

HPM 通訊

第十四卷 第二、三期合刊 目錄 (2011年3月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（台灣師大數學所研究生）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
 英家銘 謝佳勸（台師大數學系）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ 《摺摺稱奇》主編序
- ▣ 《幾何原本》讀書會研討心得之一
- ▣ 《幾何原本》讀書會研討心得之二
- ▣ 《嶽麓書院藏秦簡《數》研究》博士論文摘要

《摺摺稱奇》主編序

洪萬生

台師大數學系退休教授

本文集絕大部份文章都出自台灣數學博物館所舉辦的「摺紙學數學」工作坊。而這，當然也積極呼應了我們對「數學遊戲」的一貫興趣與關懷。不過，本書之編輯，卻見證了國際數學社群與國內藝術社群的兩件事：在數學研究這一方面，摺紙數學已經逐漸受到數學界的重視，譬如“*Origami and Partial Differential Equations*”（〈摺紙與偏微分方程〉，2010年5月出版）這樣的論文，會出現在美國數學學會刊物 *Notices of the AMS* 上，就非常令人驚奇。另一方面，國內各教育大學最近重新定位美勞教育，強調視覺藝術或造形設計人才的培育，而不再只是著眼於國小相關美勞師資之培育。我們有幸「風雲際會」，此時將有關摺紙的一些實作與論述，集結成為本書，用以彰顯此一數學遊藝的認知趣味與意義，或許也不只是巧合而已。

因此，本書除了彭良禎老師的摺紙實作經驗分享（第一輯）之外，在國中小學的數學課堂上，顯然也值得將摺紙數學推薦成為一個有意義的教學活動，這是本書第二輯「摺紙與幾何教學」的主要構想。事實上，如果大家有機會欣賞英國數學家楊氏伉儷檔（Grace Chisholm Young & W. H. Young）的百年前經典作 *Beginner's Book of Geometry*（1905），一定會同意摺紙學數學原來早就可以登上中小學課堂！在本書中，謝豐瑞教授的〈使幾何教學活潑化〉清楚地指出：她在十七年前，就已經積極呼籲數學教育界重視摺紙與剪紙的價值與意義了。此外，譚克平教授與他的研究生（也是國中現職教師）合作進行的連結摺紙與尺規作圖之教學研究，放在今天的數學教育之現實脈絡中，更足以反映國內教育專家開拓數學教學多元面向的深刻關懷。在本書第二輯中，為了說明我們不只是紙上談兵，我們特別提供國中基測問題的摺紙解答。當然，如果這些試題的討論，讓你覺得有一點濃裝豔抹的「考試味道」，不妨好好地檢視一下土地鑑界問題，相信讀者會有意想不到的收穫才是。

有關摺紙與尺規作圖之連結，我們在本書第三輯中，也提供一些歷史反思性的論

述，譬如摺紙 vs. 尺規作圖等問題，俾便說明這種美勞或遊藝活動，如何可以和「較高階的」數學知識活動連結，其中鬆弛尺規作圖要件的意義，也在摺紙數學的價值發揮中得到抒解。因此，我們希望讀者在閱讀本輯文章時，能適時地交互參考第一輯所提供的摺紙經驗，以便深入理解古希臘數學家，如歐幾里得對於尺規（幾何）作圖要件的堅持之歷史意義。此外，本輯所收葉吉海老師的〈正七邊形的「幾何作圖」〉，也非常值得注意，因為「可能與否」乃是數學知識活動的獨特本質之一，這在其他科技知識活動中，幾乎是完全不具備任何意義的。

