

HPM 通訊

第十三卷 第九期 目錄 (2010年9月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（台灣師大數學所研究生）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
 英家銘 謝佳叡（台師大數學系）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 為青少年而編寫的科學家肖像
- 《高觀點下的初等數學》第一卷算術代數分析之評論
- 阿基米德畫像：創作理念

為青少年而編寫的科學家肖像

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

一、前言

在科學月刊社所推薦的百部科學普及閱讀作品中，¹科學家傳記所佔比例不高。這在一方面，當然是書單UU百本所限，另一方面，或許也由於比較有趣的中文版科學家傳記欠缺之故。不過，這個「不足」顯然需要適當地彌補，因為傳記對青少年讀者而言，最容易發揮「角色模範」(role model) 的功能，只要書寫得宜，就能帶領他們進入一個充滿著夢想與願景的天地，啟發他們的好奇心與想像力。

從歷史專業的要求來說，人物傳記一向難寫。如果傳記書寫志在普及，尤其是針對青少年的讀者對象，則角色模範的塑造，無疑是難上加難的寫作工程。這種挑戰，對於專業史家或自由作家是不分軒輊的。專業史家固然滿腹經綸，然而太多的書卷氣，有時候卻讓他（她）們施展起來礙手礙腳，不容易達到見山又是山的境界。在自由作家這一邊，生花妙筆固然是她（他）們揮灑自如的本錢，可惜，有時候缺少了「貼近」文本的第一手歷練，「在脈絡敘事」(narrative in context) 總是力有未逮。

以上觀察，當然也適用於科學家傳記，尤其是適合青少年閱讀的傳記，更是可遇而不可求。有鑑於此，國內世茂出版社願意出版 10 部「牛津科學肖像」中譯本，實在值得稱頌。不過，由於這套極佳之青少年讀物問世之後，市場反應並不熱絡，以致於其他 14 部之續，乃因而喊卡，實在令人遺憾。

二、簡評

¹ 這百本書目請參考〈一人一科普，全民讀科普〉，台灣數學博物館「最新消息欄」（2010年3月1日發佈）。

世茂出版社在 2004 年所出版的 10 部「牛津科學肖像」(Oxford Portraits in Science) 中譯本，其書目及作者如下：

貝爾 (Alexander Graham Bell)，納奧米·帕薩科夫 (Naomi Pasachoff)

達爾文 (Charles Darwin)，麗貝卡·斯泰福 (Rebecca Steffoff)

愛迪生 (Thomas Alva Edison)，傑尼·艾德 (Gene Adair)

佛洛伊德 (Sigmund Freud)，瑪格莉特·慕肯伏伯 (Margaret Muckenhaupt)

居里夫人 (Marie Curie)，納奧米·帕薩科夫 (Naomi Pasachoff)

愛因斯坦 (Albert Einstein)，傑勒密·伯恩斯坦 (Jeremy Bernstein)

牛頓 (Isaac Newton)，蓋爾·E·克利斯汀森 (Gale E. Christianson)

伽利略 (Galileo Galilei)，詹姆士·馬克拉卻倫 (James Maclachlan)

孟德爾 (Gregor Mendel)，愛德華·艾德生 (Edward Edelson)

巴貝治 (Charles Babbage)，布魯斯·柯力爾 (Bruce Collier)、詹姆士·馬克拉卻倫

這套書的英文原版，是由知名的天文學家兼天文史家歐文·金格里奇 (Owen Gingerich) 所主編，²到目前為止至少已出版 24 本之多。其中，尚未有中譯版的傳記有如下所列：哥白尼 (Nicolaus Copernicus)、³克里克與華生 (Francis Crick & James Watson)、法拉第 (Michael Faraday)、費米 (Enrico Fermi)、佛蘭克林 (Benjamin Franklin)、哈維 (William Harvey)、亨利 (Joseph Henry)、金納 (Edward Jenner)、克卜勒 (Johannes Kepler)、馬許與柯普 (Othniel Charles Marsh & Edward Drinker Cope)、米德 (Margaret Mead)、巴斯德 (Louis Pasteur)、波林 (Linus Pauling)，以及巴夫洛夫 (Ivan Pavlov)。

