HPM通訊

第十四卷 第十期 目錄（2011年10月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

芻議戰國秦漢數學簡牘發現之意義

郭書春
中國科學院自然科學史研究所

摘要

近年，清華大學收藏的戰國算表、嶽麓書院收藏的秦簡《數》、北京大學收藏的秦數學簡、湖北博物館藏的睡虎地漢數學簡含有豐富的數學內容，具有極大的意義。首先，它們提供了早期中國數學史研究的不可多得的第一手資料；其次，使某些學者對中國數學的早期發展情況採取的虛無主義態度不攻自破。第三，為《九章算術》的主要數學方法和題目完成於先秦，徹底解決《九章算術》的成書這一中國數學史研究的重大問題提供了有力的佐證。更重要的，為中國傳統數學的第一個高潮發生在春秋戰國，提供了可靠的文獻，結束了只是靠對《九章算術》及其劉徽注的分析、推理得出這兩個論點的局面。

一、近年發現的幾批戰國秦漢數學簡牘

自 **1983** 年底 **1984** 年初湖北荊州張家山 **247** 號漢墓發現約 **200** 支數學竹簡《筭數書》之後，近 **20** 年間，在出土數學簡牘方面沒有什麼新的重大收穫。而近 **10** 年來，則不斷有發現數量不等的戰國秦漢數學簡牘的消息傳來，令中國數學史界十分振奮。這幾批數學簡牘有的基本整理完畢，有的正在整理，謹根據已經發佈的消息，以這些數學簡牘產生的年代為序，介紹如下。

・清華大學收藏的戰國算表

清華大學出土文獻研究與保護中心收藏的戰國《算表》為一表格形式的竹質冊書，由 **21** 枚竹簡組成，距今約 **2300** 年左右。全表凡 **441** 個單格。縱向 **19** 行，橫向 **19** 列，右欄與上欄分別由下至上，由左至右依次書寫 $\frac{1}{2}$，基數 **1** 至 **9** 及十位數 **10** 至 **90** 諸數。它們的乘積分別記入縱橫欄的交叉處。因此其核心為九九乘法表，其他皆為核心部分之擴展與延伸。[1]

[1] 《清華簡新進展》。復旦大學出土文獻與古文字研究中心網站：http://www.gwz.fudan.edu.cn/ShowPost.asp?ThreadID=3522，2010-8-10

・湖南裏耶出土秦九九乘法表木牘

2002 年湖南湘西裏耶古井中出土了秦九九乘法表木牘，[2]凡 **113** 字。**20** 世紀以來出土過許多有關九九乘法表的竹簡，但都是片斷，以裏耶秦九九乘法表最為完整。

・岳麓書院收藏的秦簡《數》

湖南大學岳麓書院於 **2007** 年 **12** 月在香港古董市場收購了一批竹簡，經專家組鑒定為秦簡。我們最感興趣的當然是其中的《數》。目前經過整理的《數》共有 **236** 枚編號簡，**18** 枚殘片（無編號）。保存較為完好的簡長度在 **27.5** 釐米左右，寬度約為 **0.5~0.6** 釐米。簡有上、中、下三道編繩。**0956** 號簡的背面寫有一“數”字，是為書名。[3]《數》的完整算題一般包括條件、問題、答案、術文四部分，少數算題有題名。單獨成文的「術」**19** 例。例如「合分術」、乘法口訣等。記錄穀物體積重量比率、兌換比率的簡 **34** 枚。記錄衡制的簡 **3** 枚。秦簡《數》的內容包括分數四則運算、田地面積、農作物產量、穀物的比重及兌換率、衰分、少廣、體積、盈不足、勾股及營軍、租誤券等。[4]勾股問題只發現一道算題，與《九章筭術·勾股》的勾股鋸圓材問基本一致而文字古樸。[5]

・北京大學收藏的秦數學簡

2010 年初，香港友人捐贈一批秦簡給北京大學。其中有數學竹簡 **400** 餘枚，是這批竹簡中數量最多的一類。據初步整理，認為與嶽麓書院的秦簡《數》、漢簡《筭數書》、傳世經典《九章筭術》比較接近。內容採取以類相從的方式，即將同類的問題歸於一組。其數學方法與題目的結構有二種形式：一種是先以；某某述（術）曰」的形式敍述計算方法，然後列出多道例題，這些例題只有資料的差別。一種是先舉例題，然後以「某某述（術）曰」的形式概括計算方法。大家知道，這是《九章筭術》中兩種最主要的體例。另外值得一提的是，其中有一篇長達 **800** 餘字的佚文，以「魯久次問數于陳起」開篇，論述數學的起源，作用和意義。[6,7]

・湖北博物館藏的睡虎地漢數學簡

湖北睡虎地漢墓出土了 **216** 枚數學竹簡，定名為《算術》。竹簡略有殘缺，文字完整，字跡清晰。同時出土的最後一個曆日是漢文帝后元七年（即西元前 **157** 年），有 **10** 枚簡的照片發在《江漢考古》上。這批竹簡正在整理，據初步瞭解，有一些題目與秦簡《數》、漢簡《筭數書》、《九章筭術》相似，但是也有這些著作乃至整個中國傳統數學著作中沒有的內容。[8]

此外，安徽阜陽及山東臨沂銀雀山也有數學簡牘的片斷出土。

二、戰國秦漢數學簡牘的重大意義

這些數學簡牘含有豐富的數學內容，對中國數學史研究具有極大的意義。鄒大海已

---

2 湖南省文物考古研究所：《湖南龍山裏耶戰國－秦代古城一號井發掘簡報》，《文物》，2003 年第 1 期。

3 陳松長：《岳麓書院藏秦簡內容綜述》。《文物》，2009 年第 3 期。

4 蕭燦，朱漢民：《岳麓書院藏秦簡〈數〉的主要內容及歷史價值》。《中國史研究》，2009 年第 3 期。

5 蕭燦，朱漢民：《勾股新證——岳麓書院藏秦簡〈數〉的相關研究》。《自然科學史研究》， 第 29 卷第 3 期（2010 年）。

6 《北京大學出土文獻研究所工作簡報》，總第 3 期，2010 年 10 月。

7 《北大秦簡牘整理發現中國最早數學理論論述》(光明日報)。 中國新聞網：http://www.chinanews.com.cn/cul/2010/10-25/2609393.shtml， 2010-10-25.

8 蔡丹：在秦簡《數》釋讀會上的報告，2010 年 9 月。

有文章論述。[9]現在僅想到以下幾點，與各位同仁共商。

（一）提供了人們從未見過的關於秦與先秦數學的原始文獻

一個多世紀來，研究中國數學史的學者無不為沒有秦和先秦的數學著作傳世而遺憾。以往的文物發掘，只出土過少量的算籌及九九乘法表的片段，我們主要根據出土的一些罎罎罐罐的形狀、刻畫及文史典籍中的鴻爪雪泥，推測秦與先秦的數學發展情況。戰國秦漢數學簡牘的發現提供了秦與先秦時期數學研究的人們從未見到過的第一手資料，使我們得以切實瞭解當時數學發展的某些真實情況。從這些數學簡牘看，秦與先秦的數學相當發達，不僅有完整的九九乘法表，而且有完整的分數四則運算法則及方田、粟米、衰分、少廣、商功、盈不足、勾股等方面的方法與問題。可以說，除了方程術即線性方程組解法以及標準的均輸問題外，**“**九數**”**中其他七類的方法與題目都已發現，《九章筭術》均輸章的某些算術難題，也有發現，大大豐富了中國數學史的研究內容和範圍。

（二）使對中國數學早期發展的虛無主義態度不攻自破

國內外學術界有一部分人對宋元以前的中國數學的成就是否存在表示懷疑。這裏不是指那些對中國古代數學不瞭解，也不想瞭解的歐洲中心主義者及其在中國的信徒，比如有一位自稱中國科學院上海分院的資深研究員，他竟將學術界耳熟能詳的大科學家笛卡兒、萊布尼茨說成古希臘人，把數學上黑暗的歐洲中世紀吹得天花亂墜，卻挖苦中國古代只知道畢氏定理，在數學上**“**交了白卷**”**，並把現在中國得不到諾貝爾獎歸罪於中國古代。遺憾的是，這類高論不斷見之於出版物，甚至是如《中國科學報》(今《科學導報》)、《自然辯證法通訊》等在學術界久負盛名的權威報刊。這裏指的不是這種「無知者無畏」發表高論的人，而是某些對中國古代數學有深入研究的學者，因為除了敦煌算書等零星資料 **—** 這些資料的內容都比較淺顯，而且都是 **5** 至 **10** 世紀的作品 **—** 外，沒有宋以前的數學文本傳世，他們便懷疑兩漢魏晉南北朝的數學成就的真實性，更懷疑那時是不是有數學著作存在，說什麼《九章筭術》據說成書於漢代，實際上它的最早文本出現在南宋。言外之意，中國古代數學的可靠資料是在南宋嘉定年間鮑澣之刊刻宋本算經之後，以前都是靠不住的。**1983** 年底 **1984** 年初《筭數書》的出土，在某種程度上批駁了這種錯誤看法。但是，與《筭數書》同時出土的曆日的最後年代是呂後二年（西元前 **186** 年），說其中絕大多數問題產生于秦與先秦，[10]在先秦存在並且存在不止一部數學著作，[11]是學者們經過考證得出的結論，並不是顯然的。而戰國秦漢數學簡牘的出土，給世人提供了秦與先秦數學的未經後人改竄的原始文本，不僅批駁了兩漢沒有數學著作存在的謬說，使某些學者對中國數學的早期發展情況採取的虛無主義態度不攻自破。

