HPM通訊

第十三卷 第六期 目錄（2010年6月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

說故事與數學結合的好處

洪萬生
台師大數學系退休教授

本文這一題目取自美國教育家麥可‧洛克 (Mike Lockett) 的《大師教你說故事》(*The Basics of Storytelling*) 第六章〈故事延伸教學〉中的一小節，其說法與我們 HPM (Relations between of History and Pedagogy of Mathematics) 的訴求相當一致，值得在此引述：

> 一天說或是讀 15 分鐘的故事給小孩聽，可以幫助他們增加字彙（包含數學領域），還能幫助他們解答數學問題。利用說故事的方法，有助於兒童在解答數學問題時想像實際的情況。在課堂中說故事，可以讓兒童在故事的情境中練習計算、測量、圖表、排序、圖形等相關的數學技巧。偉大數學家的故事可以激發學生鑽研數學領域的想法。故事可以幫助學生從不同的角度思考問題，也能讓他們找出和他人合作的新方法，共同解決目前和未來的問題，也減少某些學生數學算不好的恐懼。

換言之，說故事可以引領學生進入數學知識的相關脈絡或情境，鼓勵他們進行「在地思考」(thinking in context)，從而賦予解答活動之（學習）意義。同時，也可以鼓勵學生從不同的角度思考問題，並積極尋求與他人合作的策略與方法。這些說真地，還相當呼應了目前十分時髦的九年一貫數學教學法呢。

麥可‧洛克當然不是只有這些「說說」而已，就一個著名的說書人而言，他的本事可多著呢。譬如說吧，在〈說故事與自然科學的連結〉這一小節中，他也指出：

> 說故事是介紹新的科學主題與課程最好的開場白。當中所有的發明、新發現、還有科學原則的背後，都有一個故事或是敘述性的歷史可以告訴學生。故事可以幫助學生瞭解關於這個世界的「如何」以及「為什麼」，這有助於他們對現實世界事情發生的方式與原因，有自己的想法。告訴學生這些故事，讓他們有能力決定何者為真實，何者為虛構；什麼是可能的，什麼是科學上是不可能的。不論是植物、動物、鳥、海洋生物、昆蟲等為主題的故事，都可以讓學生從中學到分析技巧。說故事能幫助學生的聆

聽能力、問題解決能力，有助於學生學習科學。至於在數學方面，偉大科學家的故事也能影響學生，讓他們對科學發生更多興趣。

此外，本書還提出其他學科或領域的延伸教學，比如故事如何結合閱讀和語言、如何結合音樂、如何結合社會科、如何結合藝術、如何結合烹飪及點心等等，可見，他被推許為世界知名的說故事達人，的確當之無愧！

就一個身體力行的說書人而言，說故事的立論基礎 (rationale) 何在，當然也必須稍加澄清，因此，麥可・洛克在本書第一章便以〈淺談說故事〉為題，說明「何謂說故事？」、指出「說故事的目的」與「說故事的好處」，以及他自己終身以之的「說故事教育法」。最後這一點當然與目前頗受矚目的教育研究議題有關，除了本書所提供的〈把故事延伸到數學的方法〉等等之外，有興趣讀者應該可以自行參考其他相關文獻。

最後，我們還可以指出麥可・洛克針對說書的現身說法，不僅旁徵博引，而且每能就近取譬。譬如說吧，他來台訪問時，曾對故宮博物院收藏的鐘鼎極感興趣，他「忍不住將製作故宮文物的工匠，比喻成說故事的人。故人已遠，無法解釋或重述那些製作過程和淵源，但是這些文物所蘊藏的中國歷史，已經深深打動前來故宮參觀的遊客。」其實，我們也可以將那些數學家比喻成為說故事的人，尤其是針對《九章算術》的不知名作者或生平事蹟不詳的歐幾里得，如何設身處地或者進行在地思考，將會決定我們所說的故事是否動人！

參考文獻

Mike Lockett (2008).《大師教你說故事》(李郁淳中譯)，台北：師德文教股份公司。

洪萬生、林芳玫 (2010).〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉，本專欄。

洪萬生 (2010).〈數學家傳記：以科普作品為例〉，本館數學家傳記專欄。

插值多項式的教與學問題及其學習單設計

蘇惠玉
台北市立西松高中

一、前言

高中數學課程在繼 88 課程綱要結束之後，95 暫綱也即將邁入尾聲，高中數學即將迎接一個全新的年代，全新的改變會帶來衝擊是一定的，但是，高中數學教師如何在上層決定的改變之下「生存」？是以不變應萬變？還是應該要順應潮流走？

新課程綱要首先最為教師們不解的是：為什麼課程單元順序要做這樣的調整？用意何在？一般數學教師並沒有看到所謂的《課程綱要專刊》，因此不瞭解改變的前因與用意，只看到公告的綱要主題與大概內容，這要讓第一線的老師如何將新課綱的精神在教學過程中傳達給學生？同時對用意的不瞭解，也容易增加教師對新課綱的排斥，老經驗的教師們甚至決定忽略新課程，自己調整教學順序，那可能又將高中數學帶回 88 課綱的內容了。

