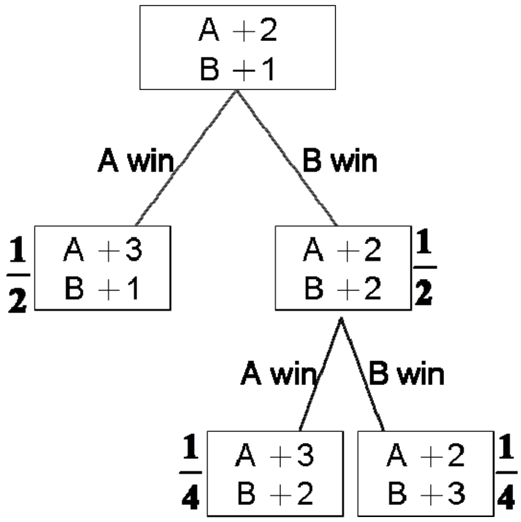
「明耘的書看的不少哦！就是他沒錯。」老師接著：「他們用不同的方式，解決了同一個題目。」

「哇！果然不愧是數學家，真厲害。老師，這就是你常說的一題多解嗎？」小翔問。

老師微笑：「你的反應還蠻快的呢！沒錯，可以這樣說。」

明耘問：「後來這個問題怎麼解決的呢？」

「用個你們比較容易接受的方式說給你們聽好了，」老師拿出了筆，在紙上畫出：



「這是樹狀圖嘛！」小翔說道。

「沒錯！就是你們剛學的樹狀圖，我們以A代表梅雷，B表示的是他的朋友，並假設兩人每一場所贏的機率相同。」老師接著說：「所以如果A再贏一場，遊戲就結果了，這時A贏的機率是$\frac{1}{2}$。」「哦！所以另一邊是B贏的$\frac{1}{2}$，可是這時遊戲還沒結束，」

明耘接著說：「所以要再比一場，這時兩人所贏的機率相同，所以機率是原本$\frac{1}{2}$的一半，也就是各$\frac{1}{4}$了。」

小翔搶著說：「再來我知道！因為A兩種方式所贏的機率是互斥的，所以根據加法原理，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，所以他的朋友贏的機率就只有$\frac{1}{4}$，也就是賭金按照3:1的比例去分配就可以啦！」

「小翔開竅了呢！看來有動腦筋還是有差哦！」老師誇獎，小翔不好意思地摸摸頭。

「你們有不少同學覺得樹狀圖簡單，卻不知道有時候複雜的問題，反而要用最簡單的方法去解決。所以啊！不要說數學沒用，有時候常常是……」

兩人異口同聲：「人沒用！」

老師笑著：「離下課還有點時間，想不想了解一下數學家巴斯卡？」

「好啊好啊！」兩人回應。「那我們就繼續囉！」

《第二幕完》

第三幕：數學家巴斯卡與巴斯卡三角

「小翔，你喜不喜歡玩電腦？」老師詢問。

「喜歡啊！可是老師，你不是要講巴斯卡嗎？」小翔回答。

「所以你得好好感謝巴斯卡啊！因為是他發明了第一架數字計算機，也就是現在電腦的始祖呢！」「真的啊！那他的目的是要做什麼的呢？」明耘問。

「因為他要幫他的父親計算收稅，所以在19歲時，自己就設計製造了當時第一架的數字計算機，也因此聞名於當時。」

「哇！好厲害哦！19歲呢！」小翔讚嘆著。

「他以他的專長幫父親解決問題，也算是盡點孝道。不過在這之前，他的父親曾經一度禁止他念數學呢！」老師說。

明耘接著問：「為什麼呢？」

「因為他從小的身體就不好，又常常讀數學讀得廢寢忘食，為了不影響他語文的學習，所以在他15歲以前，他的父親禁止他讀數學禁了一段日子。」

「天啊！讀數學讀到這種地步，這個我絕對作不到。」小翔苦笑，

老師接著：「說不定只是時候未到呢！不過後來發現禁止他反而可能會讓他覺得更痛苦，所以沒多久就放棄了。」

「嗯，有時候自己想做的事被逼著不能去做，也是蠻痛苦的。」明耘回應，小翔接著：「像每次段考前我媽媽都會禁止我玩電腦，我就會覺得很痛苦。」

「其實他的父親是個數學愛好者，有著不少的藏書，巴斯卡甚至還在 12 歲的時候，根據父親對他講過的一些幾何知識，自己對獨立研究，證明了『任意三角形的內角和都是 180 度』；從那天開始他的父親就不再限制他，甚至還主動拿出了幾何的經典書籍『幾何原本』讓他閱讀，也因此他在 13 歲的時候就發現了『巴斯卡三角形』。」老師解釋著，並接著說：「然而不再限制以後，他在 16 歲那年受笛卡兒（註４）的影響發現了『巴斯卡定理』（註５），並根據這個定理寫了四百多篇的論文。」