在這二十四本人物傳記中，物理學家有伽利略、牛頓、法拉第、佛蘭克林、亨利、愛因斯坦、費米等七人；天文學家有哥白尼、克卜勒等兩人；化學家有居里夫人、波林等兩人；⁴生命科學家有達爾文、孟德爾、巴斯德、克里克與華生等五人；醫生有哈維、金納等兩人；心理學家有佛洛伊德、巴夫洛夫兩人；發明家有愛迪生、貝爾、巴貝治等三人，至於米德是美國人類學家，馬許與柯普則是美國古生物學家。由此看來，主編金格里奇在選材時無法面面俱到（以目前所出版者為準），譬如學科與人物之國籍分佈等等，可能有一點不由自主，究其原因，或許是合適的傳記作者難尋吧。當然，這也必定牽涉到傳記素材是否方便使用，特別是針對青少年讀物的書寫而言。

筆者在 2001 年得讀本叢書的伽利略傳的英文原版，並且在《科學月刊》發表〈歷史與科學的平衡—導讀《伽利略—科學史上第一位物理學家》〉(2001 年 3 月)，其中我特別針對這一本為「小大人」(young adult) (或青少年) 而撰寫的傳記，分享一得之愚，並藉以大

² 金格里奇出版了一本非常膾炙人口的科普書籍《追蹤哥白尼》，非常值得鑑賞與參考。

³ 本哥白尼傳由金格里奇自己擔綱書寫。

⁴ 在此，人物所屬學科的分法只是權宜之計，因為愛因斯坦的不朽貢獻也關連到天體物理學，至於居里夫人則是先後依序榮獲諾貝爾物理獎與化學獎。

力推薦。現在，我有機會閱讀另外九部傳記，發現自己有關伽利略傳的體例之評論，也適用於這九部，因此，就請讀者容許我在此稍加引述：

由於這一套叢書專為「小大人」(young adults) 而編寫，志在科學普及殆無疑問，也因此主編特別標榜「科學與歷史並重」的風格。以本書《伽利略》為例，儘管作者筆觸素描，但是融合科學知識與人物傳記於一體，從而凸顯科學知識活動的歷史面向，卻讓我們分享了科學史的教育價值與意義。

就內容與體例而言，本書在正文之後，還有〈附錄〉、大事年表 (chronology) 以及參考文獻。此外，它也適時地穿插「延伸閱讀」或「邊欄」(sidebar)，提供必要但簡易的科學相關知識之說明。還有，全書經常出現的插圖與插畫（取自相關文本），也都能浸潤易讀的文字，保證了科普作品的親和力。事實上，上述這種敘事體例與風格，也同樣出現在其他九部傳記之中。限於篇幅，我們在此無法細按。

三、結論

由於本套書主編金格里奇是一位著名的科學史家，因此，他所組織的作者群成員，都是些極佳的說故事高手。其中，除了科學史家如詹姆士·馬克拉卻倫、布魯斯·柯力爾之外，也包括科普作家如傑勒密·伯恩斯坦、⁵愛德華·艾德生、麗貝卡·斯泰福、納奧米·帕薩科夫、愛德華·艾德生、蓋爾·E·克利斯汀森。不過，這些作家（也有兼歷史、文學或科學專業學者身分者）都有專業寫作傳記的訓練與能力，無怪乎他們都能從容地出入歷史現場，按青少年可以接受的層次，為我們敘說科學家或發明家那些「在地原汁原味」的故事。

因此，這一套科學家傳記相當可以彌補科普閱讀內容之不足，值得鄭重推薦給積極推動科普閱讀的相關人士。我們當然也希望中小學師生可以從這些人物故事情節中，學習科學知識的脈絡意義，從而提升閱讀能力，並進一步鑑賞相關的知識活動之意義。