對於尺規作圖要件這種看似吹毛求疵的堅持，也引伸了非常有趣的數學史上極為著名的「三大作圖題」，它們的故事不僅促進數學的發展，也豐富現代人的數學經驗與想像。基於此，在本書第四輯中，蘇惠玉老師的〈三大作圖題〉是個舊標題下的新書寫，在結合古希臘哲學與文化背景的論述中，本文洋溢著中學教師的教學關懷，非常值得大力推薦。還有，黃俊瑋的〈精確之必要：從歐幾里得到高斯〉一文，深入說明了數學知識活動中，一個極重要的嚴密 vs. 直觀之處境：在摺紙數學的直觀脈絡中，精確與嚴密還是有其必要。他取徑數學史，說明十九歲高斯所完成的第一個不朽貢獻 – 正十七邊形可以尺規作圖的歷史與認知意義。從這個面向切入，劉柏宏教授的〈「摺紙」：沒有算式的數學〉就顯得語重心長，他介紹摺紙數學研究的最新發展，論述它所面臨的處境，並反思這一智性活動所反應的歷史意義。

總之，我們竭誠地歡迎讀者，尤其是美勞與數學教師，一起與我們分享摺紙的趣味與美學。如果讀者因此觸及相關的數學知識活動，深入其中，享受知識獵奇的樂趣，當然更是善莫大焉。我們希望這一本小小的文集只是一個開端，拋磚引玉，至盼我們有機會分享讀者與其他作者的經驗與心得。最後，竭誠歡迎讀者的指正。

按：本文是《摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學》（三民書局即將出版）的編序。

《幾何原本》讀書會研討心得之一

莊耀仁

台師大數學系在職進修碩士班

《幾何原本》是在西方世界裡，印刷量僅次於聖經的書，不僅是希臘幾何學的集大成的書，也是現在國中幾何教學的重要依據。在這一學期的研讀中，重新從《幾何原本》的英文書中，看到《幾何原本》的原始面目，也看到不少人在命題裡不同的註解與沿革。我想《幾何原本》的重要性不僅在於希臘幾何學上的統整，更是因為在邏輯上的嚴謹推演，建立了幾何學最初的基礎。

在這次所研讀 48 個命題中，各題內涵如下：

命題 1~3 -- 認識繪圖工具

命題 4~8 -- SAS、SSS 及等腰三角形

命題 9~12 -- 作圖：兩等分角和線段、垂直關係

命題 13~17 -- 直線上的鄰角、對頂角、同位角、外角定理

命題 18~21 -- 三角形的不等式：大邊對大角、兩邊之和大於第三邊

命題 22~23 -- 作圖：複製三角形、複製已知角

命題 24~25 -- 不等式（兩個三角形的比較）

命題 26 -- ASA 與 AAS

命題 27~32 -- 行論及三角形內角和

命題 33~36 -- 平行四邊形及其面積

命題 37~41 -- 三角形面積

命題 42~46 -- 作圖：已知面積的三角形和平行四邊形、正方形

命題 47~48 -- 勾股定理及逆定理

其實，從《幾何原本》的命題順序中，亦可以看到之所以這樣安排次序的邏輯。有時覺得命題裡的證明過於繁瑣，也是避免一絲一毫不當的瑕疵讓整體的證明因而遭受損傷。也避免因想當然爾的心態而輕率處理一些命題。另外，在命題 29 討論到平行公設，重新去檢視第五公設的必要性。不僅激起許多數學家的論證，也從而發展出非歐幾何。

我一直認為西方科技之所以可以超越中國，乃是因為希臘把數學列入學校的學科，在希臘學院裡的論證辯駁中，才能將觀念釐清，也逼著將一些不易說明的直觀概念，想辦法用操作性的方式去定義。也因為學校，才能將一些不世出的天才所得到成果，得以藉由學校流傳於世。不致於像中國宋元的數學成就，到了明代卻無以為繼。

最後，我想引用德國哲學家康德（Immanuel Kant）的一句話：

All human Knowledge begins with intuitions, then passes to concepts, and ends with ideas.