明耘接腔：「老師，寫一篇論文不是要花不少時間嗎？四百多篇論文應該要寫很久吧？！」

「所以你們可以感受他對數學的天才與狂熱了吧！其實他不但對數學有興趣，對於物理學的貢獻也不遺餘力，在他二十三歲時所作的托里切利實驗（註６），證明了空氣有壓力，製作了水銀氣壓計，還轟動了當時的法國一陣子。」老師說，小翔接著：「這個自然

老師有說過！所以壓力計算單位有一個就是以他的名字來命名的。」

老師又說：「嗯，也因為他發明了第一台的手搖計算機，可以計算六進位的加減法，所以有種計算機語言也以他的名字來命名。」

「再加上他在機率上的貢獻，那他真是數學與自然不可或缺的人才呢！」明耘說，老師接著：「可惜的是在他 31 歲時，他在巴黎乘馬車發生意外，差點掉到河裏去，他受驚後覺得是神明庇護，於是決定放棄他的研究，改去研究神學。」

「好可惜哦！」小翔婉惜地說，老師又接著：「不過還是不少數學家受到他影響，像萊布尼茲（註７）就是讀了他的著作，才建立了微積分的理論。」

「好啦！歷史講的差不多了，我們來看點數學吧！」老師一邊說，一邊在紙上畫出下列圖形：

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

兩人異口同聲：「巴斯卡三角！」

老師微笑：「有誰還記得它上面的數字是怎麼來的嗎？」

「這個我知道！」小翔搶著回答：「上面的兩個數字加起來等於下面那個數字，1+1=2，1+2=3，3+3=6，還有 5+10=15 都是這樣算的！」

老師接著問：「要怎麼用它呢？」

明耘回答：「我還記得可以計算 $a+b$ 的 n 次方的係數吧？！所以第一層的 1 代表的是 $a+b$ 的 *0* 次方等於 1，第二層的兩個 1 代表的是 $a+b$ 的 *1* 次方分別是 a 與 b 的係數等於 1，第三層的 1、2、1 代表的是 $a+b$ 的 *2* 次方分別是 a^2、ab 與 b^2 的係數等於 1、2 與 1，所以 $a+b$ 的 *3* 次方各項的係數就是 1、3、3、1 了……」

老師接著：「沒錯！現在試著把 a 與 b 都換成 1，」

小翔馬上接著：「這個簡單！1+1 的 *0* 次方等於 1，1+1 的 *1* 次方等於 2，1+1 的 *2* 次方等於 4，……，所以 1+1 的 *5* 次方等於 32，老師，是這樣嗎？」老師接著說：「嗯，再看看原來的巴斯卡三角，把各列的數字加起來看看……」

明耘恍然大悟：「哦，我知道了！所以 1+1=2，1+2+1=4，1+3+3+1=8，依此類推，巴斯卡三角的各列和是 2 的次方！」

老師：「是的，接著再看看各列的整體數字，」老師一邊說，一邊將巴斯卡三角的各列用鉛筆畫上底線，圖形如下：

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

「觀察一下，第二行跟第三行的數字有什麼關係？」老師問。

「第二行 11，第三行 121，是 11 的 2 次方。」明耘回答。

「所以呢？」老師又問。

小翔接著回答：「難不成是 11 的次方……，0 次方是 1，1 次方是 11，2 次方是 121，3 次方……老師，計算機借我一下……1331，真的ㄟ！可是老師，那兩位數以上，像 10、15、20 這些數字怎麼辦呢？」

老師回答：「就像小翔講的，真的是 11 的次方，可是如果遇到兩位數以上，就自動進位到前面一個數字，像 10 就寫 0 進 1，所以第 6 列就是 161051，第 7 列就是 1771561。」