新課綱的第二個問題，是教師對新課程中新增加或刪減內容的用意不夠瞭解。在不瞭解新單元內容增加的用意之下，不瞭解其精神的情況下，編寫教材或教學中，就不容易切中要旨，從而課綱主導群的教授們所要傳達的數學意涵，即使教師順應新課綱的變化作調整，也容易流於零碎，最終恐怕造成整個高中數學課程的不連貫與無意義的學習方式。

在本文中，筆者先從插值多項式著手，就個人的教學經驗，以及目前所能看到的幾家版本的教科書內容，試著設想一位教師在面對這個單元時，可能會產生的教學問題，並藉此讓自己與其他數學教師共勉，及早因應與準備新課綱所帶來的教學挑戰。最後，筆者將嘗試設計一份學習單，希望能讓學生在瞭解課綱的精神下，能更有效的建立自己的學習意義。

二、99 課程綱要必修課程數學 I

時間分配：每學期四學分，每週授課四節。
數學 I（函數）：處理連續量有關的課題
（新增單元或內容與教學重點改變之處（加●的部分）為筆者所整理）

主題	子題	內容	新增單元或內容	備註（教學重點改變之處）
一、數與式	1.數與數線 2.數線上的幾何	1.1 數線上的有理點及其十進位表示法 1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係 1.3 乘法公式、分式與根式的運算 2.1 數線上的兩點距離與分點公式 2.2 含絕對值的一次方程式與不等式	1.2 實數的十進位表示法 1.3 $(a+b)^3$、$(a+b+c)^2$、$(1\pm x)(x^2\mp x+1)$ 的乘法公式；繁分式化簡 2.2 三角不等式	1.2不含非十進位的表示法 ● 不含雙十字交乘法

二、多項式函數	1.簡單多項式函數及其圖形 2.多項式的運算與應用 3.多項式方程式 4.多項式函數的圖形與多項式不等式	1.1一次函數 1.2二次函數 1.3單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移 2.1乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用、插值多項式函數及其應用 3.1二次方程式的根與複數系 3.2有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$ 的意義 3.3實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理 4.1辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	1.3 $y=x^n$，n=1, 2, 3, 4圖形，平移畫出 $y=c(x-h)^n+k$ 2.1 插值多項式 3.1 簡易分式方程式如 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$ 3.2 正n次方根存在性與唯一性證明	1.3僅介紹 4次（含）以下的單項函數 ● 強調對稱x軸、y軸、原點 ● 1次函數強調變化率與斜率意涵及 $y=mx+b=m(x-x_0$ 中m, b, x_0的幾何意涵 2.1不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次 ● f(x)除以(x-a)(x-b)的餘式為通過(a, f(a)), (b, f(b))的插值多項式 ● 透過因式定理證明插值多項式的唯一性（可於高三複習時證明） 3.1不含複數的幾何意涵 ● 3.2 $\sqrt[n]{a}$ 的意義 ● 3.3 實係數方程式可分解成一次式或二次式的乘積 4.1不含複雜的分式不等式
三、指數、對數函數	1.指數 2.指數函數 3.對數 4.對數函數 5.指數與對數的應用	1.1指數為整數、分數與實數的指數定律 2.1介紹指數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性） 3.1對數的定義與對數定律 3.2換底公式 4.1介紹對數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性） 5.1對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號 5.2處理乘除與次方問題 5.3等比數列與等比級數	2.1 凹凸性	3.2換底公式不宜牽涉太過技巧性與不實用的問題 5.1不含表尾差 ● 對數函數的換底是在值域上的伸縮，即 $\log_a x=\frac{1}{\alpha}\log x,\alpha$ ● $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow$ $\frac{\log a+\log b}{2}\le\log(a$ （直觀介紹） ● 簡單介紹等比數

		5.4由生活中所引發的指數、對數方程式與不等式的應用問題	5.4 生活應用問題的解釋	列與級數，不含無窮等比，此時只觀察等比現象，等比級數公式於數學II中再教，以螺旋方式處理等比數列的學習。
附錄	認識定理的敘述與證明	介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法（含 2為無理數的證明）		

99 課綱中最為數學教師不解與頭痛的問題，應該就是插值多項式了。在課綱的專刊說明中提到：

> 在一般多項式的應用中有兩個課題，一是多項式的求值，一是插值多項式。原則上多項式可以透過四則運算求值，也因為如此，多項式被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值。另外，多項式也被用來作為插值的工具。插值的方法很重要，它用少量的數據表現連續型的資訊，展現數學的效率與精確性。

在以除法為核心方法來處理多項式問題的精神下，新課綱強調的是數學「化繁為簡」的精神。

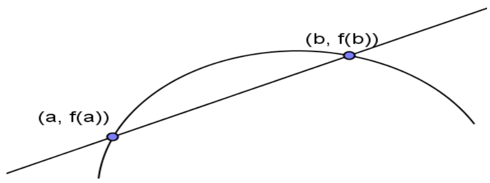
然而關於插值多項式，有幾個點不管從教師的教學或學生的學習角度來看，都是很難理解的，譬如：