幾何學的發展亦復如是。

《幾何原本》讀書會研討心得之二

林建宏

台師大數學系在職進修碩士班

從大學時期就在老師的數學史課程中，聽過《幾何原本》和循環謬誤的名詞，但都沒有機會好好深入欣賞《幾何原本》的邏輯嚴密性，一直到研究所讀書會才真正接觸到《幾何原本》的內容。以國中老師的角度來對比《幾何原本》的編排方式和國中教科書的編排方式，兩者之間有著非常大的差異性，在本文中，我們試著舉例說明。

1. 外角定理

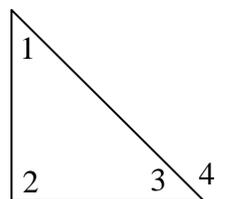
在國中課本中，其證明如下：

$$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \text{ (三角形內角和)}$$

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ \quad \text{(平角)}$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ = \angle 3 + \angle 4 \text{ (遞移律)}$$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = \angle 4 \quad \text{(等量減法)}$$



三角形內角和 180 度、平角角度、遞移律、等量減法，這些定理都是學生所學過的，因此，整個證明過程的邏輯性對學生而言是可以接受的。但若仔細探討其中的定理，會發現三角形的內角和 180 度這個定理似乎沒有得到完整的證明，在國小教科書中，僅是要學生用尺去量或用剪紙的方式重新拼湊成一個平角，但是，這樣的處理方式，僅是讓學生體會內角和 180 度而非完整的證明，在整體邏輯上是沒有解決問題的。

至於在《幾何原本》中，則是一直到命題 32(a)才出現外角定理，命題 32(b)才出現三角形內角和，順序先後不一樣，幾何原本是利用外角定理去證明三角形內角和，而國中課本是利用三角形內角和去證明外角定理，而幾何原本外角定理是利用平行線的性質而得，平行線的定理在命題 27、28 以證明，所以再命題 32 時使用並沒有邏輯上的問題。

2. 大角對大邊

在國中課本中，有關大角對大邊的證明如下：

$$\text{若 } \angle C > \angle B, \text{ 則 } \overline{AB} > \overline{AC}$$

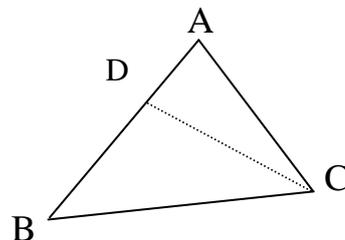
證明：作 $\angle BCD = \angle CBD$ 交 \overline{AB} 於 D 點

$$\because \angle BCD = \angle CBD$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{CD} \text{ (兩底角相等的三角形必為等腰三角形)}$$

又在 $\triangle ADC$ 中 $\overline{AD} + \overline{CD} > \overline{AC}$ (三角形兩邊和大於第三邊)

$$\therefore \overline{AD} + \overline{BD} > \overline{AC} \text{ (}\overline{BD} = \overline{CD}\text{)}$$



$$\Rightarrow \overline{AB} > \overline{AC}$$

整體邏輯性也沒有問題，但是。三角形兩邊和大於第三邊在國中課本中，也是利用觀察和活動的過程中而得到的，並沒有嚴密的證明，在整個邏輯上又有一部分的定理是存疑的。

在《幾何原本》中，大角對大邊的證明出現在命題 19，而三角形的兩邊和大於第三邊則是出現在命題 20。在這裡的證明中並沒有用到三角形兩邊和大於第三邊，而是用到命題 18 大邊對大角來證明。命題 20 的三角形兩邊和大於第三邊，才利用到命題 19 大角對大邊來證明，整體的邏輯性很完整。

