HPM通訊

第十四卷 第十一期 目錄（2011年11月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

從李善蘭研究看中算史學展望：紀念李善蘭 200 週年誕辰

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

今年是李善蘭（**1811-1882**）**200** 週年誕辰，茲以本文紀念這一位中國清季一代疇人，並進一步展望中算史學，或不無參考借鑒之用。根據史家研究，從傳統走到現代的李善蘭之歷史定位，大概可以如下三個面向刻劃之：

- **承先啟後（transition）：在十九世紀中算傳統的脈絡中，他以《方圓闡幽》、《弧矢啟秘》、《對數探源》以及《垛積比類》，完成了「則古昔」的劃時代工作。**

- **引進西學（transmission）：在清季洋務或自強運動的脈絡中，他與傳教士偉烈亞力（Alexander Wylie）與傅蘭雅（John Fryer）等人，中譯了《幾何原本》後九卷、《代數學》、《代微積拾級》、《圓錐曲線論》、《談天》、《重學》以及《植物學》等書，為中國數學的現代化，提供了最基礎的原料。**

- **現代性（modernity）：在十九世紀中國，他不僅見證了數學知識的制度化（institutionalization）與專業化（professionalization），成為清代學術發展史上不可缺少的一頁，同時，他的算學研究進路也具有現代性。**

像上述這一類歷史敘事，吾人可以稱之為數學社會史（**social history of mathematics**）的研究進路（**approach**）。其實，這也就是一般人所謂的融合內史的（**internalistic**）與外史（**externalistic**）的一種進路。因此，如何在社會文化脈絡中，恰當地還原或重建所謂的數學知識活動，就成了數學史學的最終旨趣之所在。這是因為一旦吾人採取了這種進路，那麼，數學知識的學術位階（**epistemological status**），以及其相關的（專業）數學家的社會地位（**social status**）等等，都會自然而然地成為極有意義的歷史議題。譬如，

- **先秦與兩漢時期，古代中國如何培養「說算者」？「名不見經傳」的劉徽如何**

在第三世紀脫穎而出？他的論證特色何在？從而，這些現象是否可徵之於最近大量出土的簡牘算書？

- 在南北朝時代，祖沖之「如何看待」他自己的圓周率近似值 3.1415926？
- 唐代算學史的研究如何深化？
- 在正典的脈絡下，跨學科譬如算學 vs. 醫學如何比較
- 算學在明代衰頽，它的商業化與世俗化是什麼意思？這一股商業化的潮流入清之後又是如何演變？
- 康熙皇帝如何「操弄」科學、知識與權力？
- 十八、九世紀，經學家與算學家之分合互動，如何關連到一個自主的（autonomous）算學家社群之形成？
- 從六經到二十一經的清代學術脈絡中，如何考察算學在傳統經學的知識分化和典範轉移過程中之定位？
- 跨文化（或國界）的比較研究？譬如李善蘭 vs. 南秉吉 vs. 福田理軒？

等等。以上這些是我學習與研究中算史學的一得之愚，願共勉之。

參考文獻

朱一文 **(2010).**〈數：筭與術 – 以九數之方程為例〉，《漢學研究》**18(1): 153-162**。

林力娜 **(2009).**〈從古代中國數學的觀點探討知識論文化〉，祝平一主編，《中國史新論 – 科技與中國社會分冊》，頁 **181-270**。

洪萬生 **(1989).**〈從兩封信看一代疇人李善蘭〉，《第二屆科學史研討會彙刊》，頁 **217-224**。

洪萬生 **(1991).**〈同文館算學教習李善蘭〉，楊翠華、黃一農主編，《近代中國科技史論集》，頁 **215-259**。

洪萬生 **(1991).**〈王韜日記中的李善蘭〉，《科學史通訊》第十期：**9-15**。

洪萬生 **(1993).**〈張文虎的舒藝室世界：一個數學社會史的取向〉，《漢學研究》**11(2): 163-184**。

洪萬生主編 **(1993).**《談天三友》，台北：明文書局。

洪萬生 **(2000).**〈《書目答問》的一個數學社會史考察〉，《漢學研究》**28(4): 73-105**。

洪萬生 **(2002).**〈《張文虎日記》中的李善蘭〉，《中華科技史同好會刊》第六期：**26-36**。

洪萬生 **(2009).**〈閱讀錢寶琮〉，台灣數學博物館〈數學史特區〉。

洪萬生 **(2010).**〈士族門第如何看待數學？〉，《中華科技史學會學刊》第 **15** 期（**2010** 年 **12** 月）：**20-26**。

洪萬生 **(2010).**〈數學與明代社會：**1368-1607**〉，祝平一主編，《中國史新論 – 科技與中國社會分冊》，頁 **353-421**。

洪萬生 **(2011).**〈鄭重推薦中國數學史的鉅著《中國科學技術史：數學卷》〉，《**HPM** 通訊》**14(7/8): 1-3**。

洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻 **(2006).**《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》，台北：台灣商務印書館。

張壽安 **(2010).**〈從六經到二十一經 — 十九世紀傳統經學的知識分化和典範轉移〉，發表於「中國近代知識轉型 – 理念、制度與社群」國際學術研討會，中央研究院近代史研究所，**2010** 年 **12** 月 **16-17** 日。

郭書春 **(2011).**〈芻議戰國秦漢數學簡牘發現之意義〉，《**HPM** 通訊》**14(10): 1-7**。

郭書春主編 **(2010).**《中國科學技術史：數學卷》，北京：科學出版社。

楊自強 **(2007).**《學貫中西 – 李善蘭傳》，杭州：浙江人民出版社。

韓琦 **(2011).**〈科學、知識與權力 – 日影觀測與康熙在曆法改革中的作用〉，《自然科學史研究》**30(1): 1-18**。

Horng, Wann-Sheng (1991). ***Li Shanlan (1811-1882): The Impact of Western Mathematics over China in the Late 19th Century*****. Ph. D dissertation, City University of New York, USA.**

附記：本文筆者是應邀「**2011** 年海峽兩岸科學與工藝遺產研討會專題演講」摘要，**2011/11/10**，高雄市義守大學。

「摺紙中學數學」之紅包花花

李政憲
新北市林口國中

過完年後，不曉得你看到琳琅滿目的紅包袋，可曾想過它們的數學性質及應用？筆者今年蒐集了兩個女兒過年所拿到的紅包袋（如附圖一），想到去年曾經帶過學生操作過相關的課程，並討論其中的數學；將所完成的作品送給兩個女兒被她們稱為「紅包花花」，在此簡單跟大家作分享相關作法與數學性質。