明耘回應：「好神奇哦！沒想到 2 和 11 看起來沒什麼關係，在巴斯卡三角形裏居然會有交集呢！」

老師微笑：「這就是數學可愛而迷人的地方啊！再看一個例子，」老師邊說邊把剛剛畫上的橫線擦去，再重新畫上線：

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

「現在把各條斜線上的數字加起來，一個個把數字唸出來，」老師要求。

「1，1，2，3，5，8，11……老師，有什麼規律嗎？」小翔問。

「沒感覺就把數字寫出來吧！」老師又要求。

明耘很快地拿筆寫出數字：「嗯，是費氏數列呢！」

「費氏數列？是那個兔子數列嗎？真的ㄟ！沒想到換個方向看，又會有不同的答案。」小翔說。

「只是上面幾種結果，雖然是從巴斯卡三角觀察而得，卻未必是巴斯卡所發現的。最

後我們從巴斯卡三角，再回到機率上面來吧！」老師邊說，邊拿出幾個硬幣。

「請問你們，丟一枚硬幣，可以產生的可能性有幾種？」老師問。

「正面跟反面！」小翔答。

「兩面出現的機率呢？」老師接著。

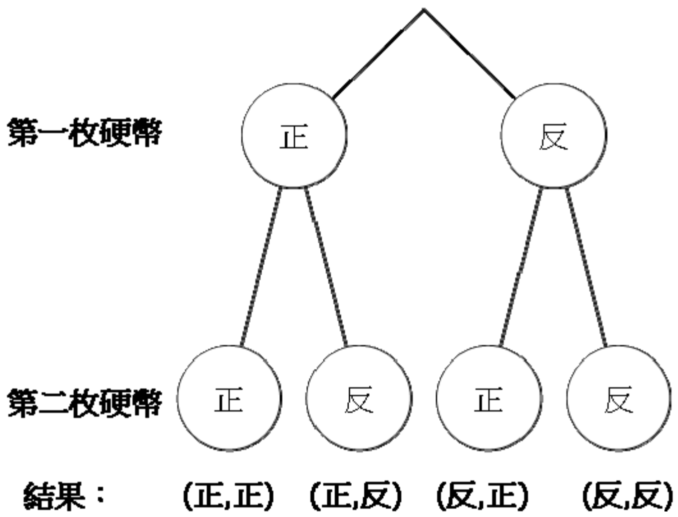
「如果是均勻硬幣的話，就是各$\frac{1}{2}$。」明耘回答。

「嗯，很好，現在換成兩枚硬幣，可以產生的可能性呢？」老師問。

「我知道！兩個正面、兩個反面，還有一正一反。」小翔答。

「那三種狀況出現的機率呢？」

「可以利用樹狀圖來解嗎？」明耘一邊說，一邊在紙上畫著：



「四種結果的機率相同，而（正,反）與（反,正）是同樣的結果，所以三種結果的機率分別是兩個正面出現的機率是$\frac{1}{4}$，一正一反出現的機率是$\frac{1}{2}$，而兩個反面出現的機率也是$\frac{1}{4}$。」明耘接著回答。

「所以三種狀況的數值比？」老師問。

「分母通分為 4，所以分子的比是 1:2:1！」小翔答。

「跟剛剛一枚硬幣兩面出現的機率比作比較呢？」老師問。

「1:1 跟 1:2:1……ㄟ！難不成又是巴斯卡三角？」小翔問。

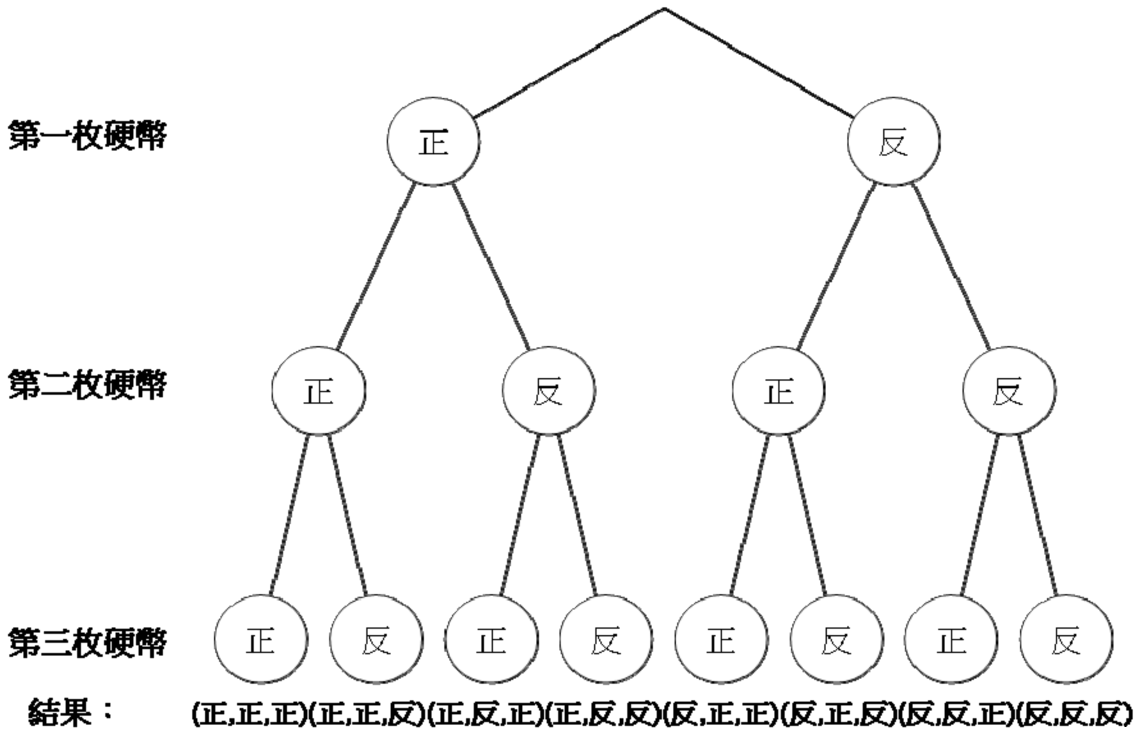
「沒錯！所以你們再猜猜看，下面一列的 1:3:3:1 代表的是什麼意思？」老師問。