在現在國中基測都只考選擇題的狀況下，計算題、作圖題和證明題已經漸漸不受重視。以前面的兩個例子而言，要訓練學生的邏輯能力就應該像《幾何原本》那樣重視邏輯性，才不會犯了洪老師講的循環謬誤，運用未曾證明過的定理來證明當下的定理，這是很多學生會犯的錯誤，甚至有更多的學生並不清楚們到底犯了什麼錯誤。這是現在很多學生在學習數學證明時的狀況，特別是許多定理在補習班都已經背起來了。對學生而言，背起來的東西就是正確的，但是，他們完全忽略了數學裡邏輯的精神，沒有學到數學的整體性，以至於到了高中時，面對龐大的數學知識時，無法了解其中的邏輯性，一味的想繼續背下去。一旦缺乏數學的邏輯性，也無從建立數學時的概念心象，因此，他們自然覺得數學很片面、很零散，而造成非常大的學習障礙。我想這都是忽略幾何證明在數學上的邏輯性所導致的後果。

當然，數學課本編排的順序是有依據學生學習由淺而深來排列的，倘若要按《幾何原本》的編排順序來教導學生，一定會造成更多的學習障礙。只是在教學的現場若不去注重數學的邏輯觀念和順序，將來面對較高深的數學時，一定遭遇許多更大的障礙。我們應該好好反思《幾何原本》帶給我們的邏輯嚴密之啟發，至少身為一個老師在教導數學時可以有後設認知，知道自己必須把數學邏輯正確地教導給每一位學生。

《嶽麓書院藏秦簡《數》研究》博士論文摘要

蕭燦

湖南大學嶽麓書院

本文是對嶽麓書院藏秦簡《數》整理和研究的結果。《數》是新發現的材料，它的形成時間不遲於秦始皇三十五年（公元前212年）。通過整理和研究《數》，發現了大量新材料，有助於我們瞭解中國早期數學和秦代的社會經濟、法律、軍事等方面的情況。

一、本文的主要內容

1. 對整理工作的陳述：包括測量和記錄竹簡形制和簡文書寫特徵；拼綴殘簡；編連、復原的算題和術文。

2. 《數》的全部釋文：釋讀簡文，轉寫出釋文。

3. 註釋：包括文字釋義、計算驗證和算理分析。

4. 研究

(1) 《數》與張家山漢簡《算數書》、《九章算術》的比較

主要從內容、算法、數學語言表述等方面比較。《數》的算題有些是獨有的，有些亦見於張家山漢簡《算數書》或《九章算術》。《數》的算題涉及《九章算術》的「方田」、「粟米」、「衰分」、「少廣」、「商功」、「均輸」、「盈不足」、「勾股」八章的內容，未見到「方程」算題實例。《數》的算題和術文大多沒有題名，《算數書》有69個題名。《數》算題多成組出現，《算數書》算題多獨立出現。

(2) 《數》包含的數學內容

《數》為研究早期中國數學史提供了實例，如：勾股算題，直接說明了《九章算術》裏「勾股」章的內容在先秦數學著作中就有淵源，為我們研究勾股定理在先秦時期被應用的情況提供了新材料。贏不足算題，尤其是拼綴復原出的一例含三個未知數的贏不足算題，運用現代數學方法的不定方程可求得無數組解，此題為研究贏不足術提供了新材料；衰分類算題顯示出中國早期數學在比例算法上的成就；矩形、梯形、圓形面積的計算，圓臺、棱臺、椎體等的體積計算顯示出秦代幾何學的成就；在《數》裏還見到體現「比重」觀念的記載。

(3) 《數》包含的秦代社會經濟、法律、軍事等方面的資料

「輿田」類算題和「租誤券」類算題，提供了秦的田地租稅制度的信息，使我們瞭解到「輿田」與「稅田」的特徵、「臬田」與「禾田」的租率、「誤券」和匿租的問題；「舂粟」類算題和「秬程」類算題，提供了穀物收穫、加工等生產活動的資料，使我們瞭解到「秬程」、「生實」與「乾實」等問題，驗證了「石」的單位制；粟米等穀物的體積重量比率和兌換比率記錄，與穀物等農產品的交換、分配、和倉儲有關；「營軍之術」等算題，提供了秦代軍事的細節資料；諸如此類。

