HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘 謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十四卷 第九期 目錄（2011年9月）



HPM 高中教室

# 單元二：有理數與無理數—可公度量與不可公度量

蘇惠玉
台北市立西松高中

## 一、 前言

在規範國中 100 年版教科書的能力指標中，有這麼一條：

8-n-01 能理解二次方根的意義UU，及熟練二次方根的計算。

這一條指標下面的說明中，有一點提到：

$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$…等這些開根號的數對學生來講是新的數，因此引進學習$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ 的動機，對學生能學好這些新的數是非常重要。從數學史來講，發現$\sqrt{2}$ 不是分數也是一件很重大的事情。因此教材的編寫應有這方面的適當說明。

教材編寫時，在國二的這個時候，要向學生「說明」$\sqrt{2}$ 不是分數是一件幾乎不可能的事，即使在教材中用十分逼近法呈現近似值，也不可能將$\sqrt{2}$ 的不循環無限小數的特質表示得很明顯，因此教材中通常都以及直接告知的形式帶過（例如$\sqrt{2}$ 不能以我們熟知的整數與分數來表示）。

但是在高中時，要將數係擴充到實數係甚至於複數係了，那麼學生對有理數、無理數的概念，不是應該要有一個較為完整且清楚的印象了嗎？但是在 99 課綱中，雖然強調實數係的十進位表示，卻似乎也只是國中十分逼近法的延伸而已：

> **藉由有理數的十進位表示法，導入介紹數線上實數的十進位表示法，即無限小數。此處僅需建立實數可由有限小數逼近的直觀，不需涉及實數的完備性觀念。至於 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明，則置於附錄。**

課綱這樣的規範，當然教科書就這樣的呈現它的內容。但是「無理數」這個名詞與數學概念還是要教，而各家版本在此呈現的內容與方式幾乎大同小異：「**有理數就是整數、有限小數或循環小數**」、「**數線上，不是有理數的數稱為無理數**」[1]，「**$\sqrt{2}$ 的小數位數似乎永無終止，…看來既不像有限小數，也不像循環小數。事實上 $\sqrt{2}$ 不是有理數。**」[2]這樣內容能讓學生瞭解多少無理數的概念？

本單元希望藉由數學史料追本溯源，回到數學發展的最初，讓學生明白無理數的概念從何而起，並能進一步瞭解無理數的概念與本質。

## 二、 數學史料說明

### 1. 可公度量的與不可公度量的

如果我們從有理數的英文 **rational number** 來看，**rational** 一般的理解都是「有道理的」，那麼，應該是什麼道理？從 **ration** 的拉丁文語源來看，它源自於拉丁語的 ***logos***（英文是 ***ratio***，意思為比），拉丁文的原意是「可表達的」，對畢氏學派而言，有理數就是分數，意思是可表達的數。那麼，無理數呢？**irrational number**，表示「不可表達的數」，也就是不能寫成兩個整數之比的數。這個概念及形式，是從畢氏學派的「可公度量的」與「不可公度量的」觀念演化而來的。

畢氏學派 **(Pythagoreans)**是指畢達哥拉斯（大約西元前 **572-497**）和他的門徒們，這個帶有神秘主義與宗教色彩的學派，相信「數目 **(number)** 是所有事物的本質」，這裡的「數目」指的是正整數。畢氏學派相信的，不只是所有物體都有數，或者是這些物體能被排序、被量化，他們更相信數目是所有物理現象的基礎。例如，行星的運行可已以數目之間的比來表示；音階也可以數目比的形式展現，還有直角三角形的邊長比等等。

對畢氏學派而言，數目永遠和事物的計算連在一起，而計算就必須要有不可分割且保持不變的單位元存在。為了計算「長度」，當然就需要有度量單位，畢氏學派假設認

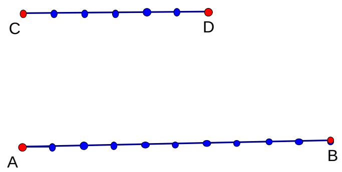
---

[1] 參考龍騰課本《數學 1》，P.4 與 P.5。
[2] 參考南一課本《數學 1》，P13~14.