（三）為徹底解決《九章筭術》的成書提供了有力的佐證

一千七百多年來，關於《九章筭術》的成書問題一直有不同的說法。由於《九章筭術》是中國古代最重要的數學經典，歷來居算經之首，因此，關於《九章筭術》的成書是 **20** 世紀以來人們關注的重要課題。這裏有三個互相聯繫又有所不同側重的問題。一是《九章筭術》主要的數學方法和題目完成於什麼時候，二是先秦是不是存在某種形態的《九章筭術》，三是劉徽所看到的《九章筭術》到底在什麼時候編定的。

•《九章筭術》主要的數學方法和題目完成於什麼時候

對這個問題，中國數學史學科的奠基人之一錢寶琮（**1892-1974**）說：「無可懷疑的

---

[9] 鄒大海：出土簡牘與中國早期數學史。《人文與社會》第 2 卷第 3 期（2008）

[10] 彭浩：《張家山漢簡〈算數書〉注釋》，北京：科學出版社，2001 年。

[11] 《筭數書》不是一部系統編纂的著作，而是從從許多著作摘編而成的。見：郭書春：《〈算數書〉初探》，《國學研究》第 11 期，第 307-349 頁，2003.6。

是《九章筭術》方田、粟米、衰分、少廣、商功等章中的解題方法，絕大部分是產生于秦以前的。」[12]筆者認為：「除『方程』尚未從先秦典籍中找到資料外 — 從文史典籍中找數學方法的資料，本來是很難的 — 其餘八章的數學方法，甚至某些題目，都能從先秦典籍和出土文物中找到根據。」[13]這是在看到漢簡《筭數書》及秦簡《數》的釋文之前說的，筆者實際上認為，「《九章筭術》的主體即採取術文統率例題的部分的方法和大多數例題在戰國及秦代已完成了。」[14]這一認識對於解決《九章筭術》的編纂至關重要。

《筭數書》雖然不是《九章筭術》的前身，[15]但是，《筭數書》與秦簡《數》、北大藏數學簡與《九章筭術》有許多共同的方法甚至題目。這些共同的內容無疑是先秦數學界的共識。這再一次說明，《九章筭術》的主要方法和題目完成於先秦。

・先秦是不是存在某種形態的《九章筭術》

學術界公認，《九章筭術》是經過長期積累，由「九數」發展而來，[16]在漢代完成的。但是，明之前的數學家的具體說法卻不盡相同。自清中葉以來，許多學者更是各抒己見。在現存資料中，最先談到《九章筭術》編纂的是劉徽。他說：

> 周公制禮而有九數。九數之流，則《九章》是矣。往者暴秦焚書，經術散壞。自時厥後，漢北平侯張蒼、大司農中丞耿壽昌皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘，各稱刪補。故校其目則與古或異，而所論者多近語也。[17]

就是說，劉徽認為，《九章筭術》是由「九數」發展起來的，並且在先秦形成了某種形態的文本。這種《九章筭術》在秦火（筆者認為還應包括秦末的戰亂，特別是項羽等人的燒掠）中遭到破壞。

應當指出，在這裏，我們不能將劉徽之後的古代數學家的看法以及近人、今人的猜度與劉徽的論述放到同等的地位來討論。換言之，只有先駁倒劉徽，才能考慮劉徽之後的古人的說法是不是合理。沒有發現劉徽論述的漏洞就否定劉徽的說法，提出各種猜度，實際上是無稽之談。後面將談到，戴震等人否定劉徽論述的所謂「史料」都是錯誤的，而對《九章筭術》體例的分析，以及對其所涉及到的物價的分析證明，劉徽的論述是完全正確的。

《九章筭術》可以分成術文統率例題與應用問題集兩種體例，而術文統率例題的形式又可以分為三種不同的情形。體例的差異說明《九章筭術》不可能是一個時代編纂完成的，它經過了幾個世代許多數學家的努力。術文統率例題形式的三種情形共 **82** 術，**196** 問，覆蓋了方田、粟米、少廣、商功、盈不足、方程等六章的全部，衰分、均輸章

---

[12] 錢寶琮：《九章算術提要》。見錢寶琮校點《算經十書》，上冊。北京：中華書局，2003。《李儼錢寶琮科學史全集》，第 4 卷，瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年。

[13] 郭書春：《古代世界數學泰斗劉徽》，濟南：山東科學技術出版社，1992 年。繁體字修訂本，臺北：明文書局，1995 年。

[14] 郭書春：《九章筭術譯注·前言》，上海古籍出版社，2009. 10，2010. 4。

[15] 郭書春：《關於〈算數書〉與〈九章算術〉的關係》。《曲阜師範大學學報（自）》第 34 卷第 3 期（2008 年）。

[16] 東漢鄭玄（127-200）引鄭眾（？－83）《周禮注》釋“九數”曰：“九數：方田、粟米、差分、少廣、商功、均輸、方程、贏不足、旁要。今有重差、夕桀、勾股也”[16]。陸德明認為“夕桀”系衍文。見《周禮》，《十三經注疏》。北京：中華書局，1982 年。

[17] 郭書春匯校：匯校《九章筭術》增補版。瀋陽：遼寧教育出版社，臺北：九章出版社，2004 年。

的衰分、均輸問題，以及勾股章的勾股術、勾股容方、容圓、測邑諸術等。而採取應用問題集的形式的內容是餘下的衰分章的非衰分類問題、均輸章中的非標準均輸類問題，以及勾股章解勾股形諸問及因木望山等 **3** 問。[18]勾股章的勾股術、勾股容方、容圓、測邑諸術等是先秦九數中「旁要」的內容。那麼，若將勾股章的這部分恢復「旁要」的篇名並剔除解勾股形諸問及因木望山等 **3** 問，並將衰分章、均輸章剔除非衰分類、均輸類的內容，則《九章筭術》採取術文統率例題的部分，其內容不僅完全與篇名相符，而且與二鄭所說的「九數」驚人地一致。這證明，劉徽所說的「九數之流，則《九章》是矣」，以及「校其目則與古或異」，是言之有據的，「九數」確實是《九章筭術》的濫觴。

日本史家堀毅考察了《九章筭術》與《史記》、《漢書》、《居延漢簡》等所反映的物價。他得出結論說：「認為《九章算術》裏的物價即漢代物價是頗勉強的。」而「《九章算術》基本上反映出戰國、秦時的物價。」[19]這與劉徽的論述是吻合的。將《九章筭術》中的價格所反映的時代分野與其體例的差異結合起來分析將更加強劉徽的看法。《九章筭術》與漢代的價格的比較分析共涉及 **31** 個問題，其中與漢代價格相差較大而與戰國、秦代接近的有 **20** 個問。在這 **20** 問中有 **18** 問屬於術文統率例題的形式。而與漢代價格相近而與戰國、秦代價格相差較大的題目有 **11** 問，其中有 **7** 問屬於應用問題集的形式，有 **4** 問屬於術文統率例題的形式。

總而言之，現有的歷史資料不僅沒有與劉徽關於《九章筭術》編纂過程的論述相矛盾之處，反而證明了劉徽關於《九章筭術》的編纂的論述是完全正確的。

此外，劉徽具有實事求是的嚴謹學風和高尚的道德品質，我們不能不相信劉徽的話。他設計了牟合方蓋，指出了解決球體積的正確途徑，雖然功虧一簣，沒有求出牟合方蓋的體積，但他不僅沒有掩飾自己的不足，反而直言：「判合總結，方圓相纏，濃纖詭互，不可等正。欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者。」「隸首作數」是當時的傳統看法，他卻說「其詳未之聞也」。在描繪了塹堵的形狀之後，他說「未聞所以名之為塹堵之說也」。整個劉徽注洋溢著言必有據，不講空話的崇高精神。因此，劉徽的話有百分之百的可信度。

