HPM通訊

第十四卷 第七、八期合刊 目錄（2011年8月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

鄭重推薦中國數學史的鉅著：《中國科學技術史：數學卷》

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

自從 **1960** 年代李儼、錢寶琮以及其他史家相繼問世的有關中國數學通史的論著問世之來，中算史學界一直都在期待一部更加全面與系統論述的經典著作。現在，由郭書春主編、李兆華副主編的《中國科學技術史：數學卷》（北京：科學出版社，**2010**）顯然可以填補這個位子。

本書編寫者除了郭書春與李兆華之外，還動員了全中國一時之選的中、壯年數學史家來共襄盛舉，其名單如下（依負責撰寫章節之出現順序）：鄒大海、紀志剛、汪曉勤、馮立昇、孔國平、郭世榮、張升、張棋、侯鋼、韓琦、高紅成、邸利會、田淼、傅祚華、王渝生、呂興煥、徐澤林以及郭金海等人。這些學者各有專擅領域，有的投入先秦與兩漢時期，有的不斷深入魏晉南北朝、隋唐與十三世紀，有的戮力開拓明清時期與清末中國數學的現代化，他們都在 **1980** 年代之後，陸續交出可觀的研究成果，當然也最終豐富了本書的內容。

本書共有三十三章，分成六編論述，各編主題依序如下：

第一編　中國數學從興起到形成一門學科 － 原始社會到西周時期的數學
第二編　中國傳統數學框架的確立 － 春秋至東漢中期的數學
第三編　中國數學理論體系的完成 － 東漢至唐中葉的數學
第四編　中國傳統數學的高潮 － 唐中葉至元中葉的數學
第五編　傳統數學主流的轉變與珠算的發展 － 元中葉至明末數學
第六編　西方數學的傳入與中西數學的會通 － 明末至清末的數學

有關此一敘事分期，郭書春等在本書〈前言〉中，說明這是根據錢寶琮的分法加以修飾而得。錢寶琮將中國數學發展分為如下幾個時期：秦統一以前、秦統一以後到唐代中期、唐代中期到明末時期等階段。事實上，他在提出該分期（見他主編的《中國數學史》）時，即特別強調所謂的內史（**internal history**）與外史（**external history**）之不可截然劃分。對於本書之論述，郭書春等也認為：「**數學的發展，既有數學內部的自身因素，也必然受社會經濟、政治、思想和文化背景的制約**」，因此，「**本書除了論述各個階段的數學成就和特點外，還力圖探索各個時期數學的發展與當時社會經濟、政治、思想、文化的關係**」。

有了這一比較細緻的分期，中國數學史的各個面向總算可以得到應有的照顧，不過，這當然連帶使得本書之篇幅大大地擴充 － 總計一百四十萬字，印成 **16** 開本，**858** 頁之多。也正因為如此，本書乃得以呈現一般科技通史難以企及的風貌。首先，它盡可能地總結前輩史家李儼和錢寶琮以降的海內外中算史家的研究成果，其中涉及爭議的歷史問題（**controversial issues**），負責編寫的史家總是諸說並陳，尊重和而不同的「史觀」與敘事，充分表現了二十一世紀史家的恢弘氣度。其次，本書對於古代數學家及相關史實提供了簡要的說明，對於數學文本相關內容（含版本、概念及方法）之介紹，則深入淺出，極易讓初學者找到理解的切入點。此外，有關過去史家無法完全立足於史料，「**自覺或不自覺用我們所熟悉的希臘的或現代的方法取代中國傳統的方法，從而造成誤解**」，本書也提出深刻的反省與修正，這是相當具有膽識的作為，值得我們大力推崇。在此，本書編寫者當然積極呼應了吳文俊所提出的「古證復原」三原則：

一、證明應符合當時本地區數學發展的實際情況，而不能套用現代了或其他地區的數學成果與方法。
二、證明應有史實史料上的依據，不能憑空臆造。
三、證明應自然地導致所求證的結果或公式，而不應為了達到預知結果以致出現不合情理的人雕琢痕跡。

換言之，要想抗拒歷史的「輝格式詮釋」（**Whiggish interpretation**）之誘惑，史家的確是需要極深厚的功力與定力。這一素養對於數學史的研究尤其如此，因為數學知識的獨特自主性（**autonomy**），更是極易引出過度推衍的結論。基於此，本書「**凡是闡述重大成就或重要觀點，必定引徵古文獻的原文藝（作？）為佐證**」，幫助讀者在確認相關史實還原或重建（**reconstruction**）的合理性時，多了一些垂手可得的參照與借鑑。

對於中算史學者來說，本書的現身與先前由郭書春主編的《中國科學技術典籍通匯・數學卷》（**1993**），都是大大利多的學術資源。後者提供了數位雲端時代的先行版，讓絕大多數的中算史家可以「居家」從事主要的研究。至於本書《中國科學技術史：數學卷》呢，則是貢獻一個相當全面的中算歷史藍圖，幫助初學者乃至史家按圖索驥，可以迅速到位，免除了許多不必要的摸索（譬如許多史料乃至（數學典籍）文本的初步解讀等等功夫）。因此，我們預見（也樂見）海內外中算史家都將人手一冊，專注於其中尚待解決的歷史問題，將此一學科之研究，帶向一個新的里程碑。

最後，身為中算史社群的一份子，我也必須在此提出一些比較專業的反思（reflection），就教於本書編寫者及其他方家。從歷史敘事（narrative）的定位來看，本書可以歸類為一部數學社會史（social history of mathematics）的著述，譬如，我在前文就提及本書試圖融合內史與外史的一種進路。不過，平心而論，本書所援引的一般史著述並不多見（本書書末所列研究文獻主要以天文史與數學史為主），因此，如何在社會文化脈絡中，恰當地還原所謂的數學知識活動，本書儘管已提供一些有趣的論述，但還是難免讓我讀來意猶未盡。這是因為一旦吾人採取了這種進路，那麼，數學知識的學術位階（epistemological status），以及專業數學家的社會地位（social status）等等，都會自然而然地成為極有意義的歷史議題，至於研究者的素養，則非要同時具備內史與外史的研究能力不可。這是我對未來中算史家的高度期許，然而，千萬不要忘了，眼前的奠腳石，就是《中國科學技術史：數學卷》這部鉅著了。