1. 插值多項式被放入教材中的正當性，來自於課綱中所要強調的多項式的應用：「多項式被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值」。對學過高等微積分的數學教師們，對這一點的理解與認同，當然不成問題，但是，對函數只學過一次、二次及 $y=x^3$，$y=x^4$ 的高一學生而言，這句話簡直如同天書一般難以理解！課綱似乎也只要求學生知道這個結果就好了，然而，數學教師又該如何對一些較好學與好問的學生解釋？好像也只能跟學生講：「你以後學到更高深的數學就懂了。」在幾乎是高一上學期開學後的第二個月，就下這樣的猛藥好嗎？

2. 假設學生都能接受用多項式去逼近一般函數，接下來就是「插值多項式」名詞的解釋。教師必須自己理解何謂「插值多項式」，它的數學意涵是什麼？該如何解釋給學生瞭解？所謂「插值多項式」，筆者的理解為利用已知點，來逼近函數的多項式。

3. 在瞭解何謂「插值多項式」之後，在課綱中強調教師必需讓學生瞭解「$f(x)$除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式為通過 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的插值多項式」。何意？因為多項式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式 $r(x)$為一次式，且 $x=a$ 時，$r(a)=f(a)$，$x=b$ 時，$r(b)=f(b)$，因此餘式 $r(x)$為通過 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的一次多項式，也是通過 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的割線，因此，可當成是已知 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 時，用來逼近 $f(x)$的多項式，也就是說，可以用來求在 $x=a$ 與 $x=b$

之間的 f(x) 的近似值。



4. 接著為過三點的插值多項式。首先，通過三點 (1, 1), (2, 3), (3, 7) 的多項式可假設成 f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)，這樣的假設方式，來自於一個多項式除以(x-1)(x-2)(x-3) 的餘式，學生並不那麼容易瞭解這樣的假設方式，以筆者的教學經驗，在教學中大概會有一半以上的學生不能馬上理解，即使接受了，也因為不夠自然而容易忘掉。同時，這樣的假設形式又如何與函數的近似值作連結？

再者，過三點(1, 1), (2, 3), (3, 7)的「插值多項式」，為何要以這麼複雜的形式表示：$f(x)=1\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+7\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$？如何讓學生建立學習動機與建構出學習意義？我們似乎只能以後見之明，跟學生說「這樣的假設方式合乎條件」而已！另一個問題，是通過三點(1, 1), (2, 3), (3, 7)的「多項式」與過三點 (1, 1), (2, 3), (3, 7) 的「插值多項式」有何差別？找出來的多項式表徵不同，但是又可利用這兩個多項式來證明唯一性（也就是這兩個多項式相同），既然如此，又何必學這麼困難的拉格朗日差值多項式呢？所以，如果學生有這樣的問題，身為教師的我們是否可以解釋得清楚這兩者的差別，以及強化學生的學習動機呢？

三、插值多項式的學習單設計

針對前面筆者所提的幾個問題，筆者嘗試設計一分學習單，藉由問題設計的引導，讓學生慢慢的理解何謂插值多項式，以及其精神所在。最後，更藉由「大衍求一術」，也就是所謂的中國剩餘定理，將數字中以餘數問題返回推被除數的方法，與拉格朗日插值多項式的假設方法作一個簡單的類比，期望藉此能更輕易地建立學生對拉格朗日插值多項式的合理性之接受度。

函數近似值與插值多項式學習單

Card 1. 已知多項式，求近似值

設 $f(x)=x^3-5x^2+6x+3$，

(1) f(1)=? f(2)=?

(2) 若 $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，a, b, c, d=?

(3) 求 f(1.1)的近似值

Card 2. 已知多項式的兩點，求近似值

設 $f(x)=x^3-5x^2+6x+3$，

(1) 若 f(x) 除以 (x-1) 餘 5，除以 (x-2) 餘 3，則 f(x) 除以 (x-1)(x-2) 的餘式為何？

(2) 求過(1, 5), (2, 3)的直線方程式。

(3) 求 f(1.1)的近似值。

Card 3. 已知多項式的三點，求近似值

(1) 求過三點 (1, 5), (2, 3), (3, 3) 的多項式 g(x)

(2) 若一多項式 f(x)，f(1)=5, f(2)=3, f(3)=3，求 f(1.1) 的近似值。

Card 4. 中國剩餘定理（大衍求一術）

(1) 已知一數 n 被 3 除餘 2, 被 5 除餘 3，則此數 n 為何？

解：先找除以 3 餘 1 與除以 5 餘 1 的數：

除數 / 被除數	3	5
M_5：10	5 的倍數，被 3 除餘 1	5 的倍數，被 5 除餘 0
M_3：6	3 的倍數，被 3 除餘 0	3 的倍數，被 5 除餘 1