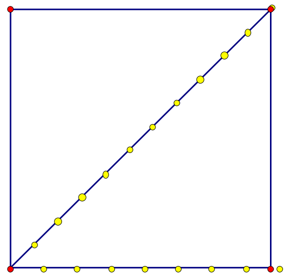
為永遠都可以發現這樣一個度量的基本單位，而一旦這樣的單位被找到了以後，它就成了不可分割的單位元了。兩個線段長如果都可以用同一個單位元量盡，就稱這兩個線段長為「可公度量的」**(commensurable)**。如下圖（一）中的 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$，

$$\overline{AB}=a=me,\quad \overline{CD}=b=ne,\quad m,n\in N$$

其中 **e** 為測量單位長，因而會有 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$，所以 $\overline{AB},\overline{CD}$ 就稱為可公度量的




圖(一)



圖(二)

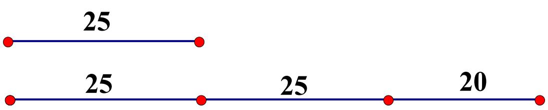
反之，如果不能同時量盡，就稱「不可公度量的」**(incommensurable)**，如上圖（二）中的正方形邊長與對角線，並不存在測量單位長 **e** 使得 $s=me,\ d=ne,\quad m,n\in N$，則 **s, d** 稱為不可公度量的。

**2. 輾轉相除法與可公度量的**

兩個「整數」如果是可公度量的，他們的最大公因數就是可共同量盡的最大單位。從這一點來看輾轉相除法這個方法的起源，可以看出另一番趣味。在《九章算術》方田卷中提到兩個數如何約分，亦即如何找出它們的最大公因數：

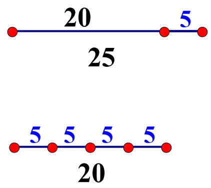
> **約分術曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。**

以 $\frac{50}{140}$ 為例，**50** 與 **140** 都可減半，變成 **25** 與 **70**，**70** 比 **25** 大，所以 **70-25=45**，還是比 **25** 大，再減去 **25**，得到 **20**。



反覆利用大數減去小數，得到 **25-20=5**，**20** 減去 **4** 個 **5**，得到 **0**。

**5** 就是 **70** 和 **25** 的最大公因數，再以 **5** 對 **25** 與 **70** 約分，得到 $\frac{5}{14}$。




因為 **20** 可以被 **5** 量盡，所以 **25**＝**20+5** 也可以，同樣的 **70=25×2+20** 也可以被 **5** 量盡，所以 **5** 可以做為這兩個線段共同量盡的單位長。同樣地，兩個整數如果互質，那麼 **1** 是這兩個線段長可以共同量盡的單位長。

這個方法就是一般所說的輾轉相除法，只是現在用除法來表示—減去一個數若干次而已。在歐幾里得的《幾何原本》中也有同樣的命題！（參考第七卷命題 **1**）。然而「幾何量」呢？如果兩個量（如線段的長度）都是整數，那當然沒問題，如果不是的話，那就可能是不可公度量的了。因此歐幾里得在第十卷第 **2** 個命題就告訴我們，什麼情況下兩個量是不可公度的：

> **如果從兩不等量的大量中連續減去小量，直到餘量小於小量，再從小量中連續減去餘量直到小於餘量，如此一直作下去，當所餘的量永遠不能量盡它前面的量時，則兩量不可公度。**

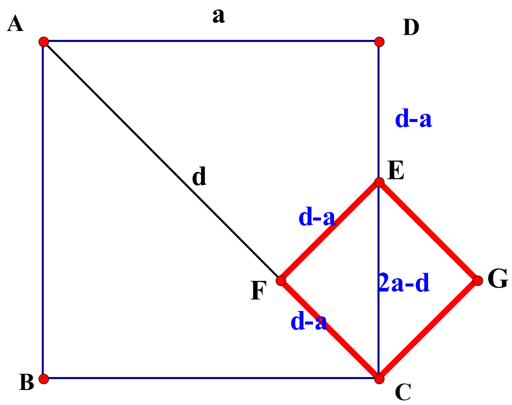
在此，也是利用輾轉相除法的方式，一直以大的「量」減去小的「量」，如果一直作下去，都還有剩下時，這兩個量就是不可公度量的。藉由亞里斯多德的看法：當量盡前一個量的更小的量無法被找到時，這個過程將會『無法確定地』（**indefinitely**）繼續下去。換句話說，這兩個量的比，不能以整數比的形式來表達，也就是說，這兩個量的比是一個無理數！