「從一個硬幣到兩個硬幣……，所以接下來是三個硬幣囉？」小翔答。

「嗯，總共是 8 種結果，而三個硬幣出現的情形共有三個正面，兩正一反，一正兩反，以及三個反面四種情形，所以分別的機率就是$\frac{1}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{1}{8}$，老師是嗎？」明耘邊答邊問。

「你們可以用樹狀圖驗證看看啊！」老師答。

「這個我來！」只見眼明手快的小翔拿起筆，在明耘畫的圖上再加幾筆，圖形如下：



「哇！好壯觀哦！」小翔畫完後邊說。

「兩正一反總共有三種情形，兩反一正也有三種情形，所以各佔 $\frac{3}{8}$ 。」明耘接著說。

「再加上頭尾的三正面與三反面都是 $\frac{1}{8}$ ，真的像我們所預測的結果呢！」小翔回應。

「嗯，你們都很清楚了，所以四個硬幣以上的話，是不是用巴斯卡三角會比較容易呢？」老師問。

「是的！」兩人異口同聲回答，小翔又接著說：「用樹狀圖就累多了。」

老師微笑：「不過別忘了，樹狀圖還是基本概念呈現，最基本而重要的解法哦！」

「是的，老師！」兩人再一次回答，此時下課鐘聲響起。

「好啦！剛好下課了，下次有機會的話，再聊聊其他的數學家吧！」

「好，謝謝老師！」兩人回答，退出辦公室。

《第三幕完》

註解

註１：梅雷 (C. de Mere, 1607～1684)，法國騎士。

註２：巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623~1662)，法國數學家。

註３：費馬 (Pierre de Fermat, 1601~1665)，法國業餘數學家，遺留「費馬最後定理」困擾後世數學家近四百年。

註４：笛卡兒 (Rene' Descartes, 1596-1650)，法國哲學家、生物學家、物理學家暨業餘數學家，發明了「座標平面」(the coordinate plane)。

註５：巴斯卡定理「圓錐曲線裏的內接六邊形對邊的交點是共線」，是射影幾何學的一個基本原理。

註６：托里切利實驗，製造水銀氣壓計的基本理論依據，也是日後流體靜力學及流體動力學的先驅。

註７：萊布尼茲 (Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646-1716)，德國數學家，獨立創立微積分的基本概念與算法，和牛頓共同奠定了微積分學。

參考資料

一、書籍部份：

1. 《機率的大秘密》，原著 Kjartan Poskitt，全美出版。
2. 《機率好好玩》，張振華著，博雅書屋。
3. 《大於 1/2 — 投資、愛情、生活的獲勝機率》，原著 Amir D. Aczel，邱文寶譯，究竟出版。

二、網頁部份：

1. 台灣數學博物館 — 賭徒的困惑：
   http://museum.math.ntnu.edu.tw/fulltext/008_1234940968.pdf
2. 機率學習館：
   http://eprob.math.nsysu.edu.tw/ProbHistory/未完成賭局之賭金分配.htm
3. 奇摩知識＋ — 特洛伊戰爭：
   http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1206041205424
4. 奇摩知識＋ — 木馬屠城記：
   http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1609070908429
5. 數學家的故事 — 巴斯卡：
   http://www.dyu.edu.tw/~mfht206/history/17/france.htm
6. 維基百科 — 布萊茲・帕斯卡：
   http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B8%83%E8%8E%B1%E5%A3%AB%C2%B7%E5%B8%95%E6%96%AF%E5%8D%A1
7. 昌爸工作坊 — 巴斯卡：
   http://www.mathland.idv.tw/history/pascal.html
8. 奇摩知識＋ — 數學家 萊布尼茲：
   http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1607102705237
9. 奇摩知識＋ — 費馬最後定理
   http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1206041304644
10. 數學史 — 笛卡兒：
    http://history.math.fcu.edu.tw/html/chap5/5_1.htm

三、簡報部份：

1. 陳彩鳳老師：楊輝 (賈憲) 三角形（Pascal's Triangle）— 巴斯卡. ppt
2. 李政憲老師：How to Gamble If You Must - How to Gamble If You Must. ppt

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）葉吉海（陽明高中）
新竹市：洪誌陽、李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士勳、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
台南縣：李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！