二、本文表述的主要觀點

1. 《數》是一部實用算法式數學文獻抄本，秦漢時期存在多種類型的數學著作和抄本。
2. 《數》的算題雖在《算數書》和《九章算術》裡找到相同或相似內容，但並不說明三者必定關聯，可能某些算題有共同的源流。
3. 《數》保存了多種古算法應用實例，有些是目前所發現的最早實例，能檢驗以前研究中的一些論斷。
4. 《數》整體呈現實用算法式數學的特徵，部份算題和術文體現出秦代數學的抽象化和理論化趨向。
5. 《數》裡提供的有關秦代社會經濟、法律、軍事等方面的資料，基本真實地反映了當時的實際情況，可與其他出土文獻對證。

關鍵詞：秦；簡；數學；數；嶽麓書院

Abstract

A Study of the Mathematical text, *Shu 數 Numbers and Reckoning*, on the Bamboo Strips owned by the Yuelu Academy of Hunan University.

XIAO Can
Hunan University, China

This dissertation is a study of the Mathematical text, *Shu 數 Numbers and Reckoning* (hereafter *SHU*), on the Bamboo Strips owned by the Yuelu Academy of Hunan University. The bamboo strips were newly discovered primary documents. Their dating should be no later than the thirty-fifth year of the First Emperor of Qin dynasty (212 BCE). Through sorting the strips, transliterating the original Chinese characters, editing and interpreting the texts, this dissertation has provided a thorough study of the *SHU*. It reveals for the very first time a great deal new information about the nature of Chinese mathematics in the third century BCE and beyond. It also provides new materials for studying the economy, legal codes, and military affairs in the Qin Dynasty.

The main contents of this dissertation are as follows:

1. **Descriptions of the Bamboo Strips:** This dissertation has detailed descriptions of the physical properties of the bamboo strips such as lengths, positions of rope binding, numbers of columns and of Chinese characters on a strip, and top and bottom empty spaces. It also describes how the broken strips were pieced together (19 cases), and how to connect the strips to make the contents of their texts coherent, to restore the missing characters or insert the corrected ones (80 more or less completed problems with

questions, methods, and answers; 19 cases of having the methods alone; 3 strips containing measurement of weights and measures; and 34 strips recording the exchange rates among different grains).

2. Transliteration of the Original Scripts: It has provided transliterations of the original scripts on 236 strips. (Note: some strips are broken pieces, part of which can be put together as the complete ones. While clearing and sorting out the strips, each one is given a unique number regardless it is complete or broken).

3. Commentaries: The commentaries include explanations of the meanings of certain Chinese characters, verifications of the calculations and answers of the original texts, and analysis of the mathematical principles or formula had been used.

4. Comparison and Analysis

(1) A Comparison of the *SHU* with 算數書 *A Book on Numbers and Computations*, and 九章算術 *General Mathematical Methods for Nine Categories*.

A comparison about the contents, algorithms, and terminologies in the *SHU* with corresponding ones in the *Suan Shu Shu* 算數書 *A Book on Numbers and Computations* (hereafter *SSS*), and *Jiuzhang Suanshu* 九章算術 *General Mathematical Methods for Nine Categories* (hereafter *JZSS*) had been carried out. Some problems in the *SHU* are unique, and some others can be found also in the *SSS* and/or *JZSS*. The types of questions in the *SHU* cover eight categories of the *JZSS* except Fangcheng 方程 (Rectangular Arrays) (Note: Two problems in the *SHU* are similar to the ones in Junshu (Fair Distributions), but the method used is not the same algorithm in the *JZSS*). Unlike the *SSS* which has 69 specific names or titles for the problems, the *SHU* virtually does not have any of them. Similar problems appear often in group in the *SHU*, but problems in the *SSS* are isolated or independent.

(2) The Mathematical Contents of the *SHU*.