被 3 除餘 2，所以取 2×10；被 5 除餘 3，所以取 3×6，因此 n=2×10+3×6=38

(2) 已知一數 n 被 3 除餘 2, 被 5 除餘 3，被 7 除餘 2，則此數 n 為何？

解：先找先找除以 3 餘 1、除以 5 餘 1、除以 7 餘 1 的數：

除數 / 被除數	3	5	7
$M_{5,7}$： 5×7×2=70	5 與 7 的公倍數， 被 3 除餘 1	5 與 7 的公倍數， 被 5 除餘 0	5 與 7 的公倍數， 被 7 除餘 0
$M_{3,7}$： 3×7=21	3 與 7 的公倍數， 被 3 除餘 0	3 與 7 的公倍數， 被 5 除餘 1	3 與 7 的公倍數， 被 7 除餘 0
$M_{3,5}$： 3×5=15	3 與 5 的公倍數， 被 3 除餘 0	3 與 5 的公倍數， 被 5 除餘 0	3 與 5 的公倍數， 被 7 除餘 1

被 3 除餘 2，所以取 2×(5×7×2)；被 5 除餘 3，所以取 3×(3×7)，被 7 除餘 2，所以取 3×(3×5)，因此

n=2×(5×7×2)+ 3×(3×7)+ 2×(3×5)=2×70+3×21+2×15=233

n 最小為 233-3×5×7×2=233-105×2=23

Card 5. 已知函數三點，求近似值

(1) 求過三點(1, 5), (2, 3), (3, 3)的插值多項式 g(x)

解：g(x)的假設方法：

除式 / 多項式	(x-1)	(x-2)	(x-3)
$K_{2,3}(x)$：$\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$	(x-2)與(x-3)的公倍式，被(x-1)除餘 1	(x-2)與(x-3)的公倍式，被(x-2)除餘 0	(x-2)與(x-3)的公倍式，被(x-3)除餘 0
$K_{1,3}(x)$：$\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$	(x-1)與(x-3)的公倍式，被(x-1)除餘 0	(x-1)與(x-3)的公倍式，被(x-2)除餘 1	(x-1)與(x-3)的公倍式，被(x-3)除餘 0
$K_{1,2}$：$\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$	(x-1)與(x-2)的公倍式，被(x-1)除餘 0	(x-1)與(x-2)的公倍式，被(x-2)除餘 0	(x-1)與(x-2)的公倍式，被(x-3)除餘 1

被 (x-1) 除餘 5，所以取 $5\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$

被 (x-2) 除餘 3，所以取 $3\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$

被 (x-3) 除餘 3，所以取 $3\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

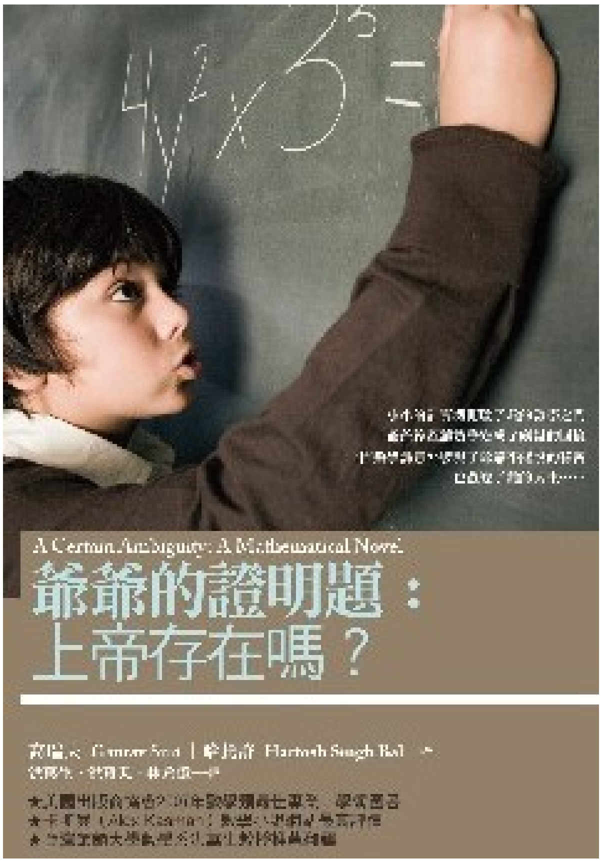
故取 $g(x)=5\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+3\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

(2) 若一函數連續 f(x), 已知 f(1)=5, f(2)=3, f(3)=3，求 f(1.1)的近似值。

充滿夢想、真理及愛的故事 — 《爺爺的證明題》

林怡寶、翁康鈞
台灣師範大學數學系 3 年級

書名：爺爺的證明題：上帝存在嗎？
A Certain Ambiguity：**A Mathematical Novel**
作者：高瑞夫 **Gaurav Suri**
哈托許 **Hartosh Singh Bal**
中譯者：洪萬生、洪贊天、林倉億
出版社：博雅書屋
出版年：**2009** 年
頁數：**311** 頁