附圖一　紅包袋列舉排列

一、傳統紅包袋長寬比討論

在變化之前，我們先討論紅包袋的長寬比，事實上我們將紅包袋封口摺入後，可以得到一個長寬比約 **2:1** 的長方形（目前的紅包袋花樣種類繁多，在此介紹主要以傳統尺寸的紅包袋為主），至於如何證明它，我們只要以摺紙的方式就可以簡單的作說明：

- 將封口摺入後的紅包袋長邊對摺（建議選取紙質較厚的紅包袋以利後續操作的成型，如附圖二）；

- 再沿左方（或右方）矩形的對角線對摺（如附附圖三）。

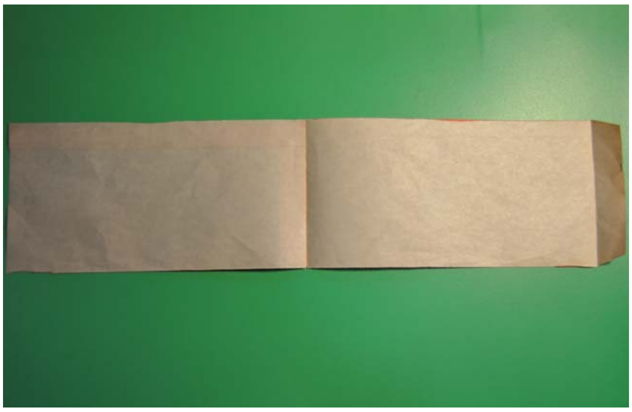
附圖二　封口摺入後的紅包袋長邊對摺

附圖三　沿左方矩形的對角線對摺

如何？簡單的兩個步驟，我們將原來的矩形對摺後成了重疊的兩個三角形，由於兩個三角形均為直角三角形，故對角線恰為其對稱軸，加上矩形的兩雙對邊等長，故這兩個直角三角形均為等腰直角三角形，攤開後即為正方形，也就是原紅包袋的長寬比為２：１。（這裏的說明用到了一些包含的概念，事實上就筆者在課堂上的實際教學，由於多數的學生均有摺過色紙的經驗，所以對這個說明多半不需教師講解，一般靠自己摸索操作即可推得，教師的補充說明在此只是強調其數學性）

二、使用紙張裁切

接下來，我們要作半破壞性的裁切，用刀片沿紅包袋長邊的兩側割下，在短邊底邊不割的前提下將紅包袋攤開，扣除封口後（請勿將封口割除，後續動作封口將有其用處）成了 **4:1** 的矩形（如附圖四）。由於我們接下來需要的是 **3:1** 的矩形，所以透過以上步驟二摺對角線的方式，即可很容易的將一個正方形給割除（如附圖五）。



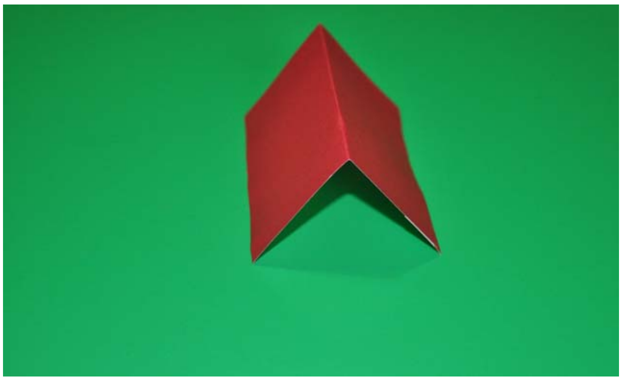
附圖四　長邊兩側割下後攤開

附圖五　長方形割除四分之一正方形

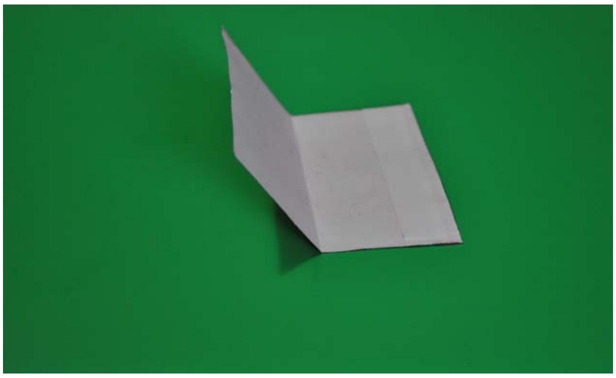
再來，就是山谷摺機械式的操作了，先簡單介紹一下山摺與谷摺：

・山摺：所謂的山摺，所指的是摺完後呈現的形狀像山峰一樣（如附圖六），繪製的直線通常以 ━━ ‧ ‧ ━━ ‧ ‧ ━━ ‧ ‧ ━━表示，我們稱它作山線。

・谷摺：顧名思義，谷摺所表示的則是摺完後所呈現的形狀像山谷一般了（如附圖七），繪製的直線通常以 - - - - - - - - - - - - 表示，我們稱它為谷線。