中國數學史研究前景依然無限好，《中國科學技術史：數學卷》就是一個最佳例證與憑藉。

Information

關孝和與祖沖之的邂逅

黃俊瑋

國立台灣師範大學數學系博士班研究生

一、前言

在西方數學史上，偉大的阿基米德（**Archimedes, 285?-212 BCE**），從圓內接正方形出發，邊數逐次加倍，最後，先是證明了圓面積與兩股分別為此圓半徑與圓周長的值解三角形面積相等，再利用圓外切與內接正 **96** 邊形，證明了 $3\frac{10}{70} < \pi < 3\frac{11}{70}$。而後，海龍（**Heron**）讓 **22/7** 這個值廣泛地使用在許多實用的書籍中。而大約西元 **150** 年，希臘的天文學家托勒密使用 **377/120** 作為近似值。大約西元 **530** 年的印度，數學家阿耶波多則是使用 **62832/20000** 為近似值。[1]在中算史這一方面，三國時代的趙爽在其《周髀算經》注之中，即指出「**圓徑一而周三，方徑一而匝**」，而劉徽注《九章算術》時，先是證明了圓面積等於半周半徑相乘，再進一步指明圓周與直徑之關係，並非「**周三徑一**」之率。同時，他利用割圓術得到「**周率一百五十七，徑率五十**」。

至於有關祖沖之的相關貢獻，我們則可以徵之於《隋書》記載：

> **圓周率三，圓徑率一，其術疏外。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周數盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率：圓徑七，圓周二十二。**

顯然，西元五世紀的祖沖之，已經利用其密法，[2]求得了圓周率介於 **3.1415926** 與 **3.1415927** 之間。當然其中的「**密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五**」和「**約率：圓徑七，圓周二十二**」，亦是圓周率的兩個重要而簡單的近似分數。

「圓周率」近似值的探求，是各個文明之中的重要而待解的數學問題。有關圓周與直徑的比值，數學家們無法逃避地必需面對以下兩個問題：**1.** 這個比值是一個定值 **(**即常數**)** 嗎？**2.** 如何求得其切確的或近似的值？數學家必須先了解圓周率是一個定值之後，求其值或求值的方法才有意義。就如同祖沖之一樣，他勢必了解圓周與直徑之比值為一定值，才大膽地以「**圓徑一億為一丈**」的方式，以方便增加更多邊形的邊數來割圓求其周長，進而計算圓周率。而祖沖之所發現，這個既簡單卻又準確的近似分數，也受到中國古代曆算家的重視與應用。[3]

[1] 參考洪萬生、英家銘等譯，《溫柔數學史》(2008)，頁 109。
[2] 亦為割圓術。
[3] 例如劉歆制定《三統曆》時，就利用此一方法。

二、「算聖」關孝和與圓周率

從上述故事，不難發現，圓的測量 (求圓周率) 一直是中國或其它國家的數學家們相當感興趣的問題，當然，日本的和算家們也不例外，其中，最重要的和算家，同時又被譽為「算聖」的關孝和，應該也會對如何更精確地計算圓周率的近似值感興趣才是。

在十七世紀前半葉的和算書中，多數以 **3.16** 或 $\sqrt{10}$ 作為圓周率，直到 **1663** 年村樹茂清的《算俎》開始才有變化，他利用割圓術從正四邊形割至正 2^{15} 邊形，得圓周率近似值 **3.1415926**。[4]關孝和則於《規矩要明算法》**(1662~1672** 不詳**)**，利用相同的割圓術來求圓周率，割至正 2^{15} 邊形，得近似值 **3.1415926**，後來，又在《八法略訣》**(1680** 年**)**與《括要算法》**(1712)**之中，[5]得到更精確的近似值。[6]

至於關孝和如何處理求圓周率的問題呢？在他的《括要算法》貞卷，他提出了下列的「**求圓周率術**」：

求圓周率術

假如有圓，滿徑一尺，則問圓周率若干。

答曰：徑一百一十三，周三百五十五。

依環矩術，得徑一之定周，而以零約術，得徑一百一十三，周三百五十五，合問。[7]

由此段可知關孝和求圓周率的方法主要分成兩個步驟，第一，先對直徑為一尺的圓，利用割圓術求得該圓圓周的近似值；[8]第二，透過先前亨卷中的零約術對圓周與直徑的比值進行有理數的逼近。

首先，問題為假設圓的直徑為一尺，再問圓周率為何？當然，從後見之明來看，圓周率既為一常數，即不隨著圓的直徑大小而改變，關孝和顯然亦有此認知。
因此，他以類似祖沖之的求解進路來求近似值。於是，他先在問題中首先假設了「**圓，滿徑一尺**」。接著，關孝便在「答曰」中，先給出了他所挑選出的答案：「**徑一百一十三，周三百五十五**」，此即為圓周與直徑之間的比例關係。然後，關孝和便提出解決此問題的「術」(方法) **--**「**環矩術**」，[9]利用求圓內接正多邊的方式，進而求得徑一尺時的「**定周**」長。[10]從「**定周**」兩字的用詞來看，[11]亦佐證他應當了解當直徑固定之後，圓的周

---

[4] 參考馮立昇 (2009)，《中日數學關係史》，頁 147。

[5]《括要算法》為關孝和死後，由其門內傳人大高由昌於 1712 年刊刻。

[6] 參考劉雅茵 (2011)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，頁 123~126。

[7] 引自徐澤林 (2008)，《和算選粹》，頁 220。

[8] 引自劉雅茵 (2011)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，頁 117。然而，關孝和所得的「定周」並非單純利用割圓術的結果，而是在割至 2^{17} 邊形後，使用了「增約術」。

[9] 環矩術即為割圓術。

[10] 關孝和求得圓徑一尺之定周為三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱，即 其求得圓周的近似值為 3.14159265359。建部賢弘在《綴術算經》中提到關孝和以增約術求定周，「究得十五六位之真數矣」，然事實上，就關孝和在《括要算法》所列之「定周」與 π 相比，僅準確到小數點後十位。

[11] 然而，這裡值得注意的是，關孝和的「定周」，並指的並非等於 π ，而是其使用了「增約術」以求得更

長也隨之固定，即兩者的比值 － 圓周率亦為一定值。所以，題目中假設了「**滿徑一尺**」的用意，或許是為了割圓計算定周長 (即直徑為一尺的圓之圓周長) 上的方便，並為了利用當時的長度單位，進一步了解可以逼近「圓周率」到什麼程度而設。