總之，關於《九章筭術》的編纂，我們應該相信劉徽的話。隨意否定劉徽的話，甚至杜撰別的說法，不是科學的態度。

・劉徽看到的《九章筭術》到底在什麼時候編定的

劉徽認為，他所看到的《九章筭術》是經過西漢張蒼（？—西元前 **152**）、耿壽昌（西元前 **1** 世紀）編訂的。上面指出，劉徽的話是值得相信的，如果他沒有可靠的資料，他沒有看到張蒼、耿壽昌刪補《九章筭術》的確鑿記載，對《九章筭術》的編纂這樣嚴肅的問題，是絕對不可能隨便講的。以劉徽的記載是孤例、沒有旁證為由否定劉徽的話，是沒有道理的。因為歲月延宕，天災人禍，劉徽當時能看到的資料，流傳到清中葉和今天的，百無一二。在這流傳到戴震時代少數著作中，戴震等人能讀到並且讀了之後能記住的，亦百無一二。戴震等人囿於自己的知識結構否定劉徽的論述，其偏頗可想而知。事實上，戴震等人否定張蒼刪補《九章筭術》的主要根據一是其中有地名「上林」，[20]

---

[18] 郭書春：《關於中國傳統數學的“術”》。李文林等主編：《數學與數學機械化》。濟南：山東教育出版社，2001 年。此文在筆者《古代世界數學泰斗劉徽》的有關論述基礎上作了某些修正。

[19] ［日］堀毅：《秦漢物價考》。《秦漢法制史考論》。北京：法律出版社，1988 年。

[20] 〔清〕戴震：《九章算術提要》。載《武英殿聚珍版叢書》本《九章算術》。見郭書春主編：《中國科學技術典籍通匯·數學卷》，第 1 冊。鄭州：河南教育出版社，1993 年。

二是有均輸問題，說這都是漢武帝時才有的，因此張蒼不可能參與《九章筭術》的刪補。實際上，秦始皇時就有上林苑，[21]與《筭數書》同時出土的竹簡就有均輸律。[22]否定劉徽論述的兩個最主要的理由不復存在。

《九章筭術》本身的情況也證明劉徽的話是正確的。它採取應用問題集形式的部分不僅體例、風格與術文統率例題的部分完全不同，而且題目的性質與所在章的篇名所反映的性質也有區別，有明顯的補綴性質，編纂思想也有較大的差異。[23]比較秦簡《數》、漢簡《筭數書》與《九章筭術》的少廣問題，就會發現，前二者文字古樸，而後者是漢代的語言，說明劉徽說的「所論者多近語也」，也是言之有據的。

此外，從編纂《九章筭術》的指導思想上，錢寶琮認為，[24]《九章筭術》的演算法以解決實際問題為根本目的等特點，表現了「實事求是」的作風，正是接受了荀子的唯物主義思想。另一方面，《九章筭術》對數學概念不作定義，對數學公式、解法沒有推導和證明，也體現了荀子的「約定俗成」與「學有所止」[25]的思想。就是說，《九章筭術》是在荀派儒學思想的指導下編纂的。對張蒼的思想資料，歷史記載極少。但是，荀子 **(**前 **313?-**前 **238** 年**)** 將《春秋左氏傳》「授張蒼」。張蒼將《左傳》傳給賈誼。[26]可見荀子、張蒼、賈誼是嫡傳的師生關係。賈誼是西漢初荀派儒學的主要代表人物。由此可知，張蒼是信奉荀派儒學的。[27]這也與《九章筭術》的編纂思想相吻合。

總之，《九章筭術》是張蒼、耿壽昌刪補編訂的，這一事實不容否定。

（四）為中國傳統數學的第一個高潮發生在春秋戰國提供了可靠文獻

筆者通過對《九章筭術》及其劉徽注的研究，在上世紀 **90** 年代得出中國傳統數學的第一個高潮發生在春秋戰國，西漢編訂《九章筭術》只是這個高潮的總結的結論。[28]我雖然堅信這個看法是正確的，但當時苦於缺少實證。**2000** 年《筭數書》釋文的公佈，其中豐富的數學內容及彭浩先生關於《筭數書》絕大多數問題產生于秦及先秦的結論，才使我心中的一塊石頭落了地。現在，又有幾批戰國秦漢數學簡牘被發現，提供了更多的研究秦與先秦數學的可靠文獻，徹底結束了主要是靠對《九章筭術》及其劉徽注的分析、推理得出中國傳統數學的第一個高潮發生在春秋戰國的局面。

三、期望與建議

目前，對岳麓書院藏秦簡《數》的研究方興未艾，而北大藏秦數學簡與湖北博物館藏漢數學簡正在整理之中，我們還不能窺其全豹。我們提出兩個期望：

一是希望加快北大藏秦數學簡與湖北博物館藏漢數學簡的整理速度，使之釋文早日面世。

---

21 [漢]司馬遷：《史記·秦始皇本紀》。北京：中華書局，1959 年。
22 李學勤：《中國數學史上的重大發現》。《文物天地》，1985 年第 1 期。
23 郭書春主編：《中國科學技術史·數學卷》，科學出版社，2010. 10。
24 錢寶琮：《〈九章算術〉及其劉徽注與哲學思想的關係》。《李儼錢寶琮科學史全集》，第 9 卷。遼寧教育出版社，1998 年。
25 [戰國]荀卿：《荀子》。《荀子簡注》，上海人民出版社，1975 年。
26 [西漢]劉向：《春秋序》。《春秋左傳注疏》孔穎達疏引劉向《別錄》。見：《十三經注疏》。北京：中華書局，1980 年。
27 郭書春：《張蒼與〈九章算術〉》。載：《科史薪傳》。瀋陽：遼寧教育出版社，1997 年。
28 鄒大海：《中國數學的興起與先秦數學·後記》。石家莊：河北科學技術出版社，2001 年。

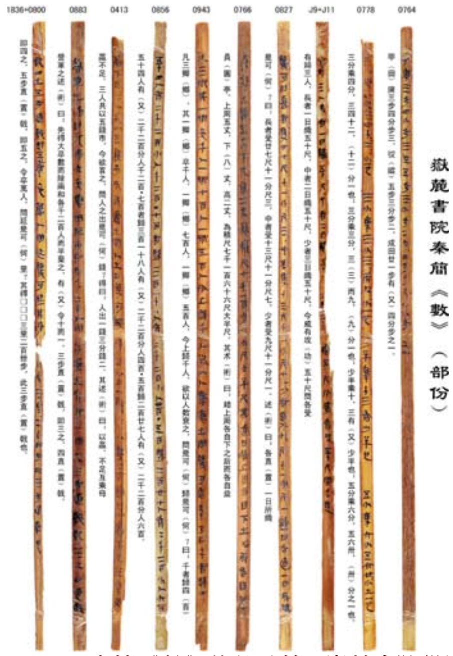
二是希望數學史界更多的同仁參加戰國秦漢數學簡牘的研究。先秦數學是中國傳統數學的源頭與基石，過去，我們的認識不得不處於撲朔迷離的狀態。隨著戰國秦漢數學簡牘的發現與研究，先秦數學的神秘面紗正逐步揭開，使我們對先秦數學的認識有可能更加接近歷史真實的彼岸。

在對戰國秦漢數學簡牘的深入研究基礎上，有兩項工作應該做：

一是組織數學史、文物考古及古文字專家，對戰國秦漢數學簡牘進行全面校注；

二是正如道本周（**Joseph Dauben**）先生提議的，在適當時候召開戰國秦漢數學簡牘的國際學術討論會，以便總結並推動戰國秦漢數學簡牘及先秦秦漢乃至整個中國數學史的研究。

湖南裏耶出土的秦九九乘法表



秦簡《數》的部分簡 **(嶽麓書院供圖)**

HPM 高中教室

單元三：平方根的近似值

蘇惠玉
台北市立西松高中

配合課程單元：**99** 課綱數學 **I,** 數系

一、 前言

在國中時，我們藉由正方形面積引進平方根的概念：一個面積為 **2** 的正方形，邊長即為 $\sqrt{2}$。當學習到一個新奇的，較難接受的概念時，教育理論告訴第一線的數學工作教育者，要先從程序性的知識著手！因此我們先學會了像 $\sqrt{2}$ 這類方根的運算，學會了求 $\sqrt{2}$ 的近似值，到高中時才真正瞭解 $\sqrt{2}$ 是什麼東西。

無理數這玩意兒，不管你心理接受的程度為何，它就是這樣子定義了：它不是有理數！然而，不管如何，我們多多少少可以透過它的近似值，稍微掌握一點無理數的輪廓，古人學習平方根的概念，也都是從它的值（儘管大部分是近似值）開始的，他們在求近似值的過程中，都曾經竭盡心力地去理解這個新的事物。在此單元中，我們就透過學習古人如何開平方，如何求近似值的方法，來努力接受與瞭解無理數吧！

二、 開方術

先從中國算術說起。《九章算術》〈少廣〉卷中有問：

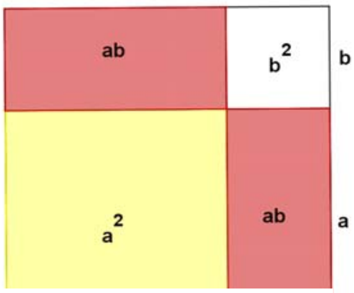
> **今有積五萬五千二百二十五步。問為方幾何？**
> **開方術曰：置積為實。借一算，步之，超一等。議所得，以一乘所借一算為法，而以除。除已，倍法為定法。其復除。折法而下。復置借算，步之如初，以復議一乘之，所得副以加定法，以除。以所得副從定法。復除，折下如前。**