⁵ 伯恩斯坦為一般讀者所寫的科普作品《愛因斯坦傳》（企鵝出版社），也非常值得閱讀。

《高觀點下的初等數學》第一卷算術 代數 分析 之評論

黃俊瑋

台灣師大數學系博士班研究生

書名：高觀點下的初等數學－第一卷

作者：菲力克斯·克萊因（Felix Klein）

譯者：舒湘芹、陳義章、楊欽梁

出版社：九章出版社

出版年：2004

頁數：331

國際書碼：ISBN 957-603-125-7

關鍵詞：高觀點、算術、代數、分析、中學數學、數學教育、連結。

一、內容簡介

爬上山頂，方能望得更遠，方能看清錯綜路徑之間的連結。

而身為數學教師，應期使自己站在數學的高觀點，方能引導學生克服困難，指引正確的學習明路。

菲力克斯·克萊因（Felix Klein）是上個世紀初最偉大的數學家之一，他 16 歲時即早慧地進入大學就讀，年僅 19 歲獲得了博士學位，其 25 歲那年，便成為 *Mathematische Annalen* 的編輯，37 歲擔任哥廷根數學系主任。他在當時數學上的諸多領域都有卓越的貢獻，同時，進一步把非歐幾何在橢圓、雙曲線、拋物線等幾何學的名目下統一起來，其雙曲幾何模型亦解決了非歐幾何創建以來，公設的一致性（consistency）問題。除了數學上的卓越貢獻之外，他對於數學教育與教學上亦多有見地，他講課擅長於綜觀全局，「能在絕然不同的問題中，洞察到統一的思想，並有一種集中必要的材料來闡明其統一見解的藝術。」（Reid, 1986, p. 48）

從此傑出並具有大一統之宏觀角度的數學家口中，所述說之高觀點，的確格外地具有信服力。他以當作「中學數學教學講義」為目的，為中學數學教師們寫作此書，旨為從現代數學的觀點出發，向數學老師以及成熟的學生們介紹數學教學的內容及基礎。而本書主要由其助手們，根據他在哥廷根大學的講課內容整理而成，原分成了上卷「算術、代數、分析」以及下卷「幾何」，並分別於 1924 與 1925 年出版。而 1939 年出版英譯版。本書除了展示其由「數學專家」的高觀點，進而統整初等的數學知識，並在書中多處對於數學教育提出其想法與見解，也多處提到中學數學教師應具更廣泛、更高觀點之數學能力與素養，

超越其講課範圍，並熟悉何處會有艱難險阻，方能指導學生安全通過。

本評論主要聚焦在第一卷的內容，其中共包含三個主要部份：算術、分析與代數。以下將針對本書各章節單元，進行一些初步的介紹。

在第一部份的「算術」，共包含四個章節，分別為：自然數的算術、數的概念的第一個擴張、關於整數的特殊性質以及複數。其中第1章的「自然數的算術」裡首先提到了學校裡對於數的概念的引入，他認為德國的教法可用「直觀」與「生成」兩詞來表達，也就是說，整個數的概念結構是在熟悉的、具體的事物的基礎上逐步建立起來的，與大學裡學習用的邏輯及系統方法恰成鮮明的對比，此外，他亦認為大學教學忽略了該聯繫實際生活去著重指出數的應用。接著在第1.2節之中簡介了數學家們在十九世紀二十至三十年代，所概括得到的運算的基本定律與性質。接下來的第1.3節，討論了整數運算的邏輯基礎，其中更進一步地介紹了直覺主義、邏輯主義、集合論、以及希爾伯特的純形式主義等數學基礎學派的哲學理念。至於原書第1.4節的「整數運算的實踐」，在中譯本中則加以省略。

再來的第2章討論了「數的概念的第一個擴張」由第2.1節的「負數」開始，提出為能在一切情況下都可能進行減法運算，於是建立負數的概念，並提到負數的發展史，特別是人們用它進行運算好多個世紀之後，才考慮其邏輯相容性，也乎應Anna Sfard (1991) 的論點：概念的形成往往先是運算、操作的面向再慢慢產生、進入結構的面向。接著，第2.2節討論「分數」的發展，人們從可數事物的討論轉到了可度量事物，因而領會了分數的概念。此節中，Felix Klein 也引韋伯－布爾克哈爾特的書，說明了分數的形式觀點，也談到了一些關於有理數整體的性質。再來，2.3談到起源於幾何直覺的「無理數」，也提到了關於“irreducible”這個詞的意義。並提到無理數的基礎以及戴德金建構無理數的方法。此外，作者並利用不少的篇幅從空間概念的本質切入，區分了精確數學與近似數學的意義，抽象或理想化的空間概念都要求不受限制的精確性，而應用上只有近似數學才起作用。

在第3章「關於整數的特殊性質」之中，Felix Klein主要處理了可除性、2, 3, 4, 5, 9 等數字整數任何給定之判斷、整數的質因數分解、化有理分數為十進位小數、連分數、丟番圖方程，介紹了費馬大定理、圓的等分問題，介紹了正多邊形可尺規作圖的條件，以及正七邊形不能尺規作圖之證明，最後並把 π 之超越性之相關討論放置於附錄之中。