在緊接的「**第二，求定周**」之中，他便進一步利用了「**增約術**」計算出定周為「**三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱**」。按此數據來看，他所計算出的圓周率，準確到小數點後十位。而後，他便把「**定周**」這個近似值當作π來使用。有了此定周之後，再依「**零約術**」，進而求得了分母從一至一百一十三，共 **113** 個圓周率的近似分數，其中，最後一個「**周率三百五十五，徑率一百一十三**」是最接近「**定周**」的周徑之率，此即為關氏心中所滿意的答案。

接下來，他提出如何求圓面積的方法：

> **求積者，列圓徑冪，以周率三百五十五相乘，得數為實，列徑率一百一十三，四之，得四百五十二為法，實如法為一，得圓滿之積而已。**[12]

上文的意思即為：圓面積等於圓的直徑的平方，乘上 **355**，再除以 **4** 倍的 **113**，亦即圓面積等於圓的直徑的平方乘上圓周率再除以 **4**。這等價於現代中小學教科書中的常用公式，也顯示出有別於中國傳統「**半周乘半徑**」或「**周徑相乘四而一**」的特色。

以上便是關孝和的「**求圓周率術**」之相關問題與求解的方法概要。接下來，關孝和便開始著手說明如何利用「**環矩術**」來求得「**定周**」，進而得到圓周率近似值的方法與過程，以及他在《括要算法》貞卷所列出的 **113** 個圓周率的近似分數。

三、關孝和之圓率解

在《括要算法》之中，關孝和求圓周率的方法如下：

> **圓率解**
> **徑一尺圓內如圖容四角，次容八角，次容十六角，次容五十二角。次第如此，至一十三萬一千零七十二角，各以勾股術求弦，以角數相乘之，各得截周。**
> 各所得勾、股、弦及周數列於後。[13]

準確的近似值。

[12] 引自徐澤林 (2008)，《和算選粹》，頁 220。

[13] 引自徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 220。

四角

勾、五寸

股、五寸

弦、七寸〇七一〇六七八一一八六五四七五二四四微強

周、二尺八二八四二七一二四七四六一九〇〇九七六微強

八角

勾、一寸四六四四六六〇九四〇六七二六二三七八微弱

股、三寸五三五五三三九〇五九三二七三七六二二微強

弦、三寸八二六八三四三二三六五〇八九七七一七強

周、三尺〇六一四六七四五八九二〇七一八一七三八強

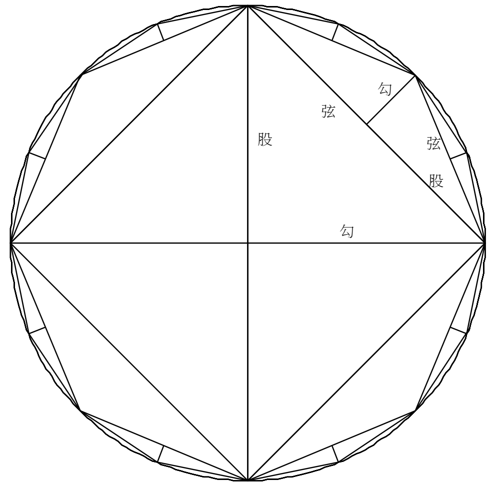


圖 3-1 環矩圖

⋯⋯

十三萬一千〇七十二角

勾、五厘七四四八六五八六二弱

股、二絲三九六八四四九八〇一五三三四強

弦、二絲三九六八四四九八〇八四一八二強

周、三尺一四一五九二五三二八八九九二七七五九弱[14]

從上述引文和圖 **3-1** 所示，我們可以發現關孝和求圓周率的方法「**環矩術**」，即為所謂的割圓術。首先，他給定一直徑為一尺的圓，接著造「四角」，即作圓內接正四邊形，求得「勾」、「股」與「弦」(即此正四邊形的邊長)，再將「弦」乘以四倍，即得周 (即圓內接正四邊形的周長)。接著，再造「八角」即作圓內接正八邊形，再求得相對三角形之「勾」、「股」與「弦」(即此正八邊形的邊長)，再將「弦」乘以八倍，即得周 (即圓內接正八邊形的周長)。如此，繼續割圓，依序造出正 2^n 邊形，直到造出「十三萬一千〇七十二角」，即內接正十三萬一千〇七十二邊形，求得弦長 (即內接正十三萬一千〇七十二邊形之邊長) 為二絲三九六八四四九八〇八四一八二強，再乘上 **131072**，得到內接正十三萬一千〇七十二邊形之周長 **3.14159253288992775 9** 弱 (尺)。

接下來，關孝和利用上述割圓求得之正 **32768** 邊形、正 **65536** 邊形以及正 **131072** 邊形周長這三組數據，並透過下述方式來求其「**定周**」：

第二 求定周

列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差，以六萬五千五百

[14] 引自徐澤林 (2008)，《和算選粹》，頁 220-224。此即為關孝和從正四邊形、正八邊形、正十六邊形共割至正十三萬一千〇七十二邊形，並各求得其對應的勾、股、弦、周之近似值。礙於篇幅，正十六邊形至正十三萬一千〇七十二邊形的相關數據在此省略之。

三十六角與十三萬一千〇七十二角周相乘之，得數為實。列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差，內減六萬五千五百三十六角周與十三萬一千〇七十二角周差，餘為法，實如法而一，得數加入六萬五千五百三十六角周，得三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱，為定周。[15]

這裡為了方便說明，我們假設關孝和計算出的正 **32768** 邊形的周長為 **a**、正 **65536** 邊形的周長為 **b**，以及正 **131072** 邊形的周長為 **c**。依據上述術文可知，實為 $(b-a)(c-b)$，法為 $(b-a)-(c-b)$，於是，其「定周」即為：

$$\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}+b = \mathbf{3.141592635359}$$