這一段開方術，看起來不太好理解，由於古時候中算以算籌代筆，計算的過程實際上就是算籌的操弄，因此術文中有一些是算籌所帶來的難度，在此忽略不管。而在劉徽的注釋中，此時則提供了一個相當清楚簡潔的幾何解釋。

我們先以簡單的 **144** 為例，如題目所言，假設一個面積為 **144** 的正方形，如下圖。由於十進位制的關係，**100** 開方為 **10**，因此先考慮十位數 **a**。由於 **10** 的平方為 **100** 最接近而不超過，因此開方後得十位數為 **1**。而從面積為 **144** 的正方形中，扣除一個面積為 10^2＝**100** 的小正方形後，剩下二個矩形與一個小正方形。此時設下一位的個位數為 **b**，小正方形的邊長則為 **b**，因此剩餘的面積 **144**－**100**＝**44** 應該要等於兩個矩形與小正方形

的面積和 $2ab+b^2=b(2a+b)$，故將先前得到的十位數 **1** 乘以 **2** 倍得 **20**，再考慮 **b**，得 **b** 為 **2**，因為 $2\times(20+2)=44$。故得 **144** 的平方為 **12**。

而在少廣卷中的問題，求面積為 **55225** 的正方形邊長，開方所使用的方法與此相同，只是多求 **1** 個位數而已。



$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$=a^2+b(2a+b)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1\ \color{red}{2} \\
1 & 1'44 \\
1 & 1\ 00 \\
2\ \color{red}{2} & \quad 44 \\
 & \quad 44 \\
 & \quad\ 0
\end{array}$$

而在遙遠的希臘時期，同樣早就知道如何開方求一數的平方根。希奧恩（**Theon of Alexandria,** 第四世紀）曾舉一個簡單的例子，利用《幾何原本》第二卷命題四所得的 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 這個代數式，使用與上述類似的方法求 **144** 的平方根。他也用同樣的過程解釋托勒密（**Ptolemy, 100~178**）求 **4500** 平方根的方法，不同在於這是 **60** 進位制而已。

同樣的開平方過程，然而在中算中並沒有出現 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的蹤跡，沒有證據顯示劉徽是否知道這個代數式，或是由純粹幾何面積的分割得到開平方的過程；然而由於《幾何原本》在第二卷第四個命題已經有這個代數式，並廣為當時的數學家所知，因此在開平方與求平方根近似值的過程中，佔有舉足輕重的地位，因此在近似擲的球法中，演變出與中算截然不同的風貌來。

三、 平方根的近似值

當求一數的平方根時，一定會碰到「開不盡」的情況，亦即平方根不是整數的情形。《九章算術》在開方術之後有云：

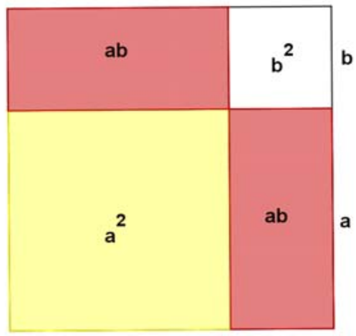
> 若開之不盡者，為不可開，當以面命之。

而劉徽注云：

> 術或有以借算加定法而命分者，雖粗相近，不可用也。凡開積為方，方之自乘當還復其積分。令不加借算而命分，則常微少；其加借算而命分，則又微多。其數不可得而定。故惟以面命之，為不失耳。

在劉徽的這段注文中，有兩個重點值得注意，其一為平方根的近似值。在開方術中，欲求 **N** 的平方根，我們很容易得到接近的整數近似值，而餘下 **r**。設 $N=a^2+r$(其中 **a, r** 皆

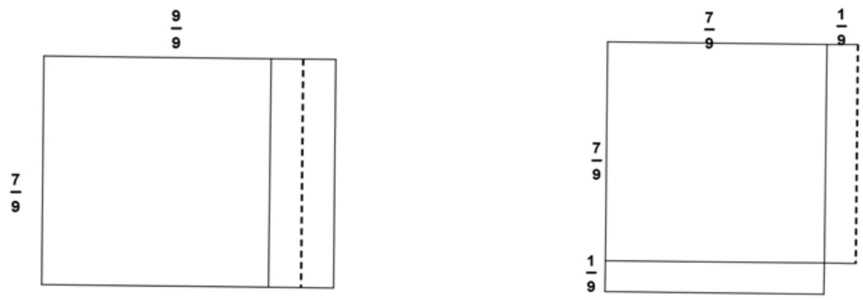
為正整數)，所謂「加借算而命分」即是以 $a+\dfrac{r}{2a+1}$ 當成 $\sqrt{N}$ 的近似值；而「不加借算而命分」即是以 $a+\dfrac{r}{2a}$ 為近似值。這兩個近似值的由來，同樣可由圖形來考慮：



由右圖可知，**N**＝**$(a+b)^2$**＝ $a^2+b(2a+b)$，其中 $b(2a+b)=r$，亦即 **b**＝ $\dfrac{r}{2a+b}$ ，**0<b<1**，取 **b** 兩個極端值 **0** 與 **1**，即得兩近似值，而 $a+\dfrac{r}{2a+1}<\sqrt{N}<a+\dfrac{r}{2a}$ 。

在劉徽注文中的第二個值得注意的重點為對「無理數」的認識與命名。劉徽認為無論是 $a+\dfrac{r}{2a+1}$ 或是 $a+\dfrac{r}{2a}$ 都會有誤差，**N** 真正的平分根，平方以後應該要等於 **N**，因此他說開不盡時，應該要「以面命分」！所謂「以面命分」，跟現在「根」的說法是一致的，例如「**2** 之面」就是 **2** 的平方根，幾何意義就是「面積為 **2** 的正方形的邊長」，那時候還沒認識到負的平方根這一回事。從劉徽在「開圓術」中引東漢張衡關於圓周率的推算中，提到得「八之面」，也可知早在劉徽之前，中算家中已有人應該認識到有一些數是無法用有限小數表達的，亦即早意識到了無理數的存在。

對於平根根的近似值，古埃及人在解決「化圓為方」的問題時，曾碰到「作一面積為 $\dfrac{63}{81}$ 的正方形」的問題。他們對於這個問題的一個解法，是把 $\dfrac{63}{81}$ 看成是 $\dfrac{7}{9}\times\dfrac{9}{9}$ 的矩形，然後把 $\dfrac{9}{9}$ 中多餘的 $\dfrac{2}{9}$ 分成兩半，一半搬到 $\dfrac{7}{9}$ 那一邊的下面，變成一個磬折形(**gnomon**)，如下圖，對於少了一個小正方形則忽略不計，將此當成一個近似值使用。



而巴比倫人因為有所謂的平方與平分根表供給計算時參考，因此，可以知道他們一定須要計算平方根的近似值，如一塊現存的巴比倫泥版上，在邊長為 **30** 公分的正方形的對角線上，就記上了 $\sqrt{2}$ 的近似值 **1; 24; 51, 10**（六十進位制，等於 **1** $\dfrac{24}{60}\ \dfrac{51}{60^2}\ \dfrac{10}{60^3}$ ），根據泥版文書上留下的蹤跡推論，他們的近似值來源可能同樣用了來自於幾何面積分割的代

數式：$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$。例如求$\sqrt{N}$，第一步先選擇接近的正則數[29]**a**，剩下為**b**，即$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}$，若將完全平方式中的$\mathbf{x^2}$忽略不計，剩下的$b\approx 2ax$，即選擇$x\approx\dfrac{b}{2a}$，所以$\sqrt{N}\approx a+\dfrac{b}{2a}$。同樣若$\sqrt{N}=\sqrt{a^2-b}\approx a-\dfrac{b}{2a}$。

至於古希臘時期求平方根近似值所用的方法，也所差無幾。我們可以合理地猜測畢達哥拉斯一定也熟悉完全平方的代數式，因此所找的近似值類似巴比倫人的形式，只是畢氏通常是從最接近的分數，且分母是平方數來著手。舉例來說，對於$\sqrt{2}$，他選擇將 **2** 改成$\dfrac{50}{25}$，即

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{50}{25}}=\sqrt{\frac{49+1}{25}}\fallingdotseq\frac{7}{5}$$

而對$\sqrt{50}$，則同樣以 $\mathbf{a}+\dfrac{b}{2a}$當成近似值：

$$\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}\fallingdotseq 7+\frac{1}{2\cdot 7}$$