接下來，第4章的「複數」裡，先從歷史的觀點切入，卡當解三次方程式的過程，首次用到了虛數，並隨著它的「有用」而逐漸獲得廣泛的使用。接著引入我們一般中學課程之中所熟悉的複數，說明純形式的觀點來看，複數的運算保持相容性。然後，便引領從幾何圖形的角度，了解複數運算法則背後的幾何解釋。接著，再進一步將一般的複數推廣，特別是四元數，並介紹了四元數的乘法與幾何上的旋轉與伸展之間的聯結和意義。最後，則回歸到中學課程之中的複數教學上。在結束「算術」單元之前，並安插了一篇附錄，說明了數學的現代發展與一般結構。

第二部份的「代數」，主要聚焦於「方程式」之相關問題，而非近世代數之群、環、體等範疇。首先，在第5章之中，介紹了「含實未知數的方程」，其中包含了：含一個參數的方程、含兩個參數的方程，最後推廣到含三個參數的方程。並介紹了求方程數值解的儀器。第6章之中，主要處理的是「複數域方程」，首先提出重要的「代數基本定理」，

也說明此定理的所有證明都從根本上應用了複數 $x+iy$ 的幾何解釋，並提供了高斯之幾何證明。接著，討論含一個複參數的方程，其中包含了： $z^n = w$ 這類的純方程、形如 $w = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$ 之二面體方程、再來是四面體、八面體、二十面體方程，並建立形如 $\varphi(z) - w\phi(z) = 0$ 的方程，最後，回到如何解正規方程的方法，使用超越函數、借助根式求解等，並進一步化簡一般方程為正規方程，處理了三次方程、四次方程以及五次方程之可解性問題。

第三部份的「分析」，共有三個章節，第7章的「對數與指數函數」裡，首先，他在第7.1節回顧了中學的課程，並對其所用的代數分析方法進行系統之討論。接著，他在第7.2節介紹相關理論的歷史發展，並期望讀者能全面地了解對數的理論。作者也建議教科書宜從積分與面積的角度，來定義自然對數的想法，同時，他也指出：「透過雙曲線下的面積而引出對數，此方法與其它任何數學方法一樣嚴格，但其簡單和清晰程度則超過了其它方法。」接著，回歸中學裡的對數理論，他也批判了中學課程「很少考慮所教定理在大學是否有了推廣，而往往滿足於今天也許夠用，但不能適應後所需要的定義」。最後，再就現代函數論的觀點，審視其如何處理對數，並從而引出與皮卡定理之聯結，以把相關問題放至複數域，得到更完整的了解。

接下來的第8章，處理了在中學課程占有頗重份量的另一函數「(三)角函數」。作者依然秉持從「求面積」的總原則切入，再一次利用解析幾何來定義所謂的正弦與餘弦函數，並認為正切與餘切等其它三角函數僅為前述兩個基本函數的有理組合，只是為了化簡計算而引入，不具太大意義。接著也介紹了雙曲餘弦與雙曲正弦，並突顯了「圓」與「雙曲線」之間的類比，並利用第8.1節的最後篇幅，介紹了角函數理論的進一步發展。而第8.2節之中，主要介紹了三角函數表，包含「純粹」三角函數表與「對數」三角函數表之發展與相關應用。最後的第8.3節，則是廣泛地介紹了角函數的相關應用，包含三角學，特別是球面三角學；小振動理論，特別是單擺的理論；利用角函數的(三角)級數來表達週期函數；最後也介紹了函數概念之發展與重要性，以及對於數學教育之相關意涵。

本書第9章「關於無窮小演算本身」，主要涉及了邏輯與心理學基礎問題，以及教學問題。首先，作者談到微積分概念之發展，討論無窮小演算中的一般考慮。此外，他也援引諸多數學家們的重要貢獻，從歷史發展的面向來討論，最後則對數學教育提出反思與建議。在接下來的第9.2節裡，主要處理了「泰勒定理」，作者將之與有內插問題、有限差分問題作一聯結，以提出其證明方法，並可使此定理與其它問題廣泛地聯繫起來。在第9.3節之中，再次回到歷史的與教育學上的考慮，也提出了：

借助圖形來說明抽象的思想、強調與相鄰領域的關係、強調歷史發展、展出一些普及著作的樣本以說明受這些著作影響的大眾觀念與受過專門訓練的數學家的觀念的差異等觀點，作為中學數學教師教學上的考量重點。