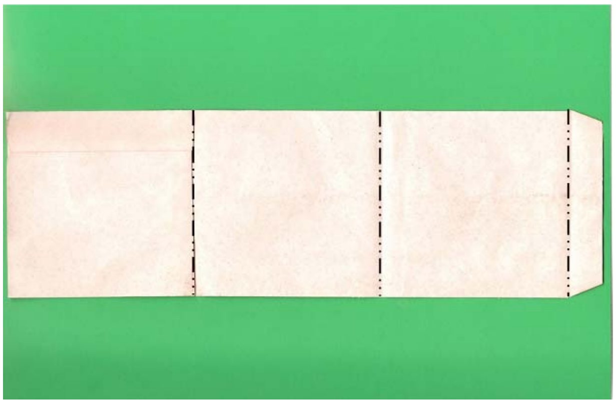
附圖六　「山摺」圖示



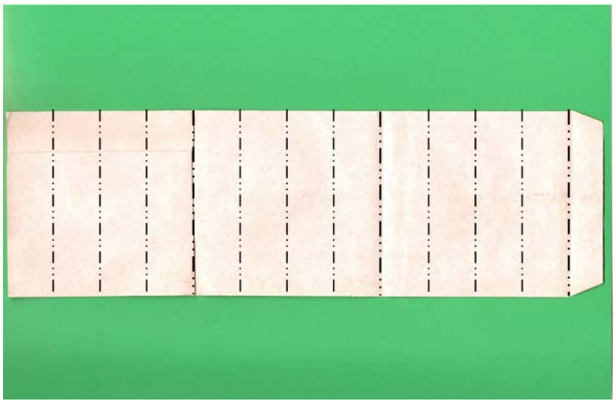
附圖七　「谷摺」圖示

三、山谷線介紹

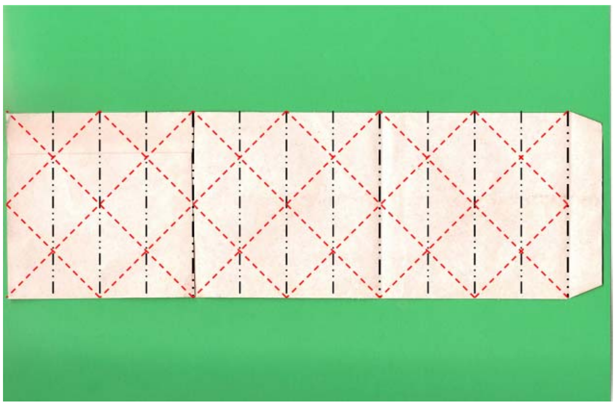
介紹完簡單的摺紙符號，將剛剛完成 **3:1** 的矩形白色面朝上，先摺出如圖中的山線（如附圖八、九），再摺出如圖中的谷線（如附圖十），所需的摺紙動作即大功告成。



附圖八　山線完成－1



附圖九　山線完成－2



附圖十　谷線完成

四、進階延伸思考

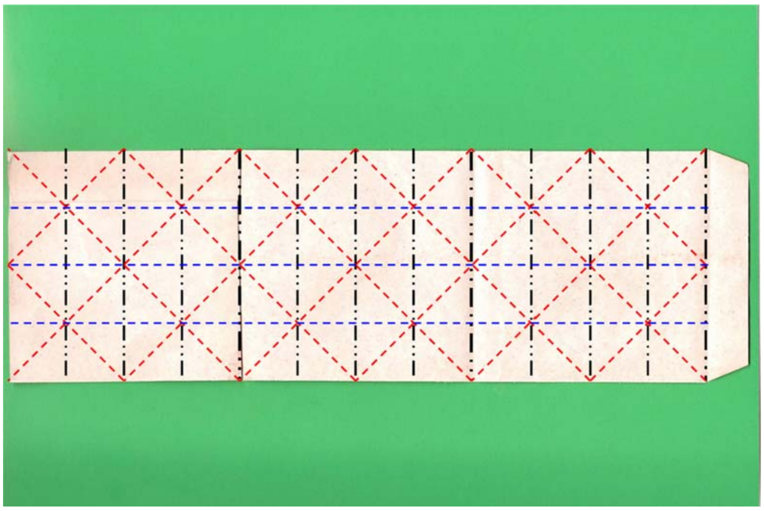
在還沒進行下一個動作之前，親愛的讀者不妨想想以下幾個數學問題：

- 圖中的直線所構成的三角形有幾種大小？是否均為等腰直角三角形？面積比為多少？

- 圖中共有幾個正方形？不同大小的三角形各有幾個？彼此的數量有其關係嗎？是否可列出數學的一般式？

其中第一題的答案透過適當的切割即可得到共有八種面積不同的等腰直角三角形，面積比為 **1:2:4:8:9:16:18:32**。有趣的是，若將這八種面積分成兩組 **1:4:9:16** 以及 **2:8:18:32** 的連比例式，第一組的各項為正整數 **1+2+……+n** 等差級數的和，且第二組的各項恰為第一組的兩倍。

至於第二題的正方形，可透過等差數列 **4+3×4=16**（個）得到；而三角形則均為等腰直角三角形，面積為 **1** 的共 **24** 個，面積為 **2** 的共 **48** 個，面積為 **4** 的共 **24** 個，面積為 **8** 的共 **22** 個，面積為 **9** 的共 **12** 個，面積為 **16** 的共 **12** 個，面積為 **18** 的共 **12** 個，面積為 **32** 的共 **6** 個。值得注意的，是這裏的討論由於中間的三條水平線並未摺出，造成部份面積的三角形無法形成，甚至還有面積不同的三角形個數相同的現象。若將中間三條水平線也摺出後（如附圖十一），個數的關聯與數學性質將更為強烈。然而，由於相關討論並不是本文書寫主要目的，就留待各位讀者再自行討論其共通性與一般性了。



附圖十一　中間三條水平線摺後圖形

五、作品完成動作說明

接下來的摺法將是能否完成最重要的步驟了，根據 http://www.youtube.com/watch?v=0wRDvY-KtRA的作法，原本應該要將紅包沿平行短

邊直線反覆山谷摺。然而，經筆者多次嚐試的結果，由於我們使用的是紅包袋，較原始摺法的牛皮紙信封要薄，發現這樣的摺法最後要完成作品時將不容易內摺，又為了符合最後呈現的效果，除了設計的山谷線與最後翻轉作品時的手順將較為一致，另外是完成的步驟也較為不同：

- 將兩側面積為 **1** 的三角形向內縮，中間的山谷線反覆摺疊成梯形（如附圖十二）；
- 接下來原梯形的上底再推入內縮，順勢反覆摺疊成正方形（如附圖十三）；
- 將附圖十三的頭尾互黏，在此建議膠水上於封口紅色面，與另一端的白色面互黏，所完成的作品將較為美觀；
- 待膠水風乾後即完成所謂的基本型（如附圖十四，較沒時間或耐心的讀者可以雙面膠代替，不過要注意黏貼時的完整性，以免接下來的步驟破壞了原始結構），將基本型按所完成的山谷線順序內翻，即會慢慢形成花朵的形狀（如附圖十五、十六），並可以反覆翻摺，趣味無窮。

由於目前我們操作時的成品是白色面在內，紅色面朝外，所以翻轉時類似白蕊紅花的綻放，若再加上白色面不同方式上色，或是紅內白外的黏貼，則能有更多造型變化的設計（如附圖十七），讓我們更加心曠神怡；或者是透過山谷線的先行繪製完成後列印裁切（如附圖十八），使操作更加方便與準確。