一、楔子

書架上擺滿了各式各樣的書籍，但一眼掃過去後，目光就被這本書的書名給吸引了。這世界充滿了各種不同的信仰，像是佛教、基督教、印度教……等等，有人選擇信奉上帝，有人則選擇信奉神明，但到底人們所說的上帝（或是神明）到底存不存在呢？

或許是因為兩位筆者都是屬於無神論者，雖然沒有特別去信奉某一個宗教，但是對於人們口中所說的上帝或神明還是抱有一定的好奇心，故在好奇心驅使下，便將書取下來翻閱，卻意外發現這竟是本與數學有關的書，令筆者心裡不經心生疑問：為什麼上帝存不存在會和數學扯上關係呢？於是引發筆者的興趣。本篇書評全篇係由兩位筆者討論過後，共同書寫。本篇共分成四大節：楔子、內容介紹暨數學知識、結論及弦外之音。第二節我們將本書內容規結成起、承、轉、合四大部份，並在每個部份後加上其囊括之數學知識。第三節，我們將針對全書的觀感及特點進行描述。第四節則是筆者的個人想法。怡寶在討論過程中，不斷賜予康鈞不一樣的看法，此次合作十分愉快！康鈞在此特別感謝怡寶！也在此致謝洪老師給我們如此機會書寫本次書評！也特別感謝郭君逸老師不吝將此書外借於康鈞！本書評的形式係效颦台灣數學博物館中眾多書評，若讀者對本書評有疑問之處，歡迎讀者提出來與筆者分享！感謝！

大部分的人都對數學敬而遠之，認為數學是他們碰不得的領域，只可遠觀而不可褻玩焉，但此書很巧妙的將數學帶入了平易近人的小說裡，利用“確定性”的問題將宗教與數學搭上線，以兩條故事為軸，穿插著“加料的”數學史實及虛擬場景，帶領讀者進入數學哲學的旅程。

究竟如何從數學的角度來思考確定性呢？數學是美麗的嗎？數學的美麗與確定性又有何干？我們又該怎麼利用確定性來證明上帝到底有沒有存在呢？透過這個充滿夢想、真理及愛的故事，讓我們來一探究竟吧！

二、內容介紹暨數學知識

起章：Chapter 1　故事之始 初探數學

故事的起源在印度，一個看似平凡卻隱藏著不平凡的家庭裡。第一男主角“拉維”，在十二歲生日那年收到他最愛的數學家爺爺“維傑・薩尼”送給他的生日禮物—計算機。爺爺同拉維進行了一個小活動—數字魔術，同時也激發小拉維對數學的興趣，爺孫倆更立下將來要一同做研究的夢想。但是，命運捉弄人，拉維生日的隔天，爺爺就與世長辭了。傷心的拉維失去至親，更失去數學的導師，只好每天待在爺爺的房裡思念爺爺，拉維的母親不忍心兒子失志，勸拉維好好努力，完成爺爺的遺願—到美國唸書。場景轉換到美國，拉維化悲痛為力量，終於達成爺爺的遺願，但完成階段性的任務後，拉維卻不知道下一步該往何處走？在「星期四爵士夜」結束後，拉維遇見了“尼可・阿里普蘭提斯”—被拉維的好友“彼得・凱吉”譽為曾碰過最棒的數學老師。尼可邀請拉維修習他開的課程—思考無限。拉維在思考無限的第一堂課中，認識了對數學有興趣的克蕾兒及尋找確定性的哲學系學生亞丁等人。在第一堂課裡，透過尼可深入淺出的教學許多新奇的數學知識，拉維內心對數學的熱情又再次被激起。課後，

拉維在尼可的辦公室中發現爺爺年輕時出版的論文，卻在論文的註腳中發現爺爺曾經在紐澤西摩里塞服刑，為一段不平凡的故事揭開序幕…

除了故事的走向外，另一條主軸就是我們關切的數學。作者安排了拉維進入尼可的課程—思考無限，藉此機會引入數學知識，也讓我們在關心劇情走勢時，可以順道「吃」一點數學知識。這個章節中的開胃菜其實在於小拉維與爺爺進行的小遊戲，相信學過質因數分解的人應該不難體會！第一道主菜其實是無限的概念，無限的概念對於一般人來說或許就停留在高中時學習極限的時候，但是，對於數學系的學生來說，則否。而在數學上又是如何定義無限的呢？本書也作了介紹！第二道主菜，是堪稱數學史上第二次危機的吉諾悖論，在探討此悖論的過程中，作者巧妙的引入學生在學習上的盲點，更一一化解，也是本書值得閱讀的一著。第三道菜則是 mapping 的概念，簡而言之，應用一對一 mapping 的簡單概念，就可以解決課堂上引入兩同心圓上的點是一樣多的問題，相信可以引起讀者的興趣，而作者也企圖在每一次的證明、解決問題的過程中還有各式各樣的盲點中，向我們說明數學的嚴謹性！更企圖說服我們數學是美麗的！