最後的附錄雖列於九個章節之後，但其中的內容篇幅份量與重要性，亦不亞於前面之章節。在附錄之中，分成兩個部份，首先，處理了「 e 與 π 的超越性」問題，除了簡單地提到這兩個重要常數發展過程中的幾件大事，並在書中給出了此二數之超越性之證明。再來，作者討論奠基於康托的「集合論」，先由集合的勢切入，區分了一些常見集合的勢的大小，從而引出連續統之相關問題。此外，他也討論了集合元素之排列。

最後，作者也留下一段耐人尋味的話，作為本書之結語：

科學的教學方法只能是促使學生去科學地思考，絕不是一開始就叫他們面對一堆枯燥的科學詞藻。

推廣這種自然而真正科學的教學方法的重大障礙，是缺乏數學的歷史知識，這是常常感覺得到的。為了彌補這一點，我一直把歷史介紹插入書中，我相信已經向你們講清，數學之形成是多麼地緩慢；這些思想最初幾乎都是以近乎預言的形式，經過長期發展後，才變成嚴格的結晶形式，變成大家很熟悉的系統講法。我熱誠地希望，這種知識對你們的教學發生持久的影響。

二、評論

「連結」是九年一貫數學學習領域之中重要的主題，能力指標之中便指出：課程的設計應注重數學內在結構的連結，及數學在生活情境以及和其它學科（例如自然科學）的連結。在編撰教材時，須注意數學內部連結的貫串，以強調解題能力的培養；數學外部的連結除了強調生活應用解題外，也要能適當結合其他學科教材的發展，讓學生能認識到數學與其他學科的關係。然而，針對「連結」一詞的解析，一般中學教材或教師講課內容，大多著重於教材與單元之間的水平連結，但本書之中，作者 Felix Klein 所強調的則是不同的觀點。這第一冊《算術·代數·分析》的第一、二段中，指出未來中學數學師資的培育問題，尤其一般數學系的課程與教學，顯然無法推卸責任：

近年來，在大學數學教師及其他理科教師中間，對如何更好地培養未來中學師資產生了廣泛的興趣，這確實是一種新的現象。在此之前，長期以來，大學裡的人只關心他們的科學本身，從來不想中學的要求，甚至不考慮與中學數學的銜接。結果如何呢？新的大學生一入學，他面對的問題，好像與中學學過的東西一點也沒有聯繫似的。當然，他很快就忘記了中學階段學習過的東西。但是，他們畢業後擔任教師，又突然發現他們必須按中學教師的教法，來教授傳統的初等數學。由於缺乏指導，他們很快就墜入相沿成習的教學方法，而他們所受的大學訓練，則至多成為一種愉快的回憶，對他們的教學毫無影響。

另外，他也提到：

我的始終之一的任務，是向你們指明一般課程中，沒有充分指明的各個數學領域中種種問題的相互聯繫，尤其是強調這些問題與中學數學問題的關係。我希望通過這種方式使你們更易於掌握從大量放在你們面前的知識中，汲取促進數學的養料之能力。而你們進行學術研究的真正目標，我認為就在於掌握這種能力。

因此，其「高觀點看待初等數學」，所指的是將中學數學與大學數學之間作一垂直面上的連結與統整，從數學家所在的高觀點，將數學基礎知識與高等數學進行結構上的統整與連結，亦企圖使中學教師能從這一宏觀的角度，來看待數學知識，方能更適切而順利地引領學生之數學學習與數學思維，而非著眼於當前的學習。他也批判了中學課程之中，「很少考慮所定理在大學是否有了推廣，而往往滿足於今天也許夠用，但不能適應後所需要的

定義。」

從本書之中，讀者們可以了解作者如何從專家眼中的高觀點，看待中學數學課程以及大學相關之數學課科，並且也處處可見作者對於數學知識與歷史知識的精妙洞察力，特別針對歷史面向的引入，由於他不若一般「專家」單以數學來看數學，而是更進一步借鑑歷史經驗，以支持佐證其看法，使得她的論述更具有說服力。質言之，本書提到的許多說法與觀點，都值得數學系學生或數學教師深入研讀思索再三。

第一卷的數學內容部份，主要處理了算術、代數與分析三個面向。在算術方面，作者主要說明數之擴張，而代數部份則以方程作為主角。至於分析，則是先從對數函數與角函數切入，最後則是與微積分息息相關的無窮小分析。然而，本書除了從純數學知識的面向，來進行中學與高等數學之統整與連結之外，作者亦廣泛地從數學教育、數學史以及數學哲學的角度切入。另一方面，本書除了作者從專業數學家的眼光來看待德國中學教育現象，並抒發種種看法與建議之外，也大量地引入了數學發展過程的相關史料，從而指出我們必須認識數學知識、數學概念的發展過程，才能更深刻地了解數學概念本身。作者提到：