附圖十二　紅包袋內摺反覆摺疊成梯形


附圖十三　梯形上底內摺反覆摺疊成正方形

附圖十四　紅包花花基本型

附圖十五　紅包花花－1

附圖十六　紅包花花－2

附圖十七　紅包花花上色造型變化

六、其他相關應用

另外提到的是這裏的翻轉花用的是長寬比 **3:1** 的矩形，若改以其他不同的長寬比是否會造成不同的效果？筆者曾帶領本校社團同學作相關討論，台灣師大附中的彭良禎老師所製作的「藝數萬花筒」，也有異曲同工之妙（底下參考網址有相關介紹）。然而，受限於篇幅關係，或許留待下次有機會再行討論了。

年節剛過，春天將到，謹以這剛收完可供利用的材料，分享相關製作方式供各位讀者參考，讓這些紅包袋在回收之前，尚有再利用的價值。若針對紅包袋的利用與設計還有興趣的讀者，底下再提供幾個網址供各位參考，其中「摺紙教學－紅包燈籠」因適逢元宵節，建議大家也可以嚐試作作，既環保又兼具視覺效果，在此敬祝各位讀者新的一年諸事順心，心花朵朵開！

參考資料網址

1.「翻轉花設計」簡報放置網站──林中生命藝數殿堂：
http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math
2.「藝數萬花筒」製作，彭良禎老師製，收錄於 **2006** 年教學創意體驗工作坊成果輯：
http://elearning.ice.ntnu.edu.tw/km/Data/Teacher/6086/data/%E6%88%91%E7%9A%84%E5%80%8B%E4%BA%BA%E6%96%87%E4%BB%B6/bb1.pdf
3. 摺紙教學－紅包燈籠：
http://tw.myblog.yahoo.com/jw!LHLQrWaXERBQ_9WW3.lyOx2i/article?mid=2832
4. 專家教創意做紅包袋：
http://tw.nextmedia.com/subapple/article/art_id/32214221/IssueID/20100107
5. 兔年紅包實拍摺紙過程：
http://blog.sina.com.cn/s/blog_3c6e0ac20100mpmc.html
6. 折纸千纸鹤红包：
http://v.youku.com/v_show/id_XMTUwNzI2MTI0.html
7. 教大家折纸鹤红包
http://bbs.ci123.com/post/10806673.html

編注：本文原載《科學教育月刊》第 **337** 期，中華民國 **100** 年 **4** 月。經作者同意轉載。

HPM 高中教室

單元四：解析幾何

蘇惠玉
台北市立西松高中

配合課程單元：**99** 課綱數學 **I**，多項式函數

一、 前言

在高中的數學教材中，幾何與代數皆為主要學習的數學分支之一，尤其在數學解題的過程中，常常需要學生在這兩個分支之間進行轉換，更多的時候則是利用代數來解決幾何問題，解析幾何變成了高中數學的主流。為什麼幾何問題會形成這種利用代數來解決的徑路？而數學發展出這樣的形式結果，其中又要經過什麼樣的創新突破才能達成？這一段歷史在數學發展史上，有其相關關鍵性的影響力。

而函數則是 **99** 課綱數學 **I** 教材的主題重點，**99** 課綱在附錄說明中提到：

> **近年來，由於許多學科的數量化與數學化的需求，使得各國的高中數學教育特別重視函數及其應用。...本次課綱修訂，也加強函數這個主題。**

函數的基本定義在國中已經學習過，然而學生的函數的瞭解，大部分停留在「代值」與「找函數值」的表面意涵。因此本單元希望通過對數學史中解析幾何發展過程的瞭解，讓學生體會與欣賞解析幾何的神奇之處，以期增進對函數的基本概念的理解。

二、 解析幾何發展的契機

西元**1400-1600**之間的歐洲，有許許多多思潮興起，這些思潮不僅影響西方文化，進而對數學活動與數學發展產生決定性的影響。整個文藝復興對思想的改革，刺激了笛卡兒與費馬創立解析幾何。讓我們快速瀏覽一下文藝復興時期的幾個重要事件，首先是**1453**年土耳其攻入君士坦丁堡（拜占庭帝國，或稱東羅馬帝國，於此滅亡），希臘學者帶著許多的希臘著作、手稿移居到義大利，再經由義大利流入歐洲。再者，由於活字印刷術的發明、經由中國學得的製紙技術，使得知識的傳播速度加快。當中世紀的文明、文化隨著東羅馬帝國滅亡走入尾聲之後，人們在尋求一個新的、有效的知識基礎；畢氏學派與柏拉圖的想法再度受到重視，「數量關係是真實之要素」，科學家們漸漸形成一種研究科學的新形式，即以數學的數量關係及數學定律來研究大自然。這樣的形式經由哥白尼、刻卜勒、伽利略、笛卡兒到牛頓的努力而更加堅固，甚至形成一種典範。十七世紀的科學家、數學家們，不只受到古希臘先賢的精神感昭，並從他們的著作中，創出研究的新路徑。

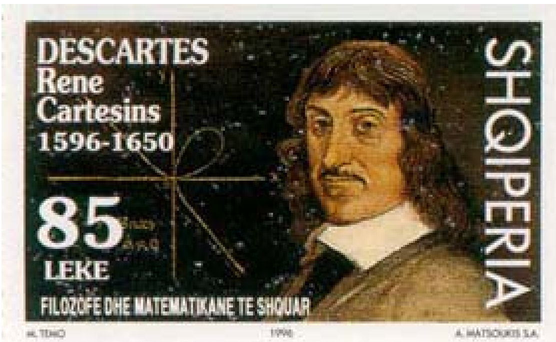
在解析幾何發明之前，數學中的幾何與代數這兩個分支，各自接受數學家與科學家們的不同的關注與養分，各不相干的發展，各自在數學中的地位也不同。幾何從希臘時