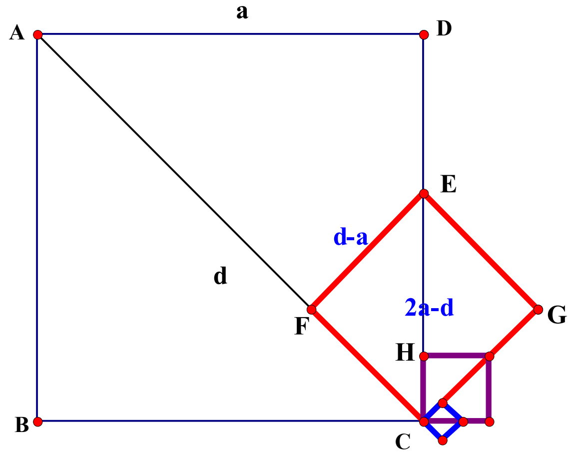
## 三、$\sqrt{2}$ 是無理數的證明

要證明「$\sqrt{2}$ 是無理數」，亦即證明正方形的邊長與對角線是不可公度量的，可以從純粹幾何的角度來證明，畢竟，無理數的「不可公度量性」就是從幾何量的度量產生，它的定義，本身就有很強烈的幾何意涵。

如下圖：**d, a** 分別是正方形 **ABCD** 的對角線長與邊長，利用輾轉相減的方法，從 **d** 中減去 **a**，剩下的為 **CF**＝**d-a**；
再從 **a** 中減去 **d-a**，得到 **CE**＝**a-(d-a)=2a-d**；
接下來，以 **CF** 為一邊，**CE** 為對角線，得到正方形 **CFEG**。

重複剛剛的動作，在 **CFEG** 中以對角線 **CE** 減去邊長 **EF**，得到 **CH**，
再從邊長 **CG** 中減去 **CH**，得到 **CI**；
再以 **CI** 為對角線，**CH** 為邊長畫一正方形，




重複這些步驟，因為正方形的對角線與邊長絕不相等，所以我們可以繼續一直作下去，根據《幾何原本》第十卷命題 **2** 可知，正方形的對角線與邊長是不可公度量的。

如果正方形的邊長是 **1**，那麼對角線的就是長度 $\sqrt{2}$。上述的證明告訴我們：$\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ 不能寫成兩個整數的比（即分數），因此 $\sqrt{2}$ 是無理數。

雖然畢氏學派無可避免的一定會碰到「不可公度量」的數，他們也了解「可公度量」與「不可公度量」之間的不同，但是，為了保持學派理論的完整性，他們選擇保守秘密。如今，我們可以在亞里斯多德的書中看到一點點「不可公度量」的數存在與被證明的蛛絲馬跡，證明形式即是現今證明「$\sqrt{2}$ 是無理數」的證法。而數學史家 **Heath** 認為，這也是畢氏學派證明 $\sqrt{2}$ 的不可公度量性的證明方法。亞里斯多德引用這個證明當例子，來說明他的「歸謬證法」(***reductio ad absurdum***)：如果正方形的邊長和長是可公度量的，那麼，就會得到有一個數同時是奇數也同時是偶數 **(on the assumption that the diagonal of a square is commensurable with its side, it is proved that odd numbers are equal to even)**。其證法如下：

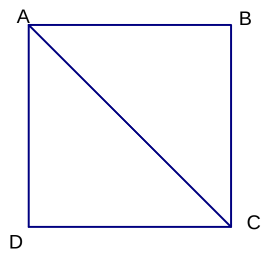
若 **AC** 為正方形 **ABCD** 的對角線，其邊長為 **AB**，