此即為關孝和所求得徑為一尺時的圓周長，亦可視作為其所得之圓周率近似值。

這裡，關孝和係利用了增約術得到上式。[16]首先，我們令a= p_{15} **(**正 2^{15} 邊形的周長**)**，**b=** p_{16} **(**正 2^{16} 邊形的周長**)**， **c=** p_{17} **(**正 2^{17} 邊形的周長**)**。關孝和求定周公式的關鍵，在於假設了 $\{(p_n-p_{n-1})\}_{n=4,5,....}$ 為一等比數列，即假設正 2^n 邊形的周長與的正 2^{n-1} 周長之差，形成一等比數列，即 $\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_{n-1}-p_{n-2}}=r$ 為其公比，因此，$\dfrac{c-b}{b-a}=\dfrac{p_{17}-p_{16}}{p_{16}-p_{15}}$ 亦等於公比 $\boldsymbol{r}$。同時，可得下列關係 $p_n-p_{n-1}=r(p_{n-1}-p_{n-2})$，並可得：

$$p_n-p_{n-1}=r^{n-17}(p_{17}-p_{16})=r^{n-17}(c-b) 。$$

又因為 $\pi=\lim_{n\to\infty}p_n$，則

$$\begin{aligned}
\pi &= p_{16}+(p_{17}-p_{16})+(p_{18}-p_{17})+(p_{19}-p_{18})+.....\\
&=b+\sum_{n=17}^{\infty}(p_n-p_{n-1})\\
&=b+\sum_{k=0}^{\infty} r^k(c-b)\\
&=b+\frac{c-b}{1-\frac{c-b}{b-a}}
\end{aligned}$$

(增約術，無窮等比級數求和**)**

[15] 引自徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 224。

[16] 增約術即無窮等比級數求和方法。可參考徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 186。《括要算法》〈亨卷〉之中的文本內容。

$$=b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}\text{。}$$

以上即為關孝和先割圓求得了正 **32768** 邊形、正 **65536** 邊形以及正 **131072** 邊形的周長之後，再利用增約術求定周的原理。此外，關孝和在求弧長、求立圓積時均使用了此一方法。

四、關孝和與祖率的邂逅

關孝和除了求得圓周率的近似值 **3.141592635359** 之外，他並進一步利用「零約術」，求得了 **113** 個關於圓周率的近似分數。其術文如下：

> **第三　求周徑率**
> **周率三、徑率一為初，以周率為實，以徑率為法，實如法為一，得數，少於定周者，周率四，徑率一，多於定周者，周率三、徑率一，各累加之，其數列於後。**[17]

這裡即為關孝和前述所提及的「**零約術**」，其程序性規則如下：起初以周率三，徑率一出發，即以 **3/1** 作為第一個近似分數，接著「**以周率為實，以徑率為法，實如法為一，得數**」，這個得數即「**周數**」。倘若周數比前節所計算出的「定周」來得小時，分母加上 **1**，分子加上 **4**，可得到分母為下一個自然數的近似分數；若周數比「定周」大時，分母加上 **1**，分子加上 **3**，同樣得到分母為下一個自然數的近似分數，如此，可以求得分母為任意自然數的圓周率近似分數。以下我們實際複製操作關孝和的「零約術」：

首先，「**周率三，徑率一，周數三整**」，由於 $\frac{3}{1}<\text{定周}<\frac{4}{1}$，因此，下一個近似分數即為 $\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}$。而**三五整 (7/2)** 即為關孝和所列的第二個周數，亦即得到「**周率七，徑率二**」。接著，由於 $\frac{3}{1}<\text{定周}<\frac{7}{2}$，因此，第三個近似分數即為 $\frac{7+3}{2+1}=\frac{10}{3}$，而**三三三三三三三三三三強**（**10/3)** 即為關孝和所列的第三個周數，亦即得到「**周率一十，徑率三**」。再接著，由於 $\frac{3}{1}<\text{定周}<\frac{10}{3}$，因此，第四個近似分數即為 $\frac{10+3}{3+1}=\frac{13}{4}$，而**三二五整**（**13/4)** 即為關孝和所列的第四個周數，亦即得到「**周率一十三，徑率四**」。以此類推，關孝和依此程序，逐一求得了分母從一至一百一十三，共 **113** 個近似分數，並全數依序列於《括要算法》的《貞卷之中》。

有趣的是，在這一百一十三個周徑之率之中，關孝和也針對其中七個較特別結果列出相關的數學家或名稱，包含：「**古法，周率三，徑率一**」、[18]「**密率，周率二十二，徑**

[17] 引自徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 225。

[18] 《周髀算經》、《九章算術》等古書均用值。

率七」、[19]「**智術，周率二十五，徑率八**」、[20]「**桐陵法，周率六十三，徑率二十**」、[21]「**和古法，周率七十九，徑率二十五**」、[22]「**陸績率，周率一百四十二，徑率四十五**」、[23]「**徽率，周率一百五十七，徑率五十**」。[24]

最後，當關孝和以零約術求得 **355/113** 之後，便停止了這一程序：「**如右求周數，至周三百五十五，徑一百一十三，而比於定周，雖有微不盡，欲令之適合，則周徑率及繁位，故以此而今為定率也。**」可見，關孝和了解 **355/113** 之近似程序，雖然與「定周」仍有所差，不過誤差已相當小，因此，他便以此「周徑之率：周三百五十五，徑一百一十三」作為常用而重要的「定率」。當然，此率即為我們所熟知的「祖率」，即祖沖之開圓所得之「密率」。

然而，關孝和既然點明了前述七個重要或特殊的「周徑之率」，為什麼關孝和獨未提及「祖率」呢？就目前所知，**355/113** 最早出現於寬文 **12** 年 (**1672** 年)池田昌意所刊行的《數學乘除往來》中，而且當時和算家極少注意到《隨書・律曆志》中關於祖沖之密率的記載，因此，關孝和在此沒有為 **355/113** 標上名號。[25]另一方面，從建部賢弘《綴術算經》的「探圓術，第十一」我們可以略知一二：

> **當關氏碎抹圓而求定周，以零約術造徑周之率，爾後曆二十餘年，睹《隋志》，有周數、率數咸邂逅符合者。咨祖子也關子也，雖異邦異時，會真理相同，可謂妙也。**

可見關孝和是用自創的零約術，重新「邂逅」了祖沖之的「**密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五**」與「**約率：圓徑七，圓周二十二**」。這也說明了為何前述關孝和會將其所探得之 **22/7** 稱之為「密率」，而非以祖沖之的「**約率：圓徑七，圓周二十二**」來命名。同時，這也佐證了關孝和運用零約術造「周徑之率」時，並不知曉祖沖之的研究成果。無怪乎，建部賢弘嘆此異時異地的多元發現例子：「妙也！」