期以來，就極受重視，幾何是古典四學科之一，是「數學」這一科的代名詞，即使在牛頓的時代，大學裡的數學教授依然稱為幾何學教授。而代數一開始即被認為是一種「技術」，也就是算術，在希臘時期是奴隸們學習的技術，是不入流的。這種「技藝」的形象一直延續到文藝復興之後，例如卡當諾（**Cardano, 1501-1576**）於 **1545** 年發表《***Ars magna***（**The Great Art**）》，又稱《**On the Rules of Algebra**（處理代數的法則）》，這本書中包含鼎鼎有名的三次方程式解法。從他的書名我們可以看出，此時的「代數」對他而言是一種技藝（**art**），在書中他仍是以幾何的想法來進行論述與推理。

其後韋達（**Viète, 1540-1603**）在《分析引論 ***In Artem Analyticem Isagoge***》**(1591)** 中，雖然將代數的發展推到符號化的新里程碑，但在他的思路中卻也百脫不了幾何的影響。從他的方程式必須要遵守所謂的「齊次律」這一點來看，幾何仍舊是學習數學的主體，在此同時，他仍將代數是為一種「技藝」，所以他將幾篇論文總稱為 ***Introduction to Analytic Art***。在笛卡兒與費瑪發明解析幾何之後，幾何與代數這兩個分支終於結合在一起了，但是在十八世紀微積分的發明之後，代數這一數學分支隱約略勝一籌。我們可以說數學與科學的發展，從十七世紀的笛卡兒開始，進入了完全不同的另一種風貌。

三、笛卡兒與解析幾何

笛卡兒在高中生的學術知識範疇內，通常是以哲學家的身份而存在。笛卡兒生於 **1596** 年的法國北部，小時候至青少年時身體健康一直不佳。八歲時，父親送他至一所由耶穌神父所創辦的有名公學就讀，笛卡兒常質疑學校所學到的知識，「常處於非常多的疑團與錯誤的困擾之中」，因此他汲汲營營於求知與沈思之中。在伴隨著沈思與頓悟的幾年的軍旅生涯與旅行之後，他於 **1629** 年告訴他學生時代的摯友梅色納(**Mersenne**)神父，他正在著手寫一篇宇宙論，而當他 **1633** 年完工正要付印時，傳來伽利略受到教會譴責的消息，他為避免與教會及當時學術界產生衝突，於是取消了出版的計畫。他說：「地動說與我的論文關係異常密切，我真不知該如何將這理論從我的論文中刪去，而仍使其他部分依然成立，不倫為一堆殘缺不全的廢紙。」笛卡兒謹慎地將宇宙論的主要部分整理出來，分別寫成三篇文章：***La dioptrique***（《光線屈折學》，有關折射定律）、***Les météores***（《氣象學》，包含有關彩虹的定量性解釋）以及 ***La géométrie***（《幾何學》），再加上一篇序文，即大家所熟悉的《方法論 ***Discourse on the Method of Rightly Conducting the Reason***》，於 **1637** 年的萊登(**Leyde**)出版，雖然當時沒有刊出作者的姓名，不過大家都知道這是笛卡兒的著作。

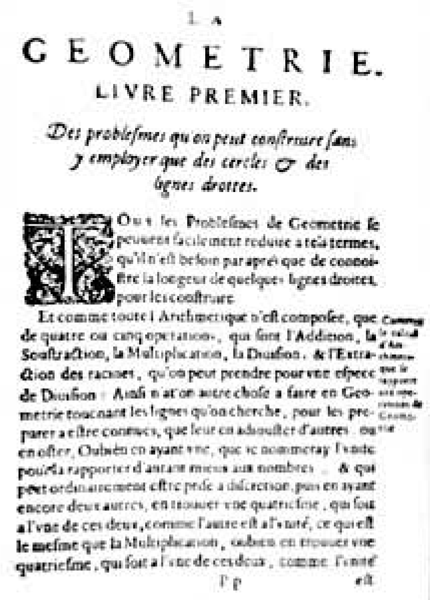


笛卡兒的哲學，來自於數學推理的啟發，也不時以數學上的例子來佐證他的說詞，他在《方法論》的第一部份提到：

我喜歡數學，因為它的推理正確而明顯，但是我還沒看到它真正的被人應用。…它

的基礎如此穩固堅實，竟沒人想到在其上建造起更高的建築。

笛卡兒利用在《方法論》中提出的方法與規則寫成《幾何學》，藉此告訴讀者，他不只是空談而已，他的方法與規則確實是有效的。


LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connues, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Pp est

笛卡兒從幾何學家那裡獲得啟發，卻也發現從古希臘流傳下來的幾何方法，在解決問題上有它的限制與難處。他認為古代幾何過於抽象，並且太過於依賴圖形，讓人只能在想像力十分貧乏的情況下，練習運用理解力。但是，對於在他之前的代數形式，他也提出批評，認為它完全受法則和公式約束，以致於成為一種充滿混亂和晦澀、有意用來阻礙思想的技藝 **(art)**。所以，笛卡兒在《幾何學》中提出的方法，想要達成兩方面的目的：

(1) 通過代數的過程（步驟）將幾何從圖形的限制之中釋放出來；
(2) 經由幾何的解釋給予代數的操作運算意義。

代數與幾何從此合成一體。

《幾何學》共三卷，第一卷標題為「只要求直線與圓的作圖的問題」**(Problems the construction of which requires only straight lines and circles)**，開卷的第一個句子，即表明了他所使用的策略：

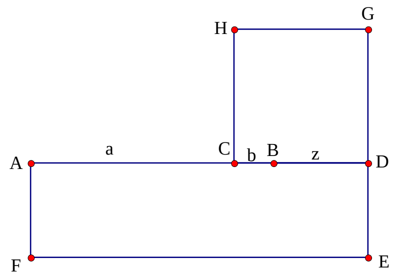
> 幾何上的任何問題，都能容易的化約成一些術語來表示，這些術語為有關已確定線段的長度的知識，而這些知識即足夠完成它的作圖。

用現在的話語來解釋，就是將幾何問題中所要求的「量」，用未知數來表示，並將幾何圖形中的許多已知量，也用數字來表示，然後，將這些數與未知數之間的關係表示出來，即以代數方程式的方法來表示，最後，方程式的解用作圖方法作出，即為所求。