四、 阿基米德的$\sqrt{3}$近似值

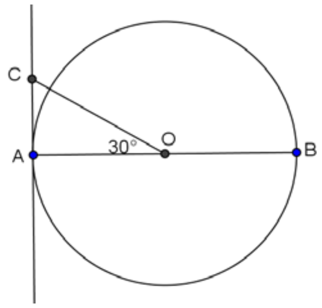
阿基米德在《圓的測量》一書的命題 3 中，提出π的近似值：

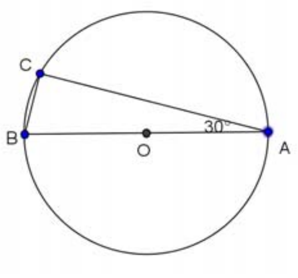
任何一個圓周與它的直徑的比小於$3\dfrac{1}{7}$而大於$3\dfrac{10}{71}$

而為了得到這兩個近似值，阿基米德首先過圓直徑 AB 的一點 A 作切線，然後作出一個∠AOC＝30^0的直角三角形，得到$\overline{OA}$：$\overline{AC}=\sqrt{3}$：1，因而給出第一個比$\sqrt{3}$小的近似值$\dfrac{265}{153}$，再連續二等分角直到得出外切正 96 邊形的一邊長，從而得出$\pi<3\dfrac{1}{7}$。第二部分他從內接著手，同樣作∠BAC＝30^0的直角三角形，此時 C 為 AC 與圓 O 的交點，由此直角三角形而有$\overline{AC}$：$\overline{CB}=\sqrt{3}$：1，此時他給出$\sqrt{3}$另一個較大的近似值$\dfrac{1351}{780}$，同樣連續二等分角直到得出內接正 96 邊形的一邊長，從而得出$\pi>3\dfrac{10}{71}$。

---

[29] 所謂「正則數」，指的是倒數在 60 進位制中為有限小數的正整數，因為在計算近似值中，須要計算倒數。





阿基米德到底是如何得到$\sqrt{3}$的近似值？阿基米德並沒有解釋，然而我們可以根據希臘當時的幾何學家所採取得方法分析，從而得出阿基米德可能採取得步驟。比較$\frac{265}{153}$與$\frac{1351}{780}$這兩個分數，由於

780＝2×2×3×5×13=52×3×5

153=3×3×17=3×51

利用此將分母改變一下，即得

$$\frac{265}{153}=\frac{265\cdot 5}{3\cdot 51\cdot 5}=\frac{1325}{15\cdot 51}$$

$$\frac{1351}{780}=\frac{1351}{15\cdot 52}$$

把阿基米德的假設代入，即$\frac{1}{15}\cdot\frac{1325}{51}<\sqrt{3}<\frac{1}{15}\cdot\frac{1351}{52}$

這個式子等同於 $\frac{1}{15}\,(26-\frac{1}{51})<\sqrt{3}<\frac{1}{15}(26-\frac{1}{52})$

而 $26-\frac{1}{52}=\sqrt{26^2-1+(\frac{1}{52})^2}$，以希臘人對平分根近似值的取法，即$\sqrt{26^2-1}<26-\frac{1}{2\cdot 26}$ $=26-\frac{1}{52}$，再除以 **15**，得到

$$\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}<\frac{1}{15}(26-\frac{1}{52})\text{，}$$

然而 $$\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}=\sqrt{\frac{676-1}{225}}=\sqrt{\frac{675}{225}}=\sqrt{3}$$

同樣地，$\sqrt{3}$的另一下限可由$\sqrt{26^2-1}>26-\frac{1}{2\cdot 26-1}=26-\frac{1}{51}$得到。

從歷史的證據來看，阿基米德應該發現並證明了平方根近似值的結論，即$a\pm\frac{b}{2a\pm 1}<\sqrt{a^2\pm b}<a\pm\frac{b}{2a}$，然而阿基米德並不以隨便一個近似值而滿足，巧妙就在於他重複利用這個式子，得出一個趨近於$\sqrt{3}$的數列，也因此得到$\sqrt{3}$更精確的近似值。

我們將上述的分析步驟反過來，應該就是阿基米德所採取的步驟：

從代表正三角形高的線段長得到$\sqrt{3}$，首先

$$\mathbf{2}-\frac{1}{3}<\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}<\mathbf{2}-\frac{1}{2\cdot 2}=\mathbf{2}-\frac{1}{4}$$

再以 $\mathbf{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ 當成 **a** 代入（$(\frac{5}{3})^2=\frac{25}{9}$），得到

$$\sqrt{3}=\sqrt{\frac{27}{9}}=\sqrt{\frac{25^2+2}{9}}<\frac{1}{3}(5+\frac{1}{5})=\frac{26}{15}$$

再以 $\frac{26}{15}$ 繼續作下去，由於 $(\frac{26}{15})^2=\frac{676}{225}$ 與 $3(=\frac{675}{225})$ 作比較，因而有

$\sqrt{3}=\sqrt{\frac{26^2-1}{225}}<\frac{1}{15}(26-\frac{1}{52})$，即 $\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$，並可得另一邊

$$\sqrt{3}>\frac{1}{15}(26-\frac{1}{52-1})=\frac{265}{153}$$

也就是說，可得$\sqrt{3}$的兩個近似值，即 $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$。綜合阿基米德得到$\sqrt{3}$近似值的一系列越來越精確的數：**2,** $\frac{5}{3}$，$\frac{26}{15}$，$\frac{1351}{780}$，到此之後，再算平方就不那麼方便了。

比較一下中國算學與希臘數學採用的平方根近似值公式。中算中由於強烈的正方形面積分割策略的採用，因此通常只採用「加」的形式（即 $a+\frac{b}{2a}$），而不用「減」的形式。然而無論希臘數學中，由於熟悉代數式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，因此也常以「減」的形式（即 $a-\frac{b}{2a}$）來計算近似值，也因此使得近似值的找法更加有彈性，也更為精確。

另一個明顯的不同點，由阿基米德採用的步驟可以看出，通常中算家僅滿足於一個近似值，並沒有證據顯示中算家會像阿基米德一般，利用一連串的數，以同樣的手法從而得出更精確的近似值。

五、以連分數表示近似值

對連分數的研究起源於對非完全平方數的平方根（即無理數）近似值問題，在歐洲，第一個用連分數概念求平分根近似值的人為文藝復興時期的數學家邦貝力（**R. Bombelli, 1526~1572**），他原是一位水利工程設計師，業餘研究數學，因此在想要以更簡潔，更易接受的方法來表示平方根的近似值的需求下，他寫下以連分數表示平分根近似值的方法，但是可惜的是，他並沒有給出理由，也沒說明他是如何發現的。以下為他以連分數作出$\sqrt{13}$近似值的方法，從他的方法中，我們可以發現前人求近似值公式的痕跡：

因為 $\sqrt{13}=\sqrt{3^2+4}\fallingdotseq 3+\frac{4}{2\cdot 3}=3+\frac{4}{6}$

$$\fallingdotseq 3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}=3+\frac{3}{5}$$

$$\fallingdotseq 3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}}=3+\frac{20}{33}$$

邦貝力一直繼續下去他的步驟，直到得到 $\sqrt{13}$ 近似值 $\mathbf{3}+\frac{109}{180}$ 。

若我們將邦貝力的方法一般化，即可得到用連分數來表示一個非完全平方數的平分根的方法：

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2\pm b}=a\pm\cfrac{b}{2a\pm\cfrac{b}{2a\pm\cfrac{b}{2a\pm\cfrac{b}{\cdots}}}}$$

由此我們可以將 $\sqrt{2}$ 用連分數來表示為 $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$ ，從這個連分數也可得到一個趨近於 $\sqrt{2}$ 的分數數列：**1,** $\frac{3}{2}$**,** $\frac{7}{5}$**,** $\frac{17}{12}$**,** $\frac{41}{29}$**…**

Exercise

1. (1) 利用開方術計算 $\sqrt{55225}$

(2)求 $\sqrt{560}$ 的近似值到小數點後第二位（四捨五入）

2. 利用《九章算術》中所提的「不加借筭而命分」計算 $\sqrt{150}$ 的近似值。

3. 仿照阿基米德求 $\sqrt{3}$ 近似值的方法，求一趨近於 $\sqrt{5}$ 的分數數列（每一項皆小於 $\sqrt{5}$ ）的前三項，其首項為 **2**。

4. 看了古中國算學家與埃及、巴比倫及阿基米德求平方根近似值的方法，你的感想是什麼？

5. (1) 將 $\sqrt{3}$ 用連分數來表示，並以此計算一趨近於 $\sqrt{3}$ 數列的前三項。

(2) 將(1)得到的三個$\sqrt{3}$的近似值，與阿基米德方法中得到的近似值作比較，你發現了什麼？

參考文獻

Katz, V. J. (1993), *A History of Mathematics*, New York: HarperCollins College Publishers.
Katz, V. J. (1993), *A History of Mathematics*, second edition. (李文林、鄒建成、胥鳴傳等譯)（**2004**），北京：高等教育出版社。
Heath, T. L. (2002), *The Works of Archimedes*, New York: Dover Publications, INC.
李文林主編（2000），《數學珍寶》，台北：九章出版社。
郭書春 **(1995).**《古代世界數學泰斗—劉徽》，台北：明文書局。
李繼閔 **(1998).**《《九章算術》及其劉徽注研究》，台北：九章出版社。
郭書春匯校（**2004**），《匯校九章算術》，台北：九章出版社。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：英家銘（中原大學）許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