The *SHU* provides new sources for studying ancient Chinese mathematics. For instance, one problem on a buried log in the *SHU* indicates that the contents of the Gougou category 勾股 of the *JZSS* have their origins in the mathematical texts of pre-Qin dynasty. The problem gives us new materials to investigate applications of the so-called Pythagorean Theorem in the pre-Qin times.

The problems related to the excess and deficiency algorithm yinbuzu 盈不足, especially the one I pieced together which has 3 unknowns, provide excellent sources for investigating the development of the algorithm. The problems related to the Cuifen category 衰分 suggest the sophisticated algorithms for dealing with proportions. The correct calculations for the areas of a rectangular, trapezoid, and a circular field, as

well as that for the volumes of truncated cone and pyramid indicate the high level of Chinese geometry during the Qin-dynasty. Moreover, one problem in the SHU also suggests that the concept of mass density had been developed.

(3) New Materials on Economy, Legal Codes, and Military Affairs in the Qin Dynasty.

Some problems on yutian 輿田 (one kind of rental farmland) and zhuwuquan 租誤券 (correcting tax mistakes) in the SHU provide new insides for understanding the taxation on the farmland. We now have better knowledge of the difference between yutian 輿田 (one kind of taxable farmland) and shuitian 稅田 (taxable farmland); and that of the different tax rates for xitian 冢田 hemp-grown farmland) and hetian 禾田 (grain-grown farmland). The problems on chongsu 舂粟 (husked millet) and on haocheng 秬程 (norm for wastage) provide information on grain gathering, processing, and other production activities. They also reveal the regulations on fresh and dried goods, and verify the measurement unit of shi/dan 石. The exchange rate between volume and weight of certain grain and that among different grains are recorded. These rates indicate the relationship among exchange of farm products, distribution, and storing goods. The problem on the art of setting a military camp reveals some details of military affairs of Qin dynasty.

The major points presented in this dissertation are:

1. There are several mathematical books had already existed in the Qin dynasty. The *SHU* probably is a copy from one or more of them.
2. While some problems in the *SHU* are almost identical and others are merely similar to those in the *SSS* or the *JZSS*, the three texts are not necessary correlated. More specifically, it is not the case that one is the direct source for another. The three texts, however, may share some common origins.
3. The *SHU* preserves application problems of some ancient Chinese algorithms.
4. The *SHU* as a whole demonstrates characteristics of practical mathematical algorithms. The description styles of some problems suggest that mathematics in the Qin dynasty had been undergoing abstraction and theorization.
5. The *SHU* provides some materials on the economy, legal codes and military affairs of the Qin society. These materials may be records of reality, and are valuable references to be consulted with other unearthed documents of the same period.

Key Words: Qin Dynasty, Bamboo Strips, Mathematics, *SHU*, Yuelu Academy.

推薦《數學是什麼？》

洪萬生

台灣師範大學數學系教授退休

書名：數學是什麼？（上）

作者：瑞赫德·庫蘭特 (Richard Courant)、賀伯斯·羅賓斯 (Herbert Robbins)、伊恩·史都華 (Ian Stewart)