假設 **AC** 與 **AB** 是可公度量的，

設 $\alpha:\beta$ 是他們的最小正整數比，

則 $\alpha>\beta>1$，而

$AC^2:AB^2=\alpha^2:\beta^2$，而因為 $AC^2=2AB^2$，所以 $\alpha^2=2\beta^2$



所以 $\alpha^2$ 為一偶數，故 $\alpha$ 為一偶數；

因為 $\alpha：\beta$ 是最小的正整數比，所以 $\beta$ 必須為一奇數。

設 $\alpha=2\gamma$，所以 $4\gamma^2=2\beta^2$，$\beta^2=2\gamma^2$，

所以 $\beta^2$ 為一偶數，故 $\beta$ 為一偶數，這是不可能的。[3]

這個證法曾經被竄改成歐幾里得所寫，而誤植成《幾何原本》的第十卷第 **117** 個命題，但在李善蘭與偉烈亞力和譯的《幾何原本》後九卷(**1857**)中，仍存在此一命題：「**凡正方形之邊與對角線無等**」。[2] 同時，李善蘭還在此命題的「案」中，將線段的不可公度量，擴充到面積與體積的不可公度量。這是中國數學史上第一次討論不可公度量，即無理數的問題。如此看來，當初的誤植，也許啟發了無數後人研究無理數，或是數學的熱情與眼光，而這又是另一個故事了。

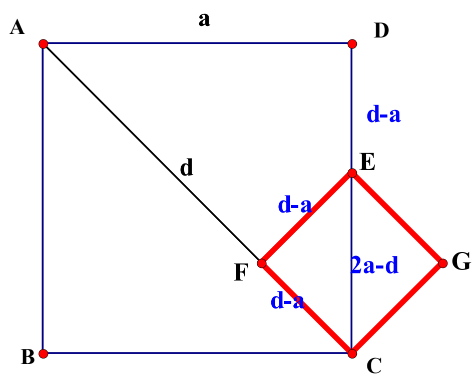
## 三、 學習單設計

**1.** 以《九章算術》中的約分術，求 **126** 與 **30** 的最大公因數。

**2.** 試說明任兩個分數都是可公度量的，請以 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{1}{4}$ 為例說明。

**3.** 在 $\sqrt{2}$ 為無理數的的幾何證法中：

如下圖：**d, a** 分別是正方形 **ABCD** 的對角線長與邊長，利用輾轉相減的方法，從 **d** 中減去 **a**，剩下的為 **CF＝d-a**；
再從 **a** 中減去 **d-a**，得到 **CE＝a-(d-a)=2a-d**；
接下來，以 **CF** 為一邊，**CE** 為對角線，得到正方形 **CFEG**。…
試證明 **CFEG** 為正方形




**4.** 在亞里斯多德證明 $\sqrt{2}$ 無理數的過程中，有一句「$\alpha^2$ 為一偶數，故 $\alpha$ 為一偶數」，試證之。

**5.** 證明 $\sqrt{3}$ 為無理數。

## 參考資料

**Daumas D. and M. Guillemot (1997). 'Must we always be rational? From**

[3] 這個證法與現今教材中提供的 $\sqrt{2}$ 是無理數的證法幾乎一樣，只是形式稍有不同，現今證法一開始為「設 $\sqrt{2}$ 為有理數，即 $\sqrt{2}=\frac{\alpha}{\beta}$, $(\alpha,\ \beta)=1$…」

incommensurable magnitudes to real number', in Evelyn Barbin ed., *History of Mathematics—History of Problems* (translated by C. Weeks). Paris: ellipses.

Euclid (1956). *The Thirteen Books of The Elements* (translated with introduction and commentary by Sir T. L. Heath). New York: Dover Publications, INC.

Heath, Thomas L. (1949). *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Clarendon Press.

Katz, V. J. (1993), *A History of Mathematics*, New York: HarperCollins College Publishers.