承章：Chapter 2、3、4、5　劇情高潮 薩尼入獄

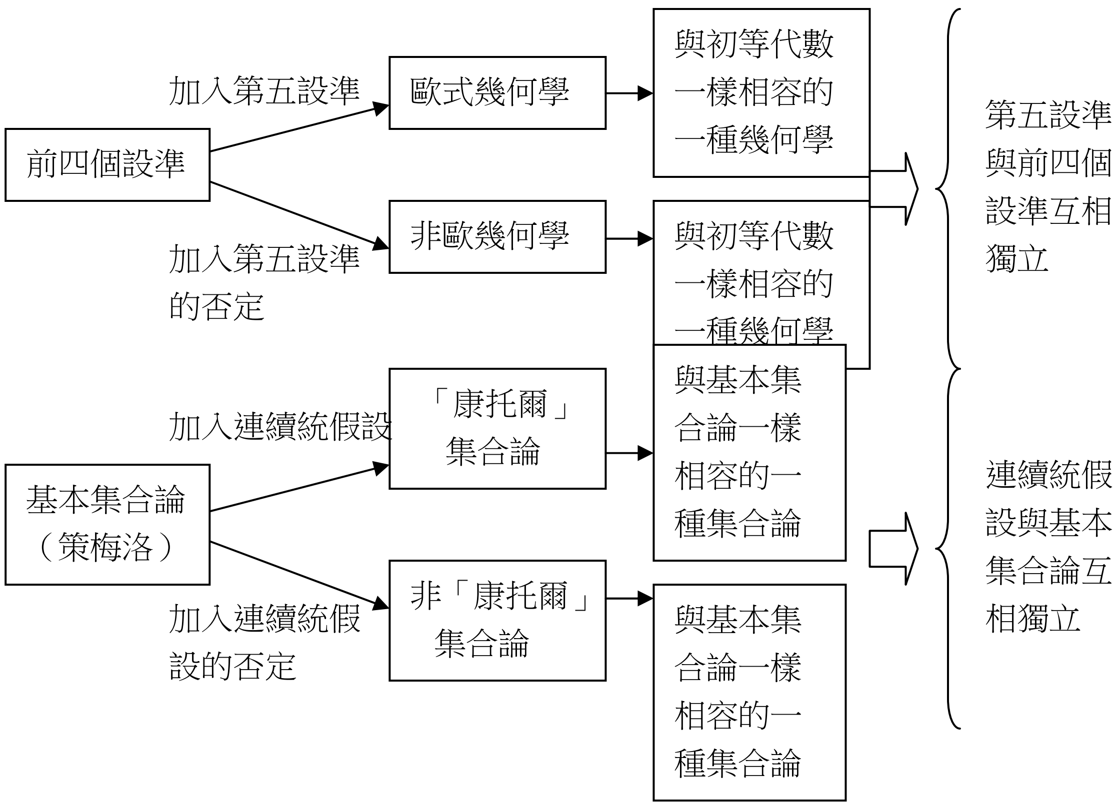
當拉維發現爺爺曾經在紐澤西摩里塞服刑後，急著想要知道到底發生了什麼事。在克蕾兒的幫助下，拉維順利於圖書館中取得當時摩里塞的日報—「摩里塞編年史」，裡頭記載了爺爺為何到了平凡無奇的小鎮，也報導了爺爺因當地的瀆神法被控告，以及事情發生的經過。在瀆神法與言論自由的牴觸下，法官“約翰 • 泰勒”被任命來處理這項棘手的案子。為了要以最公正公平的角度來處理，泰勒法官與薩尼進行了一連串的面對面談話，為的就是要確定薩尼瀆神的話語究竟是反射性的脫口而出，還是經過思考才講出來的，這件事將取決是否要將薩尼送進監獄。對薩尼來說，他認為宗教不具有絕對確定性，而泰勒法官為了更了解薩尼的想法，於是他們進行了一連串的數學討論；而在現實生活中，拉維則在尼可的帶領下，探討無限的數列，並進入了康托爾的集合論。

在這幾章中，作者帶我們進入兩條數學的隧道中，讓我們一窺數學上的兩大潮流：歐幾里得的幾何學以及康托爾的無限理論。在過去的世界中，爺爺與法官正進入了“確定性”的問題，爺爺先以他的親生經歷，點出為何他會注重確定性的問題，而他所認為具有絕對確定的東西就是數學！首先他先以大家最熟悉的畢氏定理讓法官先初步了解數學中的確定性，再切入歐式幾何學—由五個「不證自明」的設準所建構出的空間幾何學，並帶著法官一起研究五個設準的確定性。而在現實社會中，尼可帶大家一起探討無限數列的斂散性，接著把無限的概念帶進了小數裡，從無限的小數帶出了無理數以及實數系，並去比較所謂無限中的比大小，再將大家帶領進康托爾集合論的世界。承接上一段 mapping 的概念，只要我能在兩邊找到一對一的映射，我就可以得到兩邊的東西是一樣多的。另外，作者也巧妙的將爺爺那邊所談論到的畢氏定理，連結到畢式學派對 $\sqrt{2}$ 的出現所帶來的改變，再轉換到尼可所要講的無限不循環小數，也就是無理數。作者在內容的編排上都是經過嚴密的巧思，才會讓讀著可以流暢的進行數學之旅！而這邊也利用了反證法證明了實數的無限比整數的無限還要多，也解說了「矛盾」對數學所帶來的衝擊。第五章可以說是本書最主要的核心地帶，前大段是在探討歐式幾何學的五個設準，及其所衍生出來的各種定理；後大