推廣這種自然而真正科學的教學方法的重大障礙，是缺乏數學的歷史知識，這是常常感覺得到的。為了彌補這一點，我一直把歷史介紹插入書中，我相信已經向你們講清，數學之形成是多麼地緩慢；這些思想最初幾乎都是以近乎預言的形式，經過長期發展後，才變成嚴格的結晶形式，變成大家很熟悉的系統講法。我熱誠地希望，這種知識對你們的教學發生持久的影響。

足見在他的理念中，歷史面向對於數學知識概念之處理，特別具有關鍵的重要性。

在數學知識的面向上，作者亦期望中學數學課程或數學教師應了解各單元與高等數學之間的連結，例如一般教科書之中常見引入對數的方法，即無法與高等數學進一步連結。有鑑於此，作者提出以面積來定義對數的方法，除了使對數能往上連結，此一方法同樣能用在三角函數之定義上。然而由於涉及積分或其它大學數學的概念，是否適合於一般中學生或數學初學者，或者過於理想化，則見仁見智有待商榷。在第 4 章的複數單元之中，他也利用幾何之旋轉與伸展等變換的觀點，連結了複數、四元數之代數乘法所代表的意義，也可再進一步延拓，針對此一進路，作者提出：「四元數的不可交換性，與眾所皆知的繞原點兩個旋轉的次序不可交換性的事實相對應。」又例如在第 9.2 節裡所處理的「泰勒定理」，作者亦以不同於一般教科書的方式，將該定理與內插問題、有限差分問題作一連結，使得此定理能與其它問題廣泛地聯繫起來。又例如第 6 章之中，作者借助根式表達的二面體、四面體和八面體方程的解，通過適當的化簡，便與求得三次和四次方程的解相結合，而完整地處理了五次方程問題。同理，吾人還可以再進一步對六次和更高次方程進行研究。針對這些，作者的反思極具啟發性：「當通常的路徑不能獲得成功時，不應滿足於確定不可能性，而應激勵自己去尋找新的和比較走得通的道路。」事實上，作者顯然呼應了伽羅瓦，後者利用群論的概念解決五次方程式無法以根式求解的進路，的確有異曲同工之妙。

在數學哲學的面向上，作者在第 1.3 節之中，介紹了十九世紀末至二十世紀初期，直覺主義、邏輯主義、集合論、以及希爾伯特的純形式主義等數學基礎學派的哲學理念，並

在最後提出自己綜合性的見解，並不獨鍾於上述某一學派的說法。他也以獨特的比喻，來說明數學發展的情況：

數學的發展像樹一樣，它並不是有了細細的小根就一直往上長，倒是一方面越紮越深，同時以相同的速度使枝葉向上生長。

事實上，數學史家 Morris Kline (2004) 的向上加蓋建築和打地基的比喻，本質上是類似的。至於當前數學發展的處境，作者也認為：「數學的基礎研究，是不存在最終的終點與最初的起點，來為數學教育提供絕對的基礎。」也因此，他眼中有關數學的確定性與客觀性，並不若柏拉圖主義者一樣堅實。

此外，針對數學的發展與未來，Felix Klein 也是 Morris Kline 的先驅，他提到：「邏輯關係，或可以說是數學機體上的硬骨架，必須保持下去，以便使數學具有它所特有的可信性，但是數學的生命，數學的最重要的動力，數學在各方面的作用，卻完全有賴於應用，即取決於那些純邏輯內容和其它一切領域之間的相互關係。」其實，這也回應了他在第首章對於德國數學之批判，他認為大學數學教育忽略了「聯繫著實際生活去著重指出數的應用。」為此，他主張：「要使學生應用運算規則可靠無誤，以有關智力的平行發展為基礎，不必特別考慮邏輯關係等觀點。」同時，他也贊同下述之數學教育目的：

1. 科學地概述數學的系統關係；
2. 掌握處理數值問題及作圖問題的一定技巧；
3. 認識數學思想對於自然及現代文化的重大意義。

這些皆可洞見他的數學觀與數學教育觀，都不是局限於「純數學」的範疇，而是強調數學之於生活與世界的應用性，這也從他在第 8.3 節之中，大量地例舉角函數之相關應用，不難看出他對於「數學之用」的重視。