李善蘭、偉烈亞力合譯 (1857)，《幾何原本》後九卷，收錄於《中國科學技術典籍通彙》數學卷五，河南教育出版社。

王渝生 (1993)，〈幾何原本提要〉，收錄於《中國科學技術典籍通彙》數學卷五，河南教育出版社。

洪萬生 (1999)，〈閒話 $\sqrt{2}$ 〉，收錄於《孔子與數學—一個人文的懷想》，台北：明文書局。

**1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
**2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
**3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
**4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
**5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：英家銘（中原大學）許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

# 《射鵰英雄傳》與我

劉天祥
台南市立台南二中

到目前為止，我高中以後的學歷是：數學系 **2** 年、國文系 **3** 年、歷史研究所科技史組 **2.5** 年。有時不免懷疑，之所以會有這樣奇怪的組合，是受到《射鵰英雄傳》（下文簡稱《射鵰》）無形的影響。

《射鵰》是我最早接觸的武俠小說，那是小學 **5**（**4**？）年級時，表哥從小說出租店租回紙質粗劣、小開本的盜印本（當時還是禁書）。租金已付，不差多我一個人看，我也拿來看了。曲折富戲劇性的情節當然很吸引我，但穿插其中的各種知識，尤其讓我嘆服。金庸（**1924-**）不是最博學的人，但能像金庸在小說中廣泛融入文、史、哲、藝、醫、數、佛、道、烹飪各方面資料，我還未見過第二人。這當然是精心的安排，所以金庸也只能偶一為之。他在別的小說中也展現了博學，但廣度終究均遠不及《射鵰》。

這本書後來我重讀過數次，高中重讀時我把書中（連同《神鵰俠侶》、《倚天屠龍記》）引用的詩、詞、文章、對聯都抄錄下來。其中包含了賈誼〈鵩鳥賦〉、曹植〈金瓠哀〉、朱敦儒〈水龍吟〉、張孝祥〈六州歌頭〉、元好問〈摸魚兒 ─ 雁丘詞〉、張養浩〈山坡羊 ─ 潼關懷古〉、《金剛經》等。這些引用的詩、詞、文章，有的完整，有的不完整，我都儘量讀到能背誦，也想辦法去找到完整的原文。這些或完整或不完整的詩詞，連同作者，以及那些雖未抄錄但已留下印象的資料，成為我腦中的「問題意識」。「問題意識」就如蛛網般，有相關的資料碰觸到，就會引起我的注意。

國中時家中還訂有《國語日報》，週末會增刊《古今文選》，剛好其中一篇選注朱敦儒的〈水龍吟〉。我仔細看了作者介紹和詞的注釋、翻譯，對黃蓉與陸乘風在太湖上的對話，有更深刻的體會。翻閱《宋詞三百首》時，除了朱敦儒外，特別找了張孝祥的作品閱讀，才知道他也是南宋豪放詞的代表人物。大學時讀《中國文學發展史》，很自然地先找元好問的部分來看。黃蓉在黑龍潭與瑛姑演算數學，金庸在注釋中談到宋代的數學已有高度發展，這是引發我讀《中國古代數學簡史》的遠因；而接觸中國數學史後，也就接著讀世界數學史相關書籍。高中為了讀《金剛經》，找到孟祥森的《佛心流泉》，其中有《金剛經》，順便讀了《六祖壇經》、《心經》、《觀世音菩薩普門品》等，還跟表哥借了《佛教的精神與特色》來看。《射鵰三部曲》提及宋、元、明的歷史，父親購有史學家黎東方的《細說元朝》、《細說明朝》，我都曾仔細讀過，順便也讀了《細說三國》。由於佩服黎氏寫史脈絡清晰、幽默流暢，上大學後我還讀過他的《細說清朝》、《西洋通史》、《歷史唯物論批判（譯）》。離第一次讀《射鵰》超過**30**年，前年我還讀了金毓黻純粹文言文寫成的《宋遼金史》，這還是受到《射鵰》的驅使。《倚天屠龍記》提到《易經》，高中數學教到**2**進位，所以《讀者文摘》一篇提到萊布尼茲 **(1646-1716)** 認為中國人在《易經》中早已發現**2**進位（這是誤解）的文章，讓我牢記至今。黃蓉在《射鵰》中提到「琴瑟琵琶，八大王一般頭面；魑魅魍魎，四小鬼各自肚腸」的「絕對」，和「孔子**72**傑出弟子，幾人成年？幾人未成年？」