此外，這裡值得注意的是，此處依關孝和的零約術所造出的一系列近似分數，並非漸近分數，即誤差並未隨著造「周數」的過程而持續變小，例如「**密率，周率二十二，徑率七**」比下一個「**智術，周率二十五，徑率八**」來得精確。這是因為關孝和在造「周數」的過程中，不斷地將「原周數 $\pi_n = \dfrac{b}{a}$」與「定周」和 $\dfrac{3}{1}$、$\dfrac{4}{1}$ 兩數進行比較。若原周

---

19 關孝和所稱之密率 22/7 與祖沖之求得之「約率」相同。《算法統宗》與《算學啟蒙》等中算書皆稱此為密率。

20 此處「智」指的是中國晉朝的天文學家劉智。《算法統宗》卷三列出此值，和算家關於此值的記載來自此書。

21 中國明代算書《桐陵算法》中採用的圓周率。

22 即毛利重能以後，江戶初期和算書中所採用的圓周率 3.16。

23 三國時期吳國的天文學家陸績。

24 三國時期魏數學家劉徽。

25 馮立昇 (2009)：《中日數學關係史》，頁 144。

數$\frac{b}{a}$<定周<$\frac{4}{1}$，則新周數$\pi_{n+1}=\frac{b+4}{a+1}$；若$\frac{3}{1}$<定周<原周數$\frac{b}{a}$，則新周數$\pi_{n+1}=\frac{b+3}{a+1}$，而非透過比較原周數$\pi_n=\frac{b}{a}$、定周與新周數$\pi_{n+1}=\frac{b+4}{a+1}$的方式，來造出寬度越來越小的區間套，使得新的「周數」的誤差值遞減。也因此，他所造的分數並未總是隨分母增加，而使得誤差值變小。

或許，關孝和造此術除了為找出最近似圓周率的分數，另一用意，也在為了連續地造出分數為所有自然數時的近似分數，再逐一與「定周」比較，檢驗其近似程度。[26]如同其所列出分母從 **1** 至 **113** 共 **113** 個近似分數一般，也因此，便不在意「周數」的誤差是否隨此程序而遞減了。

六、結語

在中日多次文化交流，特別是曆算書的傳入日本的背景之下，《算法統宗》與《算學啟蒙》中有關圓的知識，奠定了早期圓理研究的基礎。因此，我們不難想像關孝和會受到前輩們的影響，而採取與中國數學家們類似的方式，透過割圓，造圓內接正多邊形的方法來探圓周率。

除了前述而祖沖之以「圓徑一億為一丈」割圓密術，求得精確至小數點後 6 位的圓周率近似值之外。中國最早有 **π** 近似值的書籍是《周髀算經》與《九章算經》，所謂的「徑一周三」就是出自《周髀算經》，當時所取的值是 **3**。直到西元一至五年，劉歆替王莽製作嘉量斛標準量器時，發覺有估計得更精密的必要，才算出 **3.154** 之值，後世稱為「歆率」。張衡，後漢南陽人（約西元一三〇年），是中國古代最偉大的天文學家，設計渾天儀和地動儀，算定圓周率為 **92/29** 或 $\sqrt{10}$。[27]

中國的劉徽與希臘阿基米德一樣，皆曾割圓造正九十六邊形，求得精確至小數點後 **2** 位的圓周率近似值 **3.14**，在中國，後人稱之為「徽率」。劉徽後來繼續割圓下去，居然割成一個圓內接正三千零七十二邊形，求得更精密的值 **3.14159**。無獨有偶地，一千年之後，又出現了一位「瘋子」——趙友欽，把邊數增加到一萬六千三百八十四邊，驗證了祖沖之的密率 **355/113** 是一項很傑出的估計。[28]而稍後法國的韋達 **(1540-1603)**，以阿基米德內接外接正多邊形的方式，造正 **39316** 邊形，準確至小數點後 **9** 位。[29]

數學史家馮立昇認為針對割圓術而言，村松茂清與關孝和與趙友欽更為相近。然而，關孝和的圓切圖較趙友欽的割圓圖更為簡化。此外，關孝和與趙友欽《革象新書》計算圓周率都有著同樣的目標，即說明圓周率的有理近似值355/113的來源。[30]儘管《規矩要明算

---

[26] 關孝和所建立的方法，除了是一種程序性的方法之外，並可以求得分母為任意自然數的圓周率近似分數。

[27] 引自洪萬生：〈中國 π 的一頁滄桑〉，《科學月刊》第八卷第五期。

[28] 引自洪萬生：〈中國 π 的一頁滄桑〉，《科學月刊》第八卷第五期。

[29] 參考洪萬生，《孔子與數學》頁 127。

[30] 參考劉雅茵 (2011)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，頁 125。

法》與《算組》都割至正 2^{15} 邊形，《革象新書》則是割至正 2^{14} 邊形，但是，關孝和繼續割圓至正 2^{17} 邊形，並獨具巧思的引入增約術以加速逼近程序，雖然至今仍不知道他將增約術使用於圓理的計算的想法源自於何處。

然而，以此割圓術求圓周率的「效率」並不佳，準確的速度明顯跟不上割圓的邊數。關孝和活躍的十七世紀，也正是微積分誕生的時代，隨著微積分的發明與發展，利用分析學的手法，以有關於 π 的冪級數展開式，尋求快速收斂的級數，來求圓周率近似值，儼然已是無法避免的新趨勢。至此，也該是傳統「割圓術」慢慢淡出歷史舞台的時候了。從關孝和或建部賢弘等後繼和算學家試造新術求圓弧長的方法來看，造各式冪級數展開式的方法，已慢慢成為和算學家們求圓數與求弧數的主流了。

「**圓徑一百一十三，圓周三百五十五**」，這一簡單而又精確的圓周率近似值，卻見證了關孝和與祖沖之這段相隔了一千二百年的邂逅，亦是數學家們心有靈犀，數學知識多元發現的又一寫照。

參考文獻

一、中文資料

比爾．柏林霍夫/佛南度．辜維亞著 (洪萬生、英家銘暨 **HPM** 團隊譯) (**2008**)：《溫柔數學史－從古埃及到超級電腦》，台北：博雅書屋。

徐澤林 (**2008**)：《和算選粹》，北京：科學出版社。

洪萬生 (**1999**)：《孔子與數學》，台北：明文書局。

洪萬生 (**2006**)：《此零非彼 **0**》，台北：台灣商務印書館股份有限公司。

斯坦著 (陳可崗譯) (**2004**)：《阿基米德幹了什麼好事》，台北：天下文化。

馮立昇 (**2009**)：《中日數學關係史》，山東：山東教育出版社。

郭書春 (**1995**)：《古代世界數學泰斗 -- 劉徽》，台北：明文書局。

劉雅茵 (**2011**)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，國立台灣師範大學碩士學位論文，未出版。