段則是進入了康托爾的集合論，尋找比實數的無限還要大的無限，也帶出了集合論中最著名的問題：連續統問題。

轉章：Chapter 6、7　水落石出 打破信仰

在薩尼和法官一連串的討論之後，法官同意了歐式幾何的五個設準是不證自明的，但他認為薩尼對他所訂下的公理「所有的事物一定都是由某個東西創造的」卻一味的反對，一點都沒有接受的意思，所以法官終究決定將他的案子進行審判。然而，第五設準的確定性引起了法官的好奇，於是法官寄了本有關「非歐幾何」的相關書籍並和薩尼討論，發現第五設準其實是可以被否定的，並且製出另一個“奇怪”但相當具有邏輯性的空間。薩尼開始不確定他之前所相信的東西現在是不是還應該被相信，而法官也開始懷疑自己的信仰是不是也有可能不真實。另一方面，拉維與他身邊的夥伴以及他們敬重的教授尼可一起探討了的第五設準與連續統的假設的關聯，而做出下圖的結論：



在前幾段中，大家在都陷在「我們直覺認為是對的」的世界裡，但這兩章卻打破了我們先前的觀念，冒出了不確定的東西讓大家都慌了。非歐幾何學的出現，打破了許多人原先的想法，但是開闢了一個新的數學戰場，進而開拓了數學家的視野，也產生了一套新的理論。我們可以想見：矛盾對數學的衝擊很大；但是相對的，研究矛盾卻可能帶給我們新的看法。在書本的第七章，也引進了一些比較高觀點的數學，討論了基本集合論理的分支，值得大家關注。

合章：Chapter 8　故事終章　夢想啟航

> 一連串的討論，改變了法官與薩尼的想法。他們發現，不管是對數學的熱情，還是對上帝的信仰，都是源自於一個人的信念。法官最後決定釋放維傑•薩尼，兩人成為了好朋友，時常通信，並登門拜訪，一同享受美好的時光。另一方面；拉維總算確定自己可以奉獻一生熱情的事物：那就是跟隨尼可一同做研究還有守候在克蕾兒身邊。

這個章節的篇幅不廣，無疑是給整個故事一個圓滿的交代，爺爺和法官成為忘年之交，並時常通信討論數學，我想整個故事中，爺爺也成功扮演了一位偉大的數學導師，無疑地，法官也是位成功的學生。我們簡單討論這個章節主要的數學概念：數學哲學。究竟我們現在所學所用的數學物件是存在於哪裡呢？有人認為存在於心智之外，有人則認為不是，在本章裡有做一點討論，值得各位參考！我想，或許這問題的答案，就和本書要給我們的概念是一致的。而讀到這裡，對筆者而言，最好奇的問題—上帝是否是存在的呢？我想公道自在人心！信仰亦然！

三、結論

引述作者前記：

> **我們寫這一本小說的主要目的，是想向讀者證明數學是美麗的。而且，我們也試圖證明數學的深刻性對於人類真正在乎的事情的意義。**

作者在書中經常「刻意」將數學結構與生活所見之物聯結。最讓筆者印象深刻的比喻出現在書本第 239 頁，值得引述如下：

> **他站在一顆特別巨大的樹前面，用手從數的底部比到頂端，並說：「這真是不可思議的樹木」。他帶我們看樹皮(防火的)、樹葉(利於保持水分)，還有淺而強壯的根系(讓樹可以得到來自於海上霧氣的表層水份)。「還有，注意到，這些樹木沒有果實，這就是為什麼在樹林中沒有鳥類和動物。」他說的對，這樹林中十分安靜，只有風在樹梢產生的聲音。他抬起頭看著樹梢說：「這就是為什麼美洲印第安人認為這些樹是神聖的。他們說這些樹擁有讓人平靜的力量，可以讓思緒純淨。」連內心對每件事都抱持著懷疑態度、甚至有點「新時代」的我，都認為印第安人他們真的發現好東西了。**

這個段落本身有點突兀，初讀時並沒有留意，再讀時發現作者是刻意安插這個段落，在該章中，主要探討為了確定性而產生一套有完整結構的邏輯系統。作者安排了這個段落，讓讀者可以想像兩者之間的關聯性。而小說中，有一特殊的配角—爵士樂。試圖利用爵士樂象徵數學的和諧，在第一章曾提到：

> **我理解這裡大部份的唱片，都存在著最根本、讓人可以即興創作的構造：合奏**

會先將旋律從頭到尾演奏一次，小號則是負責主曲，而合聲則是韻律區—由鋼琴、貝斯和鼓所負責的。然後，當旋律持續進行時，韻律區則會繼續彈奏合聲　，而同時間，每支小號都會隨興獨奏演出。獨奏者會選擇合聲構造中有限的音符來發揮，然後將原旋律的靈魂注入其中，但是，每次演奏的時候，都會創造出一些不一樣的東西。