數學與敘事的完美結合：鄭重推薦《學微積分，也學人生》

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：學微積分，也學人生（***The Calculus of Friendship: What a Teacher and a Student Learned about Life While Corresponding about Math***）
作者：史蒂芬・史特格茲（**Steven Strogatz**）
譯者序：蔡承志教授
導讀序：游森棚教授
推薦序：張海潮教授
出版社：遠流出版公司，台北市
出版資料：平裝，**238** 頁
出版年：**2011**
關鍵詞：美國科普、個人化書寫、微積分、費波納西數列、不可公度量

一、前言

一本數學普及書籍在書末總整理所論及之數學問題？怎麼會呢？不過，史蒂芬・史特格茲卻在本書最後，「**為數學老師、學生以及對數學特別有興趣的人準備了一份清單，列出本書所討論的問題**」。至於其單元，則包括有幾何、三角函數、機率與離散數學、微積分、微分方程、傅立葉級數、複變（數）函數、漸近線（逼近）方法，以及變分法（微積分）。而且，其相關內容也相當深入，絕對不是「隨便」選修微積分的讀者，就可以輕易理解。可見，本書英文版書銜中的 **calculus (of friendship)**，絕對不僅止於「微積分」，更多的，作者顯然利用這種雙關語，來比喻師生情誼的數不盡點滴！請參看作者如下的自白：

> **微積分是研究改變（change）的一門數學。它原本的名字「流動」（fluxion）將微積分的精神掌握得最好。這名字是微積分的發明者牛頓所取的，它會讓人聯想到一個持續在運動、不斷在開展的系統。**
> **就像微積分本身一樣，這本書也是對於改變的一種探索。它探索的是發生在一個學生內心世界的轉變，30 年間，他和他的老師角色互換，他們的年紀一起增長年紀一起增長，同時各自遭逢人生帶給他們的種種打擊。但在經歷種種改變的過程中，他們因一份對微積分的熱愛而綁在一起。對他們來說，微積分不僅僅是一門科學，也是他們喜歡一起玩的一種遊戲（男人之間友誼的基礎經常就是這類東西），那是當他們周遭事物持續在流動時維持不變的東西。**

因此，儘管作者在本書中「暢談」數學，一點都不打算放棄「數學品味」，本書還是值得大力推薦給一般讀者！究其主因，我想作者的個人化「數學經驗」（**mathematical experience**）的書寫風格，就是它的最大賣點。我們從本書的閱讀中，的確很容易分享

作者的困而學之、生涯挫折以及緬懷師恩的至情至性等等。所有這些，都將作者這一位頂尖的應用數學家還原成為鄰家叔叔，從而引發一般讀者的同理心。

本書是史特格茲（**Steven Strogatz, 1959-**）利用他與高中老師唐恩・喬弗瑞（**Don Joffray**）（暱稱喬夫）之通信，回憶師生三十年師生情誼的動人故事。這一段歷史重建，對他自己帶來極大的滿足（引自本書最後一章）：

> **在寫這本書的過程中我一直在想，我到底從喬夫那裡學到些什麼。這麼多年來，我的回答大概都是：沒多少東西；意思是，我從沒從他那裡學到多少數學。這是真的，即便是我讀高中的階段。但是現在，我開始能體會他給了我些什麼。**
>
> **他讓我可以教他。**
>
> **在我還沒有任何學生之前，他就是我的學生。**
>
> **他似乎知道這正是我最需要的。而他給我機會、鼓勵我，並且幫助我，就像所有偉大的教師所做的那樣。**
>
> **然而現在我還看出我確實從他那裡學到某些東西，某些有深刻數學內涵的事情：關於如何過人生。無論是從事他最喜歡的休閒活動或面對人生的起伏，喬夫都表現得像個勇者，無懼於改變。他會與波浪一起翻滾，並嘗試與它和平相處。在他能力所及範圍之內，他甚至會和它玩起遊戲。爵士鋼琴、衝浪、激流方舟，這些活動都需要在「勢必發生」與「無法預測」之間取得平衡，而這兩者正是事物改變的兩個面向。有次（秩）序的及混沌的。微積分所能馴服的改變（變化），以及它所無法馴服的改變（變化）。他選擇正面去面對這一切：不只用心智（mind）去面對它們（像季諾那樣），也用他的心（heart）去面對。**

上述引文中的中譯名詞「次序」（**order**）與「改變」（**change**），我比較喜歡（依序）譯成「秩序」與「變化」。不過，這兩個對立的語詞出現在同一段文字中，一方面作者用以描繪喬夫老師一生的勇於探索，另一方面，也連結到他自己並非全然一帆風順的學術事業與家庭生活。從書寫風格來說，這種對比手法相當高明，足見作者不僅數學功力一把罩，寫作能力亦非一般作者可以相提並論。

本書作者史蒂芬・史特格茲是康乃爾大學應用數學系講座教授，專長是動態系統與複雜網路理論。**1998** 年，他與 **Duncan Watts** 共同在《自然》（***Nature***）上發表 **"Collective dynamics of small-world networks"**，成為該領域的經典論文。目前，他每週為《紐約時報》（***The New York Times***）撰寫科普專欄。一貫地，他總是現身說法，深入淺出，因此，這一專欄吸引了許多讀者，尤其被推薦為企業家與 **CEO** 的必讀文章。

二、內容簡介

正如蔡承志教授在他譯序〈微積分中的人生意義〉所指出：「**史特格茲無意將友誼或人生看成一個微積分問題去做精確的分析；相反地，他選擇利用微積分中的一些基礎概念（連續、追逐、相對、無理、隨機、無限、混沌、下坡、分歧等）來隱喻或明喻真實人生。**」事實上，本書除了書末的〈延伸閱讀〉、〈參考文獻〉與前述的〈數學問題總

整理〉之外，依作者與喬夫老師的通信時間順序，目錄如下（原書各章未編號次）：

1. 連續性（**1974-75**）
2. 追逐（**1976**）
3. 相對論（**1977**）
4. 無理數（**1978-79**）
5. 移位（**1980-89**）
6. 餐墊紙上的證明（**1989.3**）
7. 和尚和山（**1989-1990**）
8. 隨機（**1990-91**）
9. 無限與極限（**1991**）
10. 混沌（**1992-95**）
11. 慶祝（**1996-99**）
12. 最快走下坡之路（**2000-03**）
13. 分歧（**2004**）
14. 海龍公式（**2005-**目前）

一開始，作者就強調「連續性」對函數的重要性：「微積分之所以成功，關鍵就在於『連續性』（**continuity**）這個概念。它的核心假設是：事物是平順地在改變，所以每樣事物與片刻之前的它只有無限微小的差別。」「事實證明，這種理解『改變』的方式帶出來的威力是言語難以形容的：它可能是人類曾有過的最偉大想法。微積分能讓我們登陸月球、以光速傳遞訊息、建造橋樑來橫跨寬達數公里的河流，甚至幫助人類限制流行病的擴散。簡言之，沒有微積分的話，就沒有現代化的生活。」

基於此一特性，微積分不僅可以幫助我們「預測未來」，同時也可以「重建過去」，儘管不連續點（**points of discontinuity**）在所難免。作者利用這些數學知識的特性，來說明他與喬夫老師通信的不連續性，對於他打算重建三十年如一日的師生情誼，所可能帶來的極限。其實，作者在 **1974** 年就學盧密斯中學（康乃狄克州一所明星高中）高一時，即選修「微積分先修班」，授課老師並非喬夫，而是一位剛從 **MIT** 畢業的教師強森，上課時就預告他們一定無法理解有關連續函數的$\varepsilon-\delta$定義：

> 函數 f 在點 x 為連續的條件是：對任何$\varepsilon>0$而言，存在一個$\delta>0$，使得若$|x-y|<\delta$，則$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

後來，他們聽說喬夫老師在他班上用很一樣的方法來介紹連續性：「他甚至完全不解釋ε與δ是怎麼一回事。他把連續函數定義成：鉛筆不需離開紙面就能將函數圖形畫出來的那種函數。」

事實上，喬夫老師的上課模式大概如下：先提出一個問題，態度輕鬆，不給學生壓力，然後走下講台。通常是班．范恩和作者在較勁看誰能解出。這種方式不循傳統，而

且，喬夫老師經常問一些古怪但有趣的問題，譬如被人用長繩索拴住的山羊，如果繃緊繩子企圖離開那棵樹，那麼，它就會像一道漩渦愈走愈靠近那棵樹。最後，他希望學生寫出山羊所走的漩渦狀軌跡方程式。