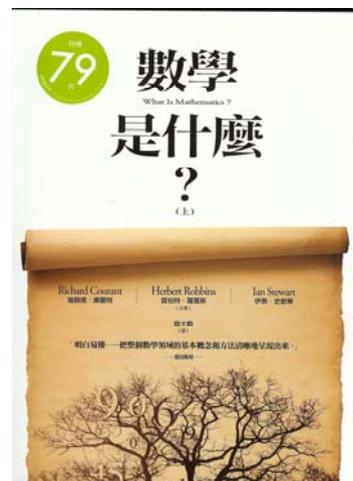
譯者：容士毅

出版社：左岸文化，新北市

出版資料：平裝，400 頁

出版年：2010

ISBN: 978-986-6723-46-9



數學家兼科普作家史都華為本書修訂版寫序時，特別指出：

「合乎邏輯形式的數學 (formal mathematics) 就像拼寫與文法 – 正確地使用局部性的規則。有意義的數學 (meaningful mathematics) 有如新聞工作 (journalism) – 它報導一個有趣的故事。但又不像某些新聞報導，因為它的描述一定要真實。最好的數學就像文學 – 它把故事栩栩如生地帶到你的眼前，從而無論在理智上或情緒上使你捲入其中。」這個堪稱是史都華的現身說法比喻，生動地呼應了庫蘭特所謂的「數學作為一個有機的整體結構」之重要意義。形式數學固然重要，解題更是不遑多讓，然而，唯有類似敘事 (narrative) 的知識活動，才是掌握數學整體結構的正道。

一九六七年，我進入台灣師範大學數學系就讀時，經由翻版書而得以略窺本書內容 – 比起史都華，晚了四年的「初體驗」。不過，由於閱讀本書相較於譬如英文版微積分教科書，顯然需要更成熟的閱讀（或數學）經驗 – 對於數學主修學生而言，本書所訴求的，正如前述，絕對不僅止於解題，它的更高尚要求，乃是數學知識的結構與意義之掌握，因此，「制式學習」如我者一直無從深入。當然，缺乏勝任可靠的導讀，也是另一個主要的原因。

現在，本書有了認真的中譯者與編輯，再加上目前國內關數學普及閱讀活動之推廣，它的影響力絕對可以預期。其實，我在初次接觸本書大約十年後，開始有計畫地自修數學史，從而得知庫蘭特與哥廷根學派克萊因 (Felix Klein) 與希爾伯特 (David Hilbert) 之深厚關係。這是我從數學史面向，體會到庫蘭特的數學認識論的一段經歷。此外，我在台灣師大也曾以庫蘭特的微積分與分析學著作（與 Fritz John 合撰）為教材，在課堂中與學生實際地分享庫蘭特的數學經驗。有了這兩個面向的體驗之後，我還不時地回頭重溫本書論述，充分體會其中所洋溢的傑出數學家之深刻洞察力。

本書範圍遍及〈自然數（含數論）〉、〈數系（有理數、實數與複數、代數數與超越數）〉、〈幾何作圖（或尺規作圖）與數域代數〉、〈射影幾何、公理體系與非歐幾何〉、〈拓樸學〉、〈函數與極限〉、〈極大與極小〉、〈微積分〉，以及史都華所增補的〈數學在近代

的發展)。本書 1941 年第一版目次共有八章及其補充，1995 年，史都華代為增寫 XI 章〈數學在近代的進展〉，作為本書首版之後，二十世紀數學蓬勃發展之補充說明。綜合上述可見，本書作者企圖運用這些概念與方法的初等進路，來說明「數學是什麼？」其中有關數系之介紹，作者納入代數數與超越數之概念，顯然意在呼應數系結構與無限集合之關連。另外，有關幾何作圖主題之引入，則是讓解析幾何在幾何與代數之間所扮演的搭橋角色，賦予了更豐富的想像。同時，其中所底蘊的變換 (transformation) 想法，更是讓下兩章的幾何學與拓樸學之現身，顯得水到渠成。其實，根據克萊因的埃爾蘭根提綱，變換 (群) 作為一種具有現代性 (modernity) 的概念工具 (conceptual tool)，不僅幫助我們刻畫了各色各樣的幾何學 (含拓樸學)，而且，它也從整體結構面向，大一統了絕大多數的幾何學 (geometries)。在本書中，庫蘭特具體實踐了克萊因這種取精用宏的進路，非常值得愛好數學者，尤其是數學教師取法。