笛卡兒在第一卷的開始，就告訴讀者如何用作圖的方式，表徵代數的基本運算，即加、減、乘、除與開平方根的結果。接下來，他用「線段長度」來代表未知數與係數，這與希臘流傳下來的幾何傳統不同。在古希臘幾何學的傳統包袱中，每一個「量」都帶有幾何意義，一次方是長度，平方即是面積，三次方代表體積，而不同維度的量是不能作加減運算的（即他們的加減沒有幾何意義），這種規則稱為『齊次律』**(the law of homogeneity)**。所以，當卡當諾或是韋達寫出如 $x^3+cx=d$ 的式子時，其中 **c** 一定是平面的面積，**d** 一定是固體的體積。笛卡兒在此提出一個突破性的創新，他用了單位長的次方，來避免齊次律的麻煩，例如在 a^2b^2-b 中，「a^2b^2」可以考慮成 a^2b^2 除以 **1**，而「**b**」考慮成 **b** 乘以 **1** 的平方。接下來，笛卡兒以及後世的我們就能自由地使用這些符號表示，

而沒有任何齊次律的顧慮了。

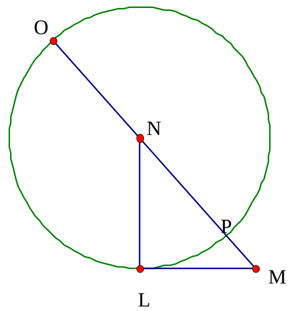
笛卡兒的在本卷中，提到解決幾何問題的一般性方法，這即是我們現今熟悉的解析幾何的方法：將所求的未知數假設出來，當成已知來對待，由題意列方程式，再解方程式，最後「解釋、說明」代數解的幾何作圖。在此，笛卡兒還沒提供實際的例子來「演練」他的方法，當 **van Schooten**（荷蘭數學家，**1615~1660**）出版本書的拉丁文的翻譯時，加上了他自己的評論及解釋的例子，以讓讀者更加瞭解笛卡兒的方法。下面，舉一個 **van Schooten** 所給的例子來說明笛卡兒的方法：



如圖，已知線段 AB 及其上一點 C，延長 AB 至 D，使得 AD 與 DB 所成的長方形面積等於 CD 所成的正方形面積，求 D 點的位置（即 BD＝？）

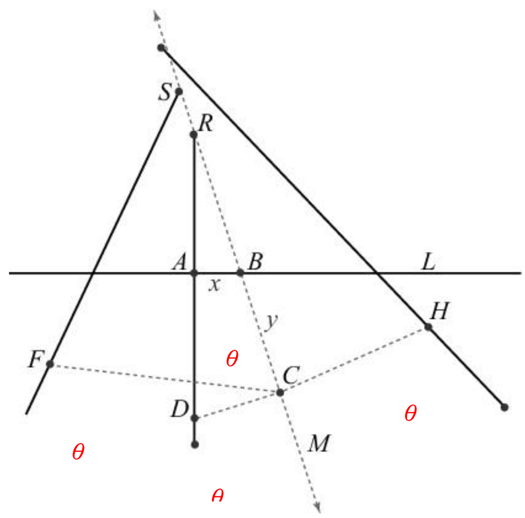
若**AC**的長度為**a**，**BC**的長度為**b**，設**BD=z**，[1]由題意可得到一個關係式：**(a+b+z)‧z=(b+z)²**，所以 $z=\dfrac{b^2}{a-b}$ 。此時，我們可以將解 $z=\dfrac{b^2}{a-b}$ 利用尺規作圖作出。

笛卡兒自己則舉了一個一元二次方程式的例子，來說明如何將解作出。如果最後的關係式為 $z^2=az+b^2$ ，則作一直角三角形 **NLM**，使得 **LM＝b**，**LN**＝$\dfrac{1}{2}a$ 。延長斜邊至 **O**，使得 **NO＝NL**。以 **N** 為圓心，**NO** 為半徑作一圓，則 **OM** 為所求的的 **z** 值。因為 $z=\dfrac{1}{2}a+\sqrt{\dfrac{1}{4}a^2+b^2}$ 。



若方程式為 $y^2=-ay+b$ ，則 **PM＝y**＝$-\dfrac{1}{2}a+\sqrt{\dfrac{1}{4}a^2+b^2}$ 。

接下來，笛卡兒必須解決牽涉到二個，或二個以上的變數，或是解有無限多時的問題。在第一卷的最後，笛卡兒從阿波羅尼斯的四線問題，引入我們現今所熟悉的坐標系統。這個問題為：



給定四條直線，要求 C 點，使得從 C 點以一定角度　分別引到四條直線的這四條線段中，其中兩條線段的乘積與另兩條線段的乘積成一定的比值。

如上圖，**CD**、**CF**、**CB**、**CH** 為所引的四個線段，這個問題在於找出 **C** 點的位置：

---

[1] 在《幾何學》中，笛卡兒將已知數用 a, b, c…表示，未知數從最後字母開始用，所以一個未知數時，通常用 z 來表示。

首先，我假設已經得出結果，因為太多的線會混淆，所以我只簡單地考慮所給定直線中的一條及所畫線段中的一條（例如 AB 與 BC）為主線(the principal lines)，由此我能夠來指涉所有其他的線段。

他發現在圖形中可以將所有的線段長度以 **x, y** 的線性組合來表示，其中 **x** 為 **AB** 在直線 **L** 上的長度，**y** 為所求線段 **BC** 的長度。換句話說，即以直線 **L** 及 **M** 為坐標軸，**B** 為原點， 為兩坐標軸的夾角所成的坐標系，所求 **C** 點的軌跡即為包含二個變量的二次方程式。

笛卡兒的《幾何學》共有三卷。第一卷標題為「只要求直線與圓的作圖的問題」，在這一卷中他用他的新方法說明、示範解決了只用傳統尺規作圖就能作出解的幾何問題。接下來，為了解決由於尺規作圖的限制而不能作出的解，或是有無限多解而形成的曲線軌跡，笛卡兒在第二卷「曲線的性質」中放寬了尺規作圖的限制，而同意某些機械作圖所作出的曲線。在本卷的結論中，他以古典作圖問題「三等分任一角」來說明，三次方程式的解可以用圓與拋物線的交點來解決。最後，在第三卷「立體與超立體 **(supersolid)** 問題的作圖」，先就如何選擇解決問題的曲線作說明，再討論方程式的根。在本卷中，他以 **"true root"**與 **"false root"** 來區分正根與負根，提出著名的「符號法則」**(rule of sign)** 來決定正、負根的個數。同時，他也瞭解根並非都是正、負數，一個幾次的方程式，就有多少個根，只是有些根為他所說的 **"imaginary"**（即虛根）。這樣名詞的用法，大概跟他的問題根源於幾何問題有關。在這一卷最後，為了將他的方法應用到其他領域，例如光學，他在此寫出了他如何作法線的方法，為微積分的發展再貢獻一份心力。