爵士樂的特點，正也是數學美麗的一大特色。對於第一個目的來說，可說是過了我們這一關。但是畢竟美麗的事物見人見智，因此我們也不能說作者們徹底的達成他們的目的。但是相信讀完這本書的人們，都會佩服作者們的勇氣，也能同意他們的確在貫徹這個目的的手段上表現的出類拔萃！

第二個目的，作者挑戰了一個最多人類萬分在乎的事情—信仰。對人們跟隨的信仰提出確定性的質疑，假數學的手法，在本書中做一個完整的討論。討論過程中，亦涉及了哲學等相關問題，可以讓讀者們自行思考，本書中的討論成果也是占有相當地位的參考價值。姑且不論第二個目的達成與否，至少在實行這個目標的手法上，可以讓閱讀的眾人補充許多「數學活力」，更能讓許多人燃起對數學的熱情。而貫徹以上兩個主要目的的做法，就是將數學的歷史引入故事中。

為了讓讀者更能感受數學是美麗的，為了加強讀者認識數學的深刻性，作者們安排了數學的發展歷史及各式各樣關乎著數學發展的歷史名題，引人入勝！其中更以仿效數學家之間書信往來，和數學家生活中的私密日記包裝數學史，讀起來更讓人能體會當時孕育該「數學產物」的背景及時代，也是本書的一大特色。縱觀全書數學史的安排，與正確時間發展似乎失之毫釐，舉例來說：第一章提到芝諾悖論，第三章提到發現無理數。在正確的歷史上，本書中兩者的先後順序應該倒過來才是。總的來說，讀者們能在不落窠臼、別出心裁的故事鋪陳中，補充各層面上的「數學熱情」，作為一本科普小說，實在是十分成功！筆者心中更抱持著一個信念：這本書值得每一位數學系的學生在修習數學系課程時細細品嚐一回！

事實上，筆者認為本書持有的不只有以上這兩個「檯面」上的主要想法，更包含了以下三個面向：懷抱夢想的熱情、追求真理的性情，以及感染人心的愛情。從主角的內心世界出發，我們可以看出一開始他充滿了懷抱夢想的熱情，但是，幾經波折讓他失去了這一股熱情，更迷失在現在、過去及將來的迷惘之中。這也讓現值大三的筆者讀來更感同身受。在追尋爺爺的過去中，我們看見的是主角想弄清楚究竟發生了什麼事的心情，這不正切合追求真理的性情嗎？作者也安排幾位配角，一再從各個角色自身的想法提供各種角度的思維，又再次切合追求真理的性情。然而牽動著人心的，不只有數學、正確無誤的邏輯推演以及尋求真理，最最最能打動人心的，就是主角和爺爺之間的情感，他們之間的愛，攸關這一整個故事的產生，更牽動著主角懷抱夢想的熱情及追求真理的性情。故事最後，主角誠實面對自己的心，勇敢地懷抱夢想，達成爺爺的期盼，更保有實在的真性情。本書可謂是激勵人心、美麗動人的故事。情節安排也十分得宜，節奏偏中快，中譯則用心良苦，讀來賞心悅目，十分舒服！

四、弦外之音

故事中的主人翁，大部份擔綱的角色是史丹福大學三年級的學生，由於他進大學那天就算達成和爺爺的約定了。所以，他在大學裡浮浮沉沉，對許多事無法懷抱著長久的熱情，這樣的他也迷失了自我，甚至要等到父親的催促才決定主修經濟學。他不知道如何做選擇，因為他不知道自己怎麼選擇是最正確的決定，他懷著不確定的心情選擇在大學裡該做些什麼。或許是和故事中的主人翁同年齡，所以產生了投影的效應，不知怎麼的，筆者發覺自己的心境竟和拉維雷同，因此在故事的一開始，這條小小的支線就一直牽動著我的心。故事的變化十分有趣，拉維接受了一樣刺激，他發現最喜愛的爺爺竟然曾經在紐約服刑，於是，他開始搜尋關於爺爺不平凡的遭遇，他也重新認識了年輕時的爺爺，也因此他知道自己更能確信爺爺對數學的「信仰」。與此同時，深深影響拉維的還有他生命中的第二位數學導師尼可，在尼可的課堂上，拉維終於能找到他能夠一直投注熱情的事物了，那就是數學了！筆者也在等待那一個刺激的到來，哪一天筆者也終將確定自己可以投注熱情的事物也說不定。此篇乃弦外之音，惟讀完此書有感而發！

編按：本文是林怡寶、翁康鈞選修洪萬生教授「數學史」的期末報告。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）邱靜如（實踐國中）郭守德（大安高工）張瑄方（永春高中）張美玲（景興國中）黃俊才（麗山國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）葉吉海（陽明高中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士勳、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
台南縣：李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）
澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！