作者利用這個插曲，來比喻他與喬夫老師的師生關係：「**隨著時間的進展，我現在知道自己就像那隻被人用繩子繫在樹幹上的山羊，而喬弗瑞就是那棵樹。這些年來，我拉緊繩子想離開他，反倒讓自己愈繞圈愈靠近他。**」事實上，這個追逐的主題在下兩章繼續出現，可見作者應該非常著迷才是。

作者如此「心繫」喬夫老師，顯然還有另一個原因，那是因為喬夫老師偶爾上課到一半的時候，會岔開話題，開始分享他的得意門生的豐功偉業，譬如傑米‧威廉斯曾經寫出費伯納西數列（**Fibonacci sequence**）的一般項：

$$F(n)=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$ 。

在第 **2** 章〈追逐〉（**1976**）中，作者延續追逐問題的討論，當年他念高二，已經修完學校的所有數學課，每天花時間自修多變數微積分。由於比較了「狗與郵差」以及「意志堅定的獨木舟選手」兩類追逐問題之後，他發現這些都是微分方程的問題，至於它們的解之曲線軌跡，則可以想像成為譬如狗在追逐獵物時所行進的無限小步幅所組成。基於此作者評論說：「**這種世界觀，即每件事物都可看成由無限微小的改變累積而成，是微積分最具革命性的洞見。弄清楚如何將這種想法轉變成可以操作的數學計算，是一項重大突破。**」無論如何，「**在探討追逐問題時，感覺上你就像是牛頓志同道合的好朋友**」。

正如前述，第 **3** 章〈相對論〉（**1977**）的主題還是追逐問題。在作者寫給喬夫老師的第一封信中，討論了四隻狗的追逐問題之解法。此外，作者也透露他所以選擇進入普林斯頓大學，是因為愛因斯坦（曾經）就在那兒。不過，他的大學第一門數學課卻是讓他「**完全挫敗，也改變了自我認知**」：

> **那是一門幾乎全是證明的線性代數課。它鎖定的對象是那些將來有意主修數學的大一新生。那門課的用意是幫助學生習慣既嚴謹又抽象的數學 － 如果你想成為純數學家，那麼你就必須擅長這類事。那位教授，一個很有名的拓樸學家，相當害羞，以致於第一天進入講堂時，他就貼著牆壁走，彷彿希望自己成為隱形人。接下來一整個學期，他總是低著頭看著他的鞋子，並且不時拉扯自己的紅鬍子。有幾次我鼓起勇氣問他問題，他似乎嚇到了，只是簡單地回答「是」或「不是」。我自己讀課本、做作業，上課也很專心聽，但還是不知道他在上什麼課。那是很恐怖的經驗，不管我怎麼做，就是無法掌握課程內容。教科書很枯燥、講究細節，而且沒有任何圖示。作業令人困惑。至於測驗，只要想到考試，我就忍不住想往廁所跑。**

這種徹底受挫的數學經驗，讓作者沮喪到考慮轉物理系。幸好，他升上大二碰到善

於啟發學生的名師伊利亞斯‧史坦（**Elias Stein**）講授複變函數論，[30]他才繼續留在數學系主修。不過，此時家人（尤其擔任律師的哥哥）建議他轉向醫科。他在一番自我性向探索之後，態度終於軟化。然而，「**這完全沒有道理**」（**irrational**）！因為他就是想作一個數學家！本書第 **4** 章的主題〈無理數〉（**1978-79**），顯然就是在呼應他此時的心境。**1979** 年 **2** 月 **20** 日，在他寫給喬夫老師的這一封信中，作者運用古希臘畢達哥拉斯學派的可公度量概念，提供了 $\sqrt{2}$ 是無理數（事實上，是「不可公度量」（**incommensurable**））的一個非傳統制式（**non-conventional**）的證法。[31]作者認為傳統制式的這個「**證明的邏輯非常嚴謹，但它有一點令人看不慣。除了它很迂迴之外，其論證也沒有針對主題，它讓** $\sqrt{2}$ **的無理性看起來像是數論上的定理，而非幾何學上的定理。我們剛剛開始所談到的那些幾何圖形（正方形、對角線及三角形），都到哪裡去了呢？**」

作者所介紹的非制式證明，當然只用到幾何概念，儘管還是離不開歸謬法。這一段插曲，顯然意在引伸他原先打算放棄摯愛的數學，但是，在他與媽媽交心之後，決定回到數學的懷抱：「**有些人從未找到他們的摯愛，但是藉由否定自己的摯愛，我反而找到了它，而且確信它才是我的摯愛。**」

從第 **5** 章〈移位〉（**1980-1989**）開始，作者與喬夫老師的關係有了微妙的變化：他生平第一次將喬弗瑞老師當成朋友，一個幾乎可以跟他平起平坐對談的朋友。類比這種移位，作者在 **1981** 年寫給喬夫老師的這一封信中，介紹他運用移位算符（**shift operator**），而找到費伯納西數列的一般項。這是一個十分簡單、但高度優雅的進路，值得我們鄭重推薦！

在第 **6** 章〈餐墊紙上的證明〉（**1989.3**）中，作者提及他人生的一個重要路口：學業即將完成（**1986** 年他榮獲哈佛大學應用數學博士，旋即從事博士後研究三年），事業即將開展，而且還獲得 **MIT** 的助理教授職位。不過，在本章中，作者主要回答喬夫問他關於 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$ 以及與它相關的積分 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}$ 的問題。此外，他們也討論了傅立葉級數、積分內微分、Γ 函數（階乘函數 $n!$ 的延拓），以及其它相關問題。

在 **1989-1990** 年間，作者與喬夫老師之間的通信空前熱絡，而這正發生在他們師徒事業的黃金交叉點之際：喬夫正準備退休，而作者則開始大展宏圖，並與前妻伊莉莎白談戀愛。於是，作者利用（第 **7** 章標題）「和尚與山」的數學問題，來比喻「**我們兩人此時是在同一個時間到達同一個地點，雖然各走各的旅程**」。在本章中，作者討論的問題還有非線性振盪子，以及 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 的計算問題。此外，在 **1990** 年春，他與學弟艾德‧瑞克返回母校，擔任神秘嘉賓，祝賀喬夫老師榮獲該年之優秀教學「天鵝獎」。結果，作者致詞沒幾句話，即哽咽無法終場。

1990 年，正當作者與伊莉莎白訂婚後即出現危機時，他的母親突然去世，這對他的打擊甚大。在葬禮進行中，他甚至傷心欲絕，淒厲哭號。此時，喬夫老師的信函雖然隻

[30] 史坦是普林斯頓數學大師，徒弟中有兩名榮獲費爾茲獎，包括鼎鼎大名的陶哲軒，2006 年得主之一。
[31] 作者特別聲明此一方法是普林斯頓葛洛斯（Benedict Gross）老師所告知。

字未提慰問之意（他們師徒的默契鮮少乎提及私事），還是為他帶來療傷的效果。喬夫除了與他分享幾個有關積分值的教學心得（譬如 $n!=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ 與 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ ）之外，還跟他討論當時電視節目中相當熱門的蒙提・霍爾（**Monty Hall**）問題。作者則在回信中，說明了他如何計算 $\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2m}d\theta=\frac{2\pi(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$ 。

上一段是第 **8** 章〈隨機〉（**1990-91**）主要內容。作者以隨機為標題，應該意在說明人世之無常，也多少呼應了他所討論的蒙提・霍爾問題。第 **9** 章的主題是〈無限與極限〉（**1991**），本章一開始，作者就強調「**微積分的偉大成就在於它馴服了無限大**」，「**微積分的創始者敢於面對無限大，因為他們別無選擇。甚至在還沒有掌握微積分的邏輯之前，他們就感覺到無限大，以及它的鏡像無限小，是解決那個時代是懸題的關鍵**」。在此，他們師徒討論了研讀卡爾・博耶（**Carl Boyer**）《數學史》（***A History of Mathematics***）所引述的一個無窮乘積之成立。[32]在這 **1991** 年的通信中，喬夫老師首度打破默契，輕輕地詢問作者訂婚的消息，之後又透露他幼兒接受癌症治療的消息。但是，作者「似乎決定繼續待在井然有序的數學世界裡」。因此，

> **我們這一回合通信的主題是「極限」與「無限大」，或許這並非純屬偶然。當我們兩個人心中正因為親人的離世或病痛悲傷時，或許我們很自然地都希望在那個「能讓無限大成為真實」的世界裡找到避難所。**

現在，作者終於面臨了他學術生涯中的最關鍵轉折，可是，他卻選擇〈混沌〉（本書第 **10** 章），來作為此一段時間（**1992-1995**）的標題。此時，作者面臨了與伊莉莎白的婚姻問題（最後離婚收場），以及他是否續留 **MIT** 的生涯抉擇。如果留下去，**MIT** 願意提升他為非終身職的副教授，如果他應康乃爾大學之聘，則可提前兩年獲得終身職。顯然，他對於 **MIT** 的最終無法賞識他的表現不無微詞，不過，他還是十分高興選擇了康乃爾。這個決定（從 **1994** 年開始），讓他在 **1995** 年與喬夫通信時，顯得十分滿意。