四、費馬與解析幾何

1637 年，當費馬 **(Pierre de Fermat, 1601-1665)** 將他的《平面與立體軌跡引論》**(*Introduction to Plane and Solid Loci*)** 寄給當時負責在數學家之間接受與傳播資料的梅森神父 **(M. Mersemme, 1588-1648)** 時，笛卡兒 **(Renè Descartes, 1596-1650)** 正為他的《方法論》**(*Discourse on the Method*)** 進行校對。在相同的時空之中，解析幾何誕生於兩個不同的人手中。

費馬是一個專業律師及業餘數學家，雖然忙碌於各種行政與司法事務，卻還是將大量心力，投注在他最愛的數學研究上。他在當律師之前，曾在波爾多跟韋達（**Viète, 1540-1603**）的幾個學生學習過，[2]所以，他熟悉韋達的符號化代數的新方法，同時，他也知道韋達重新解釋希臘數學家的「解析」方法。古希臘的「解析」**(analysis)**方法，和一般習慣稱呼「解析幾何」**(analytic geometry)** 中的「解析」意義不同，前者的「解析」，指由**Pappus**評論的古希臘數學家解決幾何問題的兩種方法：解析與綜合 **(synthesis)**。解析與綜合的方法就如

[2]韋達的著作《分析引論 *In Artem Analyticem Isagoge*》(1591)首先引入符號代數。

同幾何作圖中的「作法」與「證明」。解析意指由結論到已知的步驟，假設結論為已知，然後看看從此會得出什麼結果，或是我們所必須要有的條件與步驟。綜合則是從已知利用邏輯推理推到結論的過程。

再者，**Pappus** 還將「解析」分成兩種，『理論型的解析』（尋求真理）與『問題型的解析』（尋求所需結果），但是，他並沒有將「解析」與「綜合」的方法與某一數學分支結合在一起。針對這一點，韋達倒是充分地利用了。他在《解析技術引論》中，運用古希臘的「解析」，解釋他的代數方法，他將『理論型的解析』稱為 ***zetetics* (seekink the truth** 的意思**)**，就是要在某一待定項與若干已知項之間，建立方程式或是比例式。另一方面，他稱『問題型解析』為 ***poristics***（他選擇此名詞與「綜合」法作一連結），運用方程式或比例式檢驗所述定理的真實性。最後，他自己還加上 ***rhetics*** 或是 ***exegetics*** 的解析，在所給的方程式或比例式中，求出此待定的未知項的值。在此，韋達即以代數方程式的方式，重新解釋古希臘的「解析」方法。

費馬在波爾多的這一段時間，熟悉了韋達所謂的「解析的技術」，他重新回到**Pappus**收集的《分析薈萃》**(*Domain of Analysis*)**，[3]並利用**Pappus**的註釋與引理，來重構阿波羅尼斯的《平面軌跡》**(*Plane Loci*)**，他想要將韋達的代數方程式的解析方式，應用在古希臘的幾何上，特別是曲線軌跡的部分，重新了解古希臘的許多有關曲線的理論，尤其是阿波羅尼斯理論。

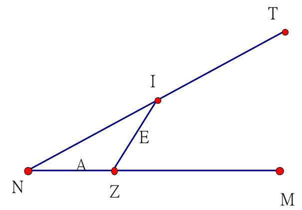
費馬 **1629** 年即寫已寫成《平面與立體軌跡引論》，但一直到於 **1679** 年才出版。在本書中一開始，他定義了什麼叫做曲線軌跡：

> **只要最後的方程式出現兩個未知量，我們就有一條軌跡，這兩個未知量之一的一端描繪出一條直線或曲線。**

接下來，他說「為了有助於建立方程式的概念」，可以這樣作：

> **使得兩個未知量形成一個角度，通常我們假設成直角，得出位置並決定出未知量之一的端點。**

最後的方程式如何出現兩個量呢？我們以本書中的例子來解釋。如下圖，**I**為直線**NT**上的一點，**NM**是一條固定的直線，直線上的點**I**可以未知量**NZ**（＝**A**）與未知量**ZI**（＝**E**）來表示。[4]



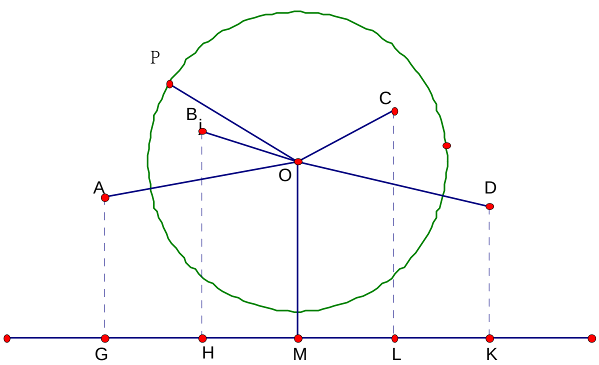
[3] Pappus 的註釋與引理在於幫助讀者了解收集的這些原著，其中包括歐幾里得與阿波羅尼斯的著作。
[4] 費馬承襲韋達的習慣，以母音字母表示未知數，子音字母表示已知數。

費馬在本書中還利用這個的方法，從方程式去解釋：如果未知量的最高次方不超過二次，則軌跡為直線，圓或是圓錐曲線。

由於費馬對阿波羅尼斯作品的熟悉，很自然地，費馬應該從阿波羅尼斯那裡，得到了處理軌跡方法的啟發。例如，費馬針對阿波羅尼斯的定理：

從任意給定的多個點向一點引直線，使得到的各線段形成的正方形面積和等於已知給定的面積。

他以幾個特例介紹出他的「坐標系統」的想法，如圖，當有四個給定點 **A**、**B**、**C**、**D** 時，各與 **P** 作線段 **AP**、**BP**、**CP** 與 **DP**，欲使 $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$ 等於一給定值 **M**。費馬以直線 **GK** 為基準線，使得給定的點都在同一側，並選定 **G** 點為固定點（原點），所以，他就可以根據每一點的水平「坐標」**GH**、**GL**、**GK**，與垂直「坐標」**AG**、**BH**、**CL** 與 **DK** 及給定的已知面積，得出所求點 **P** 軌跡為一圓，並得出其圓心的位置與半徑的大小。