這樣的笑話，引發我去讀父親買的《巧聯妙對》和《笑林廣記》。《倚天屠龍記》中小昭唱了波斯詩人峨默寫的詩，高中時買《世界文學名著要覽》，特別查了「中東文學」部分，才知道他的生平和他的名著《魯拜集》。為何金庸小說剛解禁時，《射鵰》被改名《大漠英雄傳》？後來讀了毛澤東霸氣十足的〈沁園春──雪〉下片：「江山如此多嬌，引無數英雄競折腰。惜秦皇漢武，略輸文采；唐宗宋祖，稍遜風騷。一代天驕，成吉思汗，只識彎弓射大雕。俱往矣，數風流人物，還看今朝。」我猜測是為了這首詞的緣故。這個猜測在《臺灣武俠小說發展史》中得到佐證。

《射鵰》裡的資料對我而言，就像是一個雪球，隨著時間的滾動，黏上了各種知識，越滾越大。雖然我的閱讀範圍並非《射鵰》所能籠罩，但它無疑對我的讀書方向產生重大影響。影響從某個角度來看卻是負面的 － 它讓我幻想做個「百科全書式」的人物。最成功的百科全書式人物可以成為梁啟超 **(1873-1929)**、羅素 **(1872-1970)**、萊布尼茲，他們在各方面俱有成就。但我的能力和他們有天壤之別，雖嚮往之，力不能至！大學的莊萬壽老師和以前的同事徐傳儒老師都曾勸我要選一個主要方向，下功夫去讀，不要只是隨意涉獵，可惜我一直沒能做到！

**99** 課綱剛在醞釀時，我曾幻想過可以開設哪些選修課，其中之一是〈金庸小說選讀〉。我幻想經由我的引導，學生可以複製我在高中的經驗 － 主動延伸閱讀，從而真正對他們主動學習所得的知識產生興趣。一旦他們曾有這樣的經驗，說不定今生就能養成主動學習的習慣。隨著學校課程發展委員會的結論陸續浮現，我慢慢認識到幻想終歸是幻想，這樣的課沒有機會開設。即使開設，可能沒人選；即使有人選，學生有興趣的極可能只是情節，不是我期待他們讀的〈水龍吟〉、中國數學史；最重要的是，我真的有能力去駕馭、引導這麼龐雜的內容嗎？（但願你不要成為像我這樣的失敗主義者！）

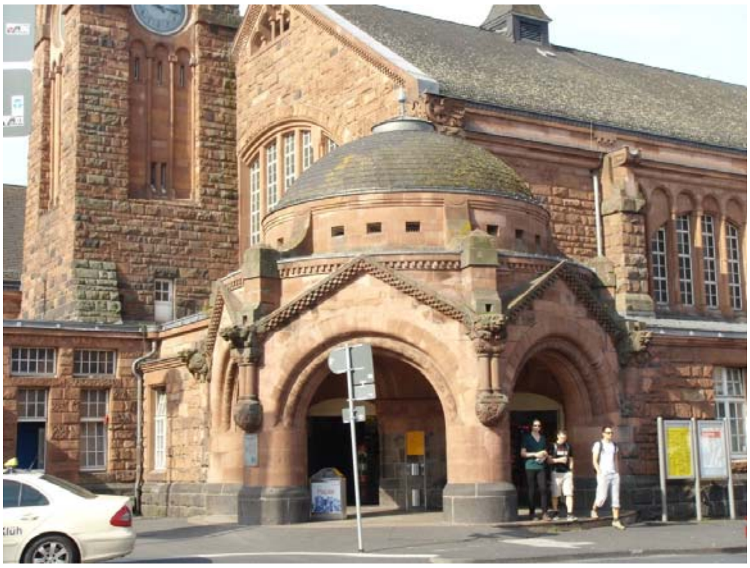
年近半百，人生路已過半，回首來時路，平心而論，我還是慶幸能在年輕時遇到《射鵰》這樣給我多方面影響的書。雖然我成不了百科全書式的人物，但如果從未受到它的影響，我這輩子也可能不會有如此豐富多彩的知性生活。