二、網路資料

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_08_05_3/index.html

HPM 高中教室

單元一：《幾何原本》與《九章算術》

蘇惠玉
台北市立西松高中

一、 什麼是 HPM

對數學教育研究者而言，如何提升學生的數學學習興趣與成就永遠都是一個主要的研究課題，在國際數學教育的研究中，有一個研究族群主要是以數學史做為媒介，稱為 **HPM**。所謂 **HPM** 是指數學史與數學教學的關聯之國際研究群（**International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics**），它隸屬於國際數學教育委員會（**ICMI, International Commission on Mathematics Education**），專門推動數學史在數學教育上的應用工作。

在課堂上，教師運用數學史至少可以分成三個層次：

1) 說故事，對學生的人格成長會有啟發作用；
例：高斯，畢達哥拉斯，阿基米德

2) 在歷史的脈絡中比較數學家所提供的不同方法，拓寬學生的視野，培養全方位的認知能力與思考彈性；
例：畢氏定理的證明，圓面積公式的證明

3) 從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想。
例：希臘數學與中國數學

HPM 作為國際數學教育委員會（**ICMI**）的一個研究群，它的組成動機完全出自對於數學的教與學之強烈關懷，因此，它的主要目的在於將數學「教好」 或「學好」，利用數學史的幫助來達到此一目的。

HPM 的使用材料，大都來自數學發展中，許許多多的數學家們所遺留下來的痕跡，大部分是書籍文本或研究筆記。在眾多的文本當中，最常被引用與影響最深遠的書籍，當屬西方的《幾何原本》與中算的《九章算術》。

二、 歐基理得的《幾何原本》

我們所學習的數學，之所以成為如今這樣的樣貌，來自於許許多多數學家的累積與貢獻。從西元前六、七世紀的古希臘的泰勒斯開始，他將數學抽象化來思考，並曾以邏輯推理的方式來證明某些數學定理。也是他首先將數學從實用領域提升到抽象思考、進行論證的層次。後來到柏拉圖時，他認為數學知識存在於理想世界，以形式或理念的完

美形象存在，所以數學的學習是一種再發現的過程，必須要能夠掌握心靈的眼睛才能看得見的東西。而透過數學，我們可以掌握或瞭解自然界現象後永恆不變的真理，所以數學可以用來訓練一個人的心智，正如透過體育可以鍛鍊一個人的身體一樣，可以透過幾何的學習來達到訓練邏輯思維的目的。

然而柏拉圖的學生亞里斯多德對數學的看法，與他的老師有一些不同。亞里斯多德認為數學知識存在於現實世界的實體中，數目和幾何也是物體的屬性，數學的研究是從物理實體上面所引出來的抽象觀念。亞里斯多德也為數學的邏輯論證形式奠定基礎，他認為邏輯論證的過程必須要有起點，即為定義或無須定義的名詞；一系列的定義又必須有起點，且定義的東西都不證明其存在。他處理了數學的基本原理，區分出對所有學科都為真的公理，與僅某一學科可接受為真的設準的不同，發明所謂的三段論法，並將為數學的證明提升到一種相當嚴僅的邏輯證明形式。

對於承襲了柏拉圖與亞里斯多德想法的歐幾里得而言，現今所知的生平非常稀少，只知道他西元前 **300** 年左右生活在亞歷山卓，並在那開班授課，而他自己則可能出身柏拉圖學院。歐幾里得深受柏拉圖與亞里斯多德的影響，將古希臘時期的片段知識加以組織，以亞里斯多德的邏輯論證形式寫了《幾何原本》這一本書，將幾何體系架構在公設化的系統上，嚴密化了許多前人較為鬆散的演證過程。在這本書中，他以二十三個定義，五個公理，五個設準為基礎，以邏輯論證的形式來證明全書的四百六十五個命題。

《幾何原本 *Elements*》的體例

《幾何原本》共有十三卷，內容大概如下：卷 **I**、**II**、**III**、**IV** 為平面幾何；卷 **V** 為比例論，卷 **VI** 將卷 **V** 的理論應用的平面圖形；卷 **VII**、**VIII**、**IX** 為數論；卷 **X** 討論無理量；卷 **XI**、**XII**、**XIII** 討論立體幾何。

如同亞里斯多德所指出的，邏輯系統必須建立在幾個我們認為理所當然的假設之上，因此在第一卷中，歐幾里得以定義、設準與公理當出發點。先是 **23** 個定義，如：

1. 點是沒有部分的 **A *point* is that which has no part.**
2. 線只有長度而沒有寬度 **A *line* is breadthless length.**
3. 一線的兩端是點 **The ends of a line are points.**
5. 面只有長度和寬度 **A *surface* is that which has length and breadth only.**
8. 平面角是在一平面內但不在一條直線上的兩條相交線相互的傾斜度。
9. 並且當包含角的兩條線是直線時，這個角叫做直線角。
10. 當一條直線和另一條直線交成的鄰角彼此相等時，這些角的每一個叫做直角，而且稱一條直線垂直於另一條直線。
15. 圓是由一條線包圍著的平面圖形，其內有一點與這條線上的點連接而成的所有線段都相等。

23. 平行直線是在同平面內的直線，向兩個方向任意地延長，在無論那個方向它們都不相交。***Parallel* straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction**

緊接著是 **5** 個設準 **(postulate)**

設準 **Postulates**

令下面為假設成立的 **Let the following be postulated:**

1. 由任意一點到任意一點可作直線

2. 一條直線可以繼續延長

3. 以任一點為心及任意距離可以畫圓

4. 凡直角都相等

5. 同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角和小於二直角，則這二直線經任意延長後在這一側相交。

That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

5 個公理 **(common notion)**，

1. 等於同量的量彼此相等

2. 等量加等量，其和仍相等

3. 等量減等量，其差仍相等

4. 彼此能重合的物體是全等的

5. 整體大於部分

然後，開始證明 **48** 個命題 **(proposition)**（含作圖題與證明題）。歐幾里得如此安排的主要考量，顯然是想要藉以建立幾何知識的嚴密邏輯關聯。由定義、公理出發，再經由命題的邏輯順序的安排，建立起嚴格的邏輯推理架構。