事實上，正如庫蘭特的期待，本書也非常適合中學數學教師用以提升教學素養。這是因為作者注意到當時的數學教學，有一些已經退化成為解題的空洞演練，這或許有助於形式能力 (formal ability) 之發展，但卻無從導致真正的理解或更大的智識獨立性 (intellectual independence)。針對這一點，庫蘭特指出：「中學的教師也許發現，在幾何作圖和極大與極小兩章的材料對校中若干社團或優等生來說是有幫助的。」不過，正如上一段所指出，本書第 VI、V 章對於中小學教師素養而言，也至關緊要，這是因為它們補全了結構性面向 (structural aspects) 的數學經驗。其實，如果教師願意考慮將這些材料適當剪裁，引進至少是資優生的課堂，那麼，他們的數學本能，一定可以從平板無趣的空洞解題活動甦醒過來，爬上結構的階梯，從頂端俯瞰數學的宏偉大廈，然後大呼「不虛此行」！

對於科普界的作者、譯者與編者來說，本書絕對是必須永遠置於案頭的參考用書。這是因為庫蘭特寫作本書的初衷，就包括了數學普及的考量。儘管如此，他對於內容空洞、包裝花俏的科普讀物，還是相當嚴肅地吐槽：「知識之攫取不能單靠間接的手段。對數學的理解是不可能憑輕輕鬆鬆的娛樂方式來傳達，這與音樂教育無法透過最出色的新聞報導，以傳授給那些從來沒有深入聆聽音樂的人一樣。」其實，就本書的內容與形式而言，它的主題包羅萬象，呈現手法紮實有趣，同時，作者也在自然而然的情境中，分享他們的認識論與方法論之反思。所有這些，當然都足以降低閱讀門檻，何況各章彼此之間在內容上，有著相當程度上的互不依賴，因此，讀者盡可隨性地閱讀就是了。

最後，對於數學主修的學生來說，我尤其要指出：本書誠如史都華所說的，的確是一部數學經典，因此，非常值得將它列入必須精讀的書單之一。三年前，本系大一新生仍有必修「數學導論」課程之規劃，而我當時忝為系主任，必須協助開授此一課程，遂決定採用本書為教材 (本書修訂版於 1996 年問世)。只有短短一個學期的時間，當然無法涵蓋太多單元，於是，我只好盡量利用時間與學生分享數論、數系、幾何作圖以及射影幾何的一些基本概念和方法。當然，結構性面向知識始終是我再三舉例說明的重點。另一方面，如果數學主修的大四學生，有機會研讀本書，為四年所學進行一個綜合性的回顧或反思，那麼，他們或許可以更清楚地看到數學知識的一個比較全面的圖像。

總之，本書是一本可以讓多方讀者各取所需的一本導論型的數學經典。一般讀者或許在乍看之下，會覺得本書納入過多技術性的細節，而不適合一般人閱讀。這個觀察無可厚非，因為它本來所訴求的讀者並沒有「一般化」到那種程度。然而，要是讀者可以暫時忍受或撇開這些技術性的困難，轉而投入本書內容所關連的一些認識論議題之論述，那麼，史都華針對數學知識本質所謂的「不真實的真實」(unreal reality)，就會變得鮮明地立體起來。當然，如果你有充分的耐心或訓練，足以亦步亦趨地遵循著本書論證，那麼，你還是需要在作者敘事或議論的地方，多作一點時間的駐足：再多想一下，那些究竟如何連結到作者所謂的數學！

何謂數學？有關這個問題的回答，在可預見的將來，想必仍然會激發許多數學家或科普作家的雄心壯志。不過，話說從頭，這部七十歲的經典，卻早已為我們樹立了典範！
附記：本書中譯本（下）已於 2011 年 1 月出版。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。[投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬅（東京大學）

德國：張復凱（Mainz 大學）

基隆市：許文璋（南榮國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿
（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德
（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）
林壽福（興雅國中）傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏
（中正國中）李建勳（景文高中）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵
（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬
（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）
莊耀仁（溪崑國中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園縣：英家銘（中原大學）許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）洪
宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、
鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（文華中學）、洪秀敏（豐原高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜
（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！