此外，對於中學數學教育，他亦提出有別於一般「數學專家」的見解，他認為：

固然數學的研究強調嚴密的邏輯順序，但對於初學者而言，對於歷史上數學概念的發展而言，則往往不是這麼一回事，例如負數的發展史，特別是人們用它進行運算好多個世紀之後，才考慮其邏輯相容性。又或者對於新的概念的建立，純邏輯的功能僅起規定的作用，而從來不起唯一指導原則，因為總還有其它許多概念體系無法滿足邏輯上相容性的要求。

這樣的觀點，也進一步批判了大學數學教育之中，往往生硬的邏輯順序，重複地定義，定理，證明，而忽略了學生的學習認知面向。或許這對於部份聰明的學生而言，要在短時間內習得過去數百年來濃縮的數學知識精華並非難事，但是對於較為一般學生而言，無非是種痛苦乏味的學習經驗。同時，他也提到：

特別有天資的個別學生肯定會要求更完整的解釋，給予這些學生補充解釋而不犧牲多數人的興趣，在教師方面來說，就是值得讚揚的教學技巧了。

足見他的教學觀的確是考慮了多數學生的認知發展與學習情況，而不單是為了訓練數學

「精英」而已。至於他的教學原則：讓學生自己去證明定理，他只提示一些方法，並且認為要學好課程的話，在課堂上一小時，在課堂外就需要花四小時來研讀 (Reid, 1986, p. 48)。也頗值得一般數學系所的學生們引以參考學習。從近代數學教育的角度觀之，作者期望數學教師能掌握高觀點的立意，也在時間上預示了當前教師需具備足夠 CK (Content Knowledge) 與 PCK (pedagogical context knowledge) 之重要性。然而，他對中學與大學數學知識之間的縱深統整之想法，是否能有效融於教材或教科書之中，更進一步助益中學與大學階段之數學學習，則仍有待進一步研究與探討。不過，至少他諸多針對數學教育的看法與改革理念，實屬客觀、全面亦無一般「專家」之武斷，亦足供數學教育研究者之參考。

至於本書的翻譯品質上，尚稱中規中矩，然有多處錯別字或校稿上未發現的小錯誤，將來改版時應特別注意與改善。而誠如作者所言，他是為了中學數學老師而寫作此書，亦為了熟悉數學的學生所寫，因此，就數學知識的深度而言，對於一般沒有高等數學基礎的社會大眾或青少年學生而言，儼然會是閱讀上的一大挑戰。事實上，本書部份數學知識的確並非一般讀者所能駕馭，甚至一般數學或相關科系的大學生，也未必能完全熟稔或學習過書中的相關內容或題材。然而，作者所提及數學概念的發展史以及哲學觀，乃至對數學教育與中學數學課程改革面向的想法，倒是非常值得一般人了解與體悟。在不影響閱讀連貫的情況之中，或許讀者們可選擇感興趣的題材，或者暫時略過太過於技術性的部份，專心品味作者有關數學與歷史的真知灼見，以及即使今日深具啟發的數學教育觀。

參考資料

- Klein, Felix (1994). 《高觀點下的初等數學》，台北：九章出版社。
- Kline, Morris (趙學信，翁秉仁譯) (2004). 《數學－確定性的失落》，台北：台灣商務印書館。
- Reid, Constance (1986). *Hilbert-Courant*. New York: Springer-Verlag.
- Sfard, Anna (1991). "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin", *Educational Studies in Mathematics* 22: 1-36.
- HPM 通訊第六卷第四期。
- HPM 通訊第十卷第五期。