舉例來說，本冊命題 **47** 即是鼎鼎大名的畢氏定理：

命題 47

在直角三角形中，直角所對的邊上的正方形等於夾直角兩邊上正方形的和。

設 **ABC** 是直角三角形，已知角 **BAC** 是直角。則可證 **BC** 邊上的正方形等於 **BA, AC** 上的正方形的和。

事實上，在 **BC** 上作正方形 **BDEC**，且在 **BA**、**AC** 上作正方形 **GB**、**HC**。 **(I. 46)**

過 **A** 作 **AL** 平行於 **BD** 或 **CE**，連接 **AD**、**FC**。 **(I. 31, Post. 1)**

因為角 **BAC**、**BAG** 的每一個都是直角， **(I. Def. 22)**

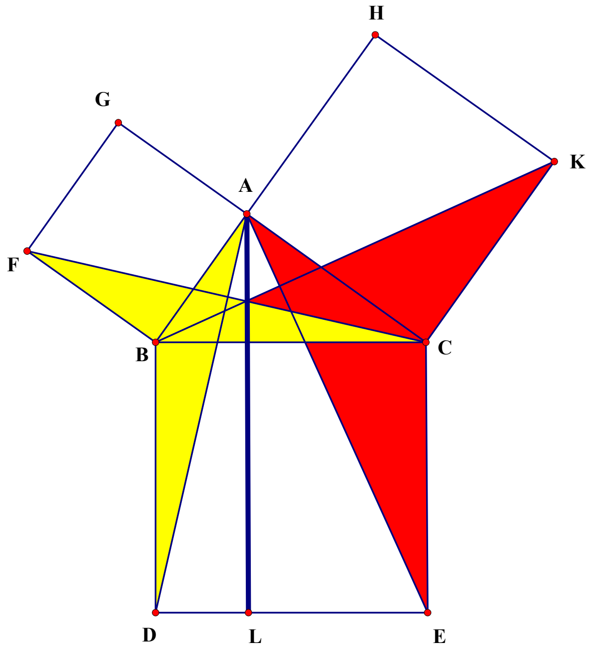
在一條直線 **BA** 上的一個點 **A** 有兩條直線 **AC**、**AG** 不在它的同一側所成的兩鄰角的和

等於二直角，於是 **CA** 與 **AG** 在同一直線上。 **(I. 14)**
同理，**BA** 也與 **AH** 在同一條直線上。

又因為角 **DBC** 等於角 **FBA**，因為每一角都是直角。 **(I. Def. 22, Post. 4)**
給以上兩角各加上角 **ABC**，所以整體角 **DBA** 等於整體角 **FBC**。 （公理 **2**）
又因為 **DB** 等於 **BC**，**FB** 等於 **BA**；兩邊 **AB**、**BD** 分別等於兩邊 **FB**、**BC**；角 **ABD** 等於角 **FBC**；所以底 **AD** 等於底 **FC**，且三角形 **ABD** 全等於三角形 **FBC**。
(I.Def. 22, I. 4)

現在平行四邊形 **BL** 等於三角形 **ABD** 的兩倍，因為它們有同底 **BD** 且在平行線 **BD**，**AL** 之間。 **(I. 41)**

又正方形 **GB** 是三角形 **FBC** 的二倍，因為它們又有同底 **FB** 且在相同的平行線 **FB**，**GC** 之間。 **(I. 41)**
故，平行四邊形 **BL** 也等於正方形 **GB**。
類似地，若連接 **AE**、**BK**，也能證明平行四邊形 **CL** 等於正方形 **HC**。
故整體正方形 **BDEC** 等於兩個正方形 **GB**，**HC** 的和。 （公理 **2**）
而正方形 **BDEC** 是在 **BC** 上作出的，正方形 **GB**，**HC** 是在 **BA**，**AC** 上作出的。
所以，在邊 **BC** 上的正方形等於邊 **BA**，**AC** 上正方形的和。 證完。



其中歐幾里得就運用了（依出現順序）：命題 **46**，命題 **31**，設準 **1**，定義 **22**，命題 **14**，(再一次)定義 **22**，設準 **4**，公理 **2**，(再一次)定義 **22**，命題 **4**，命題 **41**，（再一次）公理 **2**。如果我們將前引命題所依賴之定義、設準、公理以及命題（不計重複次數）彙整，那麼，為了嚴密地證明畢氏定理，我們必須依賴《幾何原本》第一冊中的：

定義 **10**，**11**，**15**，**16**，**20**，**22**，**23**；
設準 **1**，**2**，**3**，**4**，**5**；
公理 **1**，**2**，**3**，**4**，**5**；
命題 **1**，**3**，**4**，**5**，**7**，**8**，**9**，**10**，**11**，**13**，**14**，**15**，**16**，**18**，**19**，**20**，**22**，**23**，**26**，**27**，**29**，**31**，**34**，**46**。

由此可見，歐幾里得利用極為龐大的細部知識，與嚴密的邏輯組織，而建立了幾何學的宏偉大廈。

從歐幾里得的時代開始，《幾何原本》就被世人奉為學習平面幾何的圭臬，其重要性歷久彌新，因為《幾何原本》討論的內容不僅是數學，它還教你如何用邏輯思考，如何建造複雜的理論，基本上，《幾何原本》形塑了今日西方數學的樣貌。

三、 劉徽與《九章算術》

《九章算術》約成書於東漢時期（**25-220 A.D.**），作者不詳，是中國最完整的數學書之一，總結了東漢以前的中國數學知識。《九章算術》內容包括方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程與勾股等九章，共 **246** 個問題。傳本中包含了《九章算術》本文、魏劉徽注、唐李淳風等注釋，其中廣受注目與研究的，除了術文之外，當屬劉徽的注釋內容。劉徽，是魏晉南北朝時代的數學家，於公元 **263** 年寫《九章算術注》，當時年約 **30** 歲左右。

《九章算術》的結構和《幾何原本》有非常大的不同。在《九章算術》的本文中，包含問題、答案與術文。所謂的「術」，在《九章算術》中，即是現今所謂的「公式」，而在「術」之前的問題通常作為此「術」的應用問題。當中較受到矚目的如「約分術」、「開方術」、「開立方術」、「陽馬術」、「盈不足術」、「方程術」、「勾股術」等等，同時在劉徽的注釋中，又以「割圓術」廣受重視。以下為卷一〈方田〉中的「約分術」：