1999 年，作者應邀參加在紐約市舉辦的「慶祝教育之夜」，表彰 **49** 年教職的喬夫老師的教學成就。作者邀請 **1998** 年再婚的太太卡蘿一起與會，算是正式介紹給老師與師母。當晚，賓主盡歡，作者致詞不再「失態」，讓喬夫老師「福杯滿溢」，成為「教書生涯的一個最高點」。這是本書第 **11** 章〈慶祝〉（**1996-1999**）的主題。

喬夫老師正式退休後，有一段時間顯然很難適應，他向作者透露：「**你有沒有感覺到，我這個 72 歲的老頭，有那種害怕『自己』被衰老及阿茲海默症擄走的憂慮**」。這是本書第 **12** 章〈最快走下坡之路〉（**2000-03**）的故事。其實，這個標題與喬夫向一位女服務生（很有耐性）解釋最速下降曲線有關，在另一封信裡，喬夫則討論了電台節目《車談》的某個扣應問題：如何製作刻度尺來量測一個圓柱形油槽的現有油量。

[32] 這一本數學史著作是非常經典的入門書，目前仍廣受讀者閱讀與參考。

第 **13** 章的主題是〈分歧〉(**bifurcation**)(**2004**)。從數學觀點來看，這是作者在呼應第 **10** 章的〈混沌〉。作者首先指出：自然界的變化會出現劇烈性及不可預測性，因此，數學家必須發展出不同的數學工具來處理這些迥然相異的現象。「在溫和的一端，是一個系統遵照微分方程來做有次(秩)序的改變，而其中的物體則依據運動定律來滑行」。「與前者相對的另一個極端，則是狂野、不合理的改變。」「介於這兩個極端之間的是一些特別的系統，它們遵循某些規則，但那些規則又可能導致系統本身的瓦解，這聽起來有點自我矛盾。這些系統具有發生劇烈改變的潛力，然而，它們目前還處於休眠狀態，只需要輕輕一推，通常只是我們察覺不到的一點壓力變化，就足以將它們推落懸崖。我們這裡所談的是一個傾倒點，一個相變的臨界點，也就是壓斷駱駝脖子的那根稻草。這樣的轉變令人感到驚訝它同時合乎邏輯的要求。」作者特別指出與這現象有關的數學概念，稱為「分歧」，這是當系統的參數連續變化時，此一系統的行為卻不連續地變化。譬如，當你逐漸把溫度升高（定量的改變），而系統內沒發生什麼事，但是，到了分歧點，鍋子就開始沸騰，而發生了定性的改變。

在人生的這個「分歧點」，喬夫在 **2004** 年 **1** 月寫信告知作者輕度中風的消息，作者沒有立即回信，主要是因為他的父親甫於去年 **10** 月過世。不幸，作者的哥哥也在 **2004** 年 **4** 月突然過世，得年 **57** 歲，過程與他媽媽相仿。聽到這個消息，喬夫寄來一張慰問卡。於是，作者立即撥電話給喬夫老師，並且約好 **8** 月去拜訪他，同時，希望老師談論一點他們師徒從未談論的私事。這趟探訪之旅讓作者師徒倆既興奮又緊張，難怪他太太卡蘿喜歡調侃他們這兩個男人的三十年情誼。

現在，是返璞歸真的時候了！本書最後一章(即第 **14** 章)主題〈海龍公式〉(**2005-**目前)。本書前面所討論的數學，都是關乎微積分或數學分析(只有 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明例外)，沒想到他們師徒兩人在本書中所討論的最後一個定理，竟然是一個初等幾何的經典公式！這是 **2007** 年喬夫老師二次中風之前，與作者討論的主題。至於在書寫的比喻（**metaphor**）方面，作者運用了季諾（**Zeno**）的飛毛腿阿基里斯追逐烏龜悖論（**paradox**）。作者為了寫這一本書，他重新翻閱他與喬夫老師的通信內容，讓他「深切體會到『過去』正朝著『現在』進逼，一年接一年從背後追上來。身處於這個緩慢移動著的『現在』，喬夫和我就像兩隻被時間追逐的烏龜。」而所有這一切，都歸結到作者所領悟的人生智慧：「微積分所能馴服的改變，以及他所無法馴服的改變。他選擇正面去面對這一切：不只用心智（**mind**）去面對它們（像季諾一樣），也用他的心（**heart**）去面對」。

三、評論

本書的數學解提及其說明（或證明），充分地見證了作者的數學洞察力，也足以顯示康乃爾大學的應用數學講座教授，絕非浪得虛名！事實上，有別於飛鷹（**eagle**）型的進路，作者是一位青蛙（**frog**）型的數學家，總是可以在泥淖中找到出路。吾人一旦掌握他的解法，就可以體會他穿透表象、直指核心的看家功夫。此外，作者的學養也極為博雅，我們只要瀏覽他在本書末所附的參考文獻，就可以略知一二。

事實上，作者在本書中最值得稱頌的創意，莫過於各章標題的擬定，以及相關數學概念的解說與文學比喻（**literary metaphor**）。雖然這些不無可能多少來自本書英文版編輯的建議，但是，作者融微積分與人生於一體，卻是一般文字書寫者（或一般文人）難以攀登的高峰。同時，他運用三十年間與喬夫老師的數學通信，勾勒了他自己的大半輩子人生與功成名就的學術生涯。這種「五十自述」的書寫手法（作者出生於 **1959** 年），也令人大開眼界。

另一方面，作者刻意引述喬夫老師有關海龍公式之證明，以及介紹極有「品味」的 $\sqrt{2}$ 為無理數之證明，顯示他非常希望一般讀者也可以分享他那十分獨特的數學經驗。因此，缺乏微積分知識的一般讀者，應該也多少可以體會這些經驗分享的用心良苦才是。

總之，這是一本數學與敘事（**narrative**）完美結合的一本數學普及書籍。作者既寫數學，也寫人生，又綜合地（**synthetically**）與分析地（**analytically**）寫下他自己的數學人生。擁有豐富數學經驗的人，既領悟了數學創造或發明的美，又有能力將這種美的感受分享給他的閱聽人。這就是史蒂芬・史特格茲書寫本書的原初動機，他對數學經驗的詩意想像，為我們做了最深情的告白。

最後附記：中譯本有兩處誤植，請讀者注意：頁 **55** 的（腳）注 **4** 稱：**1993** 年懷爾斯證明費馬最後定理，此說不確，事實應該是：**1994** 年，懷爾斯在徒弟泰勒的協助下，成功地補上 **1993** 年證明版的邏輯漏洞，而完成了最後的證明。另一個在頁 **58**：英文書名 ***The How and Why Wonder Book of the Atomic Energy*** 應譯為《原子能的原理與應用的奇妙大書》，漏印了「原子能」三個字。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 **(Intellectual substance of knowledge)**
- **(1)** 認識論面向 ☆☆☆☆☆
- **(2)** 方法論面向：☆☆☆☆☆
- **(3)** 歷史或演化面向：☆☆☆☆
- **(4)** 哲學面向：☆☆
- **(5)** 教育改革面向：不適用
- **(6)** 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆☆

2. 形式或表達 **(Form or representation)**
- **(1)** 創新手法：☆☆☆☆☆
- **(2)** 數學知識的洞察力：☆☆☆☆☆
- **(3)** 歷史事實的洞察力：☆☆☆☆☆
- **(4)** 異文化的啟蒙意義：不適用
- **(5)** 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆
- **(6)** 敘事的趣味性、可及性與一貫性： ☆☆☆☆☆

(7) 中譯本的品質：☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

(1) 青少年層次： ☆☆☆

(2) 一般社會大眾：☆☆☆

(3) 數學教師或數學通識大學生：☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

……所謂的「混沌」(chaos）並不表示極端混亂，而是表示即使系統按照既定規則在運作，你仍然無法預期該系統的長期表現。為什麼不能呢？因為混沌系統極其靈敏。任何一點不被控制的擾動，如同大家常說「一隻蝴蝶的輕拍翅膀」，都可能被迅速地放大，使這個系統的表現與不受擾動的情形大相逕庭。當你嘗試作預期時，誤差就會呈指數成長模式，像滾雪球般迅速增大，使你的預測變成沒有意義。我們沒有任何辦法避開這問題；這和「儀器不夠精準」、「要更小心」或「等待更好的數學方法出現」沒有關係。混沌是真實世界無可避免的一部份。

這也像是當面打了科學家一巴掌。科學家，就和其他人一樣，一直都知道諸如人際關係、戰爭或歷史之類複雜事物可能是無法預測的。但以前一直以為至少我們還可以預測單擺的擺動，現在混沌這些東西也要奪走。(頁 160）