同時，他在《平面與立體軌跡引論》中，以阿波羅尼斯的幾何構造方式構造出圓錐曲線後，也以代數方程式的形式，重新表現了阿波羅尼斯的圓錐曲線。

五、費馬 vs. 笛卡兒

笛卡兒與費馬由於問題意識的不同，雖然同享解析幾何發明的榮耀，但是，它們所選擇的徑路卻大異其趣。笛卡兒想要以一種統一的方法來解決幾何問題，所以，他的出發點是幾何的，並以「運動軌跡」來定義幾何曲線，他只是藉助代數的便利性與一般性，求得代數方程式的解，目標還是在解的幾何作圖。相對於笛卡兒而言，費馬的計畫則在於利用一種新的代數的方法，來研究幾何曲線，所以，他反而是以代數方程式來定義幾何曲線，目標在於方程式所決定的曲線軌跡。

儘管他們兩人在出發點與研究徑路的不同，然而，我們卻都可以看出古希臘著作對他們的影響，尤其是阿波羅尼斯的著作。在阿波羅尼斯的著作，例如《錐線論》中，我們即可以看出阿波羅尼斯以一固定直線（直徑）及一點（頂點）當參照，用兩個方向的未知量來描述曲線上的點所滿足關係式；以笛卡兒與費馬對阿波羅尼斯著作的熟悉來

看，他們會以這樣的形式，來設定他們的坐標系統，似乎是再自然不過了。

不過，卻也因為他們兩人所採取的徑路不同，對後來的數學研究，也就有了不同影響，並得到不同的歷史評價。笛卡兒看到了古希臘的幾何問題中，數學家受限於圖形的解讀，感覺像是針對問題的不同而有不同的解法，於是，他想要利用他所架構的哲學體系中的「推理」方法，來解決此一問題，所以，他以列方程並求出其解的方式，來解決幾何問題。

笛卡兒批判並打破了希臘的傳統，而費馬卻是傳承了希臘的思想，他自己也認為他只是以代數方程的方式，重寫阿波羅尼斯的作品而已。平心而論，雖然笛卡兒在方法上取得較大的成就，但是，費馬對曲線軌跡的研究，卻因為與十七世紀科學界的研究風潮緊密結合，意料之外地對後來微積分，甚至於整個數學的發展，有了更重大的影響。當函數理論逐漸發展之際，費馬的曲線軌跡的影響也逐漸顯現。

Exercise

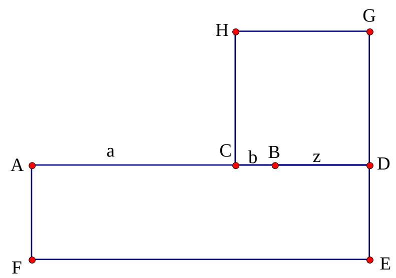
1. 希臘古典四學科為哪四學科？你認為希臘人將此四學科列為受教育時必須接受的學科之理由為何？

2. 給定兩線段 **a, b**，請寫出 **a+b, a-b, ab** 與 $\sqrt{a}$ 的尺規作圖作法。

3. 如圖，已知線段 **AB** 及其上一點 **C**，若 **AC** 的長度為 **a**，**BC** 的長度為 **b**，延長 **AB** 至 **D**，使得 **AD** 與 **DB** 所成的長方形面積等於 **CD** 所成的正方形面積，

(1) 設 **BD**＝**z**，根據條件列出 **z** 的程式？

(2) 解方程式，求出求即 **BD**＝？（以 **a, b** 表示）

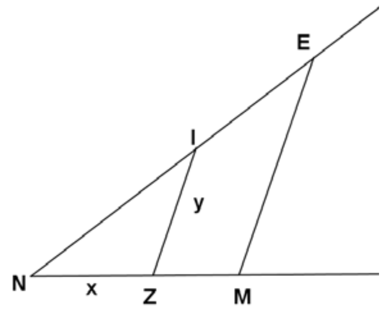


4. 二次方程式 $x^2 = ax + b$ ，其中 **a, b** 為正數，

(1) 公式解 **x=?**

(2) 已知兩線段長為 **a** 與 **b**，是否可用尺規作圖作出一線段長 **x**，滿足 $x^2 = ax + b$ ？如果可以，請寫出作法。

5. 若將費馬平面座標的想法以現代符號解釋，如圖，設 $\overline{NZ}$ ＝ **x**，$\overline{ZI}$ ＝**y**，若已知直線 **NI** 上另一點 **E**，過 **E** 作 **ZI** 的平行線，交 **NZ** 於 **M** 點，且 $\overline{NM}$ ＝**d**，$\overline{ME}$ ＝**b**，試寫出直線 **NI** 的軌跡方程式。



參考文獻

The Philosophical Works of Descartes, translated by E. S. Haldane and G. R. T. Ross (1968), London: Cambridge At The University Press.

The Geometry of René Descartes, translated from the French and Latin by D. E. Smith and M. L. Latham (1954), N. Y.: Dover Publications, Inc.

Boyer, Carl. B. (1991), _A History of Mathematics_. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Katz, Victor. J. (1993), _A History of Mathematics_: _An Introduction_. New York: HarperCollins College Publishers.

Grattan-Guinness, Ivor. (1997), _The Fontana History of the Mathematical Sciences_, London: HarperCollins College Publishers.

Fauvel, John and Jeremy Gray eds, (1987) _The History of Mathematics: A Reader_, London: The Open University.

Smith, David E. (1959), _A Source Book in Mathematics,_ N. Y.: Dover Publications, Inc.

Nuffield Foundation (1994), _The History of Mathematics_. Singapore: Longman Singapore Publishers.

Kline, M. (1983)（林炎全、洪萬生、楊康景松譯）,《數學史—數學思想的發展》,台北：九章出版社。

Kline, M. (1995) （張祖貴譯）,《西方文化中的數學》，台北：九章出版社。

李文林主編（**2000**）,《數學珍寶》，台北：九章出版社。

錢志純編譯**(1972).** 《我思故我在》，台北：志文出版社。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）英家銘（中國醫藥大學）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！