約分術曰：可半者半之，不可半者，副置分母子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。

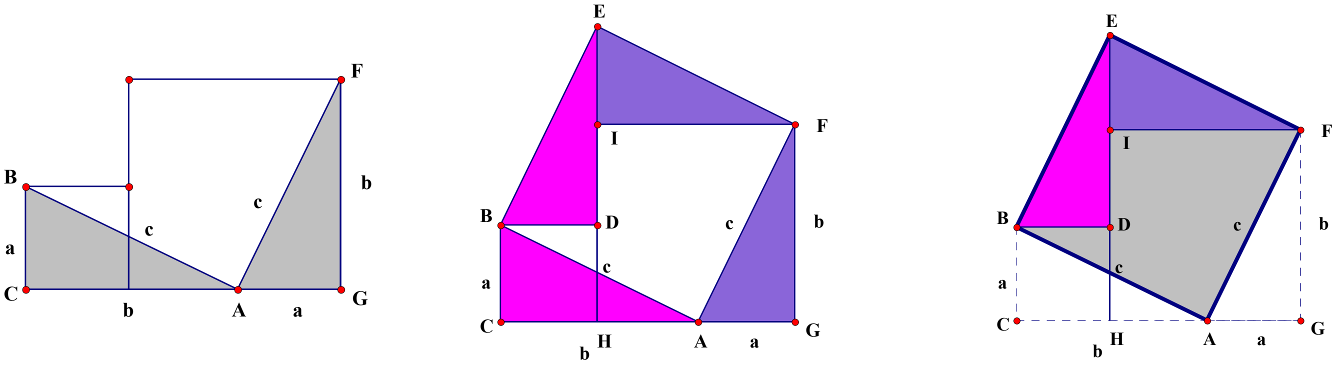
再者，同樣以畢氏定理為例，《九章算術》在卷九〈勾股〉中的勾股術（勾股定理）：

勾股術曰：勾股各自乘，并，而開方除之，即弦。

劉徽的注釋在「證明」勾股定理時，只是簡單的幾句話：

勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也，合成弦方之冪。開方除之，即弦也。

這段文字中所提到的「出入相補」，是《九章算術》在證明幾何問題時最常使用的方法，也是中算的一大特徵。而劉徽到底是如何「出入相補」的，據數學史家的研究，李潢（清乾隆時人，著有《九章算術細草圖說》）的解釋較為合理：



從畢氏定理，或稱勾股定理的證明法來看，即可明顯區分出《幾何原本》與《九章算術》的不同。《幾何原本》用演繹邏輯從幾個公理、公設出發，把書中的命題推演出來，自成一個公理化的體系，對實際應用毫不關心；然而《九章算術》是以術文統帥的應用問題集，再加上劉徽的注釋，讓《九章算術》增添了演繹推理色彩，使《九章算術》的數學成就更上一層。

四、學習單

1. 在《幾何原本》的公設 **1~3** 中，確立了尺規作圖的規則與規範：

1. 由任意一點到任意一點可作直線

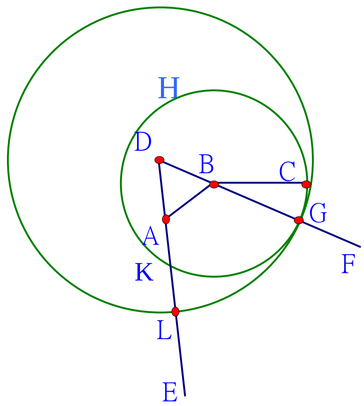
2. 一條直線可以繼續延長

3. 以任一點為心及任意距離可以畫圓

請注意觀察《幾何原本》**I.2** 的命題與作法：

由一已知點作一線段等於已知線段。

作法：



假設 A 點是已知點，BC 是已知線段

由點 A 到點 B 連線段 AB，(post.1)

而且在 AB 上作等邊三角形 DAB，(I. 1)

延長 DA，DB 成直線 AE，BF。(post. 2)

以 B 為圓心，以 BC 為距離畫圓 CGH。(post. 3)

再以 D 為圓心，以 DG 為距離畫圓 GKL。(post. 3)

因為點 B 是圓 CGH 的心，故 BC＝BG。

且點 D 是圓 GKL 的心，故 DL＝DG。

又 DA 等於 DB，所以餘量 AL 等於餘量 BG (公理 3)

但已證明了 BC 等於 BG，所以線段 AL，BC 的每一個都等於 BG。

又因等於同量的量彼此相等，(公理 1)

所以 AL 也等於 BC。

從而由已知點 A 作出了線段 AL 等於已知線段 BC。

回答下列問題：

(1) 依據國中的尺規作圖方法，寫出「**由一已知點 A 作一線段等於已知線段 BC。**」的作法。

(2) 比較《幾何原本》中的作法，你覺得歐基里得作法的用意為何？

2. (1) 證明質數有無限多個

(2) 《幾何原本》第九卷命題 **20** 為：

質數比任意預先給定的個數還要多 Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.。

你覺得這樣的命題敘述方式，會影響你的證明策略嗎？

3. 《九章算術》〈勾股〉卷中有一問：

今有勾五步，股十二步。問勾中容方幾何？

答曰：方三步一十七分步之九

術曰：并勾、股為法，勾股相乘為實。實如法而一，得方一步。

回答下列問題：

(1) 請解釋題意。

(2) 請證明在「術」中的公式。

參考資料

Euclid (1956). ***The Thirteen Books of The Elements*** **(translated with introduction and commentary by Sir T. L. Heath). New York: Dover Publications, INC.**

Kline, M. (1983).《數學史—數學思想的發展》**(**林炎全、洪萬生、楊康景松譯**)**，台北：九章出版社。

郭書春 **(1998).**《九章算術譯注》，瀋陽：遼寧教育出版社。

李繼閔 **(2002).**《九章算經校證》，台北：九章出版社。

郭書春匯校（**2004**），《匯校九章算術》，台北：九章出版社。

洪萬生**(1998)**，〈**HPM** 隨筆〉，《**HPM** 通訊》第一卷第二期。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）李建勳（景文高中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：英家銘（中原大學）許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（文華中學）、洪秀敏（豐原高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！