阿基米德畫像：創作理念

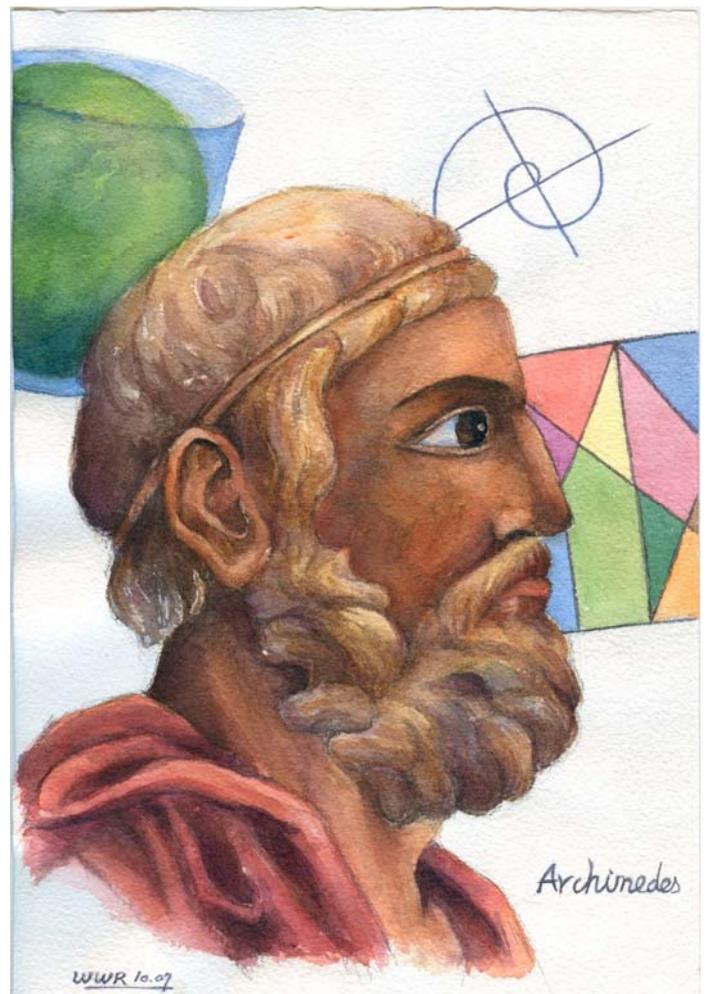
吳宛柔

台灣師大數學系四年級

後人給予阿基米德極高的評價，稱阿基米德為「數學之神」，並與牛頓和高斯並稱為數學界的三大偉人，雖然阿基米德的生平沒有詳細記載，但關於他的故事卻廣為流傳。隨著《阿基米德寶典－失落的羊皮書》再度問世，後人對阿基米德有更多的了解……

雖然這本書已經出版好一陣子了，但我卻是在洪萬生老師數學史上課中第一次聽到的，聽著老師敘述這本書的由來，介紹阿基米德的事蹟－刻在墓碑上球與圓柱的體積比、用逼近法算出球面積、球體積、拋物線及橢圓面積、想到就會胃痛的問題等，突然想到老師之前跟我提過，有空的時候可以畫畫數學家，用我自己對這個數學家的理解方式，將他表現出來，這對我來說是一項挑戰，但從老師口中說出來的阿基米德已經深深引起我的興趣了！

究竟在我心中的阿基米德是什麼樣子呢？是個有智慧的長者，聰明的頭腦，有雙洞悉一切的眼睛和讓人覺得和善的大鬍子，因為阿基米德並沒有圖像流傳下來，所以我參考前人所繪製的阿基米德，加上我自己的想法，試著將這樣的阿基米德畫出來。位於人像左後方的「球與圓柱體－以球的大圓為底、球的直徑為高的圓柱體，體積為該球體的二分之三倍。」是令阿基米德驕傲的代表作；中間的是「阿基米德螺線」紀念阿基米德發現螺旋形曲線的性質；右後方則是「胃痛問題」讓人想到就會胃痛的問題，指出阿基米德對組合學早有研究，以這三個研究成果襯托在人像後面，間接點出前面的人像便是阿基米德，畫出我心中的阿基米德！



1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。[投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳燁（東京大學）

基隆市：許文璋（南榮國中）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中）
陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿
（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如
（實踐國中） 郭守德（大安高工） 張瑄方（永春高中） 張美玲（景興國中） 文宏元（金歐女中）
林裕意（開平中學） 林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
程麗娟（民生國中） 林美杏（中正國中）

台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 孫梅茵
（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬
（明德高中） 羅春暉（二重國小） 賴素貞（瑞芳高工） 楊淑玲（義學國中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭、郭志輝
（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 程和欽（永豐高中）、鍾秀瓏（東安國中）
陳春廷（楊光國民中小學）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（文華中學）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工） 郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中） 黃哲男、洪士勳、廖婉雅（台南女中） 劉天祥、邱靜如（台南二中） 張靖宜
（後甲國中）

台南縣：李建宗（北門高工） 林旻志（歸仁國中）

高雄市：廖惠儀（大仁國中） 歐士福（前金國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中） 楊瓊茹（屏東高中） 陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥（馬公高中） 金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）

馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！