祝你也能找到這樣的一本書，而且給你正面的影響。

# 德國吉森數學博物館照片集錦

廖惠儀
高雄市九年一貫數學領域教師輔導團

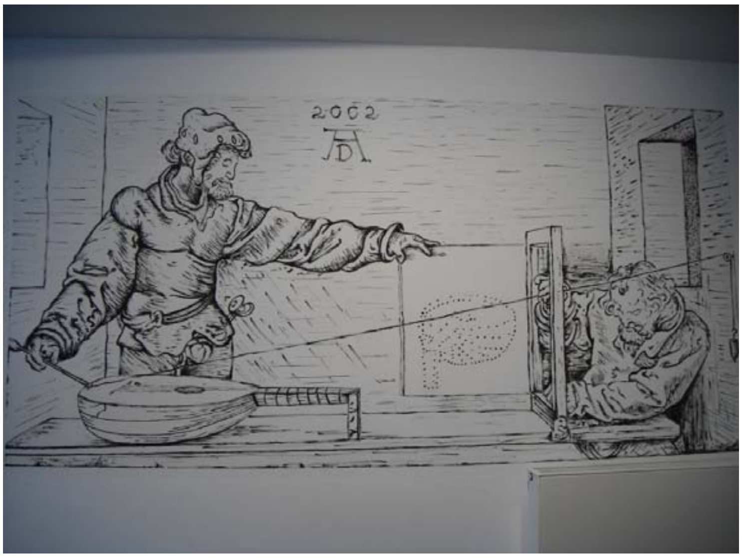
《如何穿過一張明信片》是作者從吉森數學博物館的「數學實驗」單元中，挑選編寫而成的一本書。作者之一的波伊特許伯赫（**Albrecht Beutespacher**），是德國吉森 **(Giessen)** 大學數學系教授，又曾擔任此一博物館館長，因此，本書遂有了不同於一般趣味數學問題集的風貌，非常值得推薦。經由洪萬生老師對於本書的推薦（詳見數學博物館科普特區「深度書評」），筆者趁今夏這一次旅遊德國的機會，決定前往此一博物館一遊。在此，先跟大家分享幾張照片。



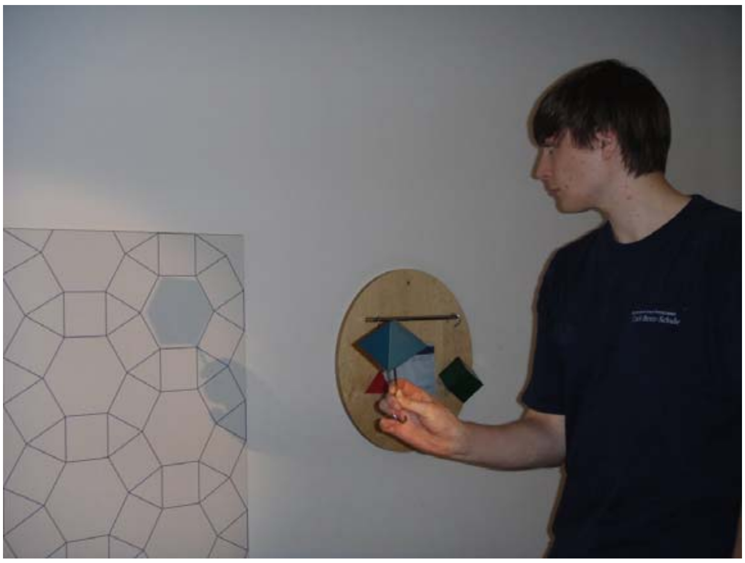
吉森火車站，小小的，但很古典，出火車站之後往左走，**10** 分鐘就可以走到博物館了，交通十分方便。

博物館的第一間展覽室，將一些我們熟悉或不熟悉的代數式幾何表現方法，用實體展現出來，其實，用手觸摸、操作所產生的知覺還是有不可替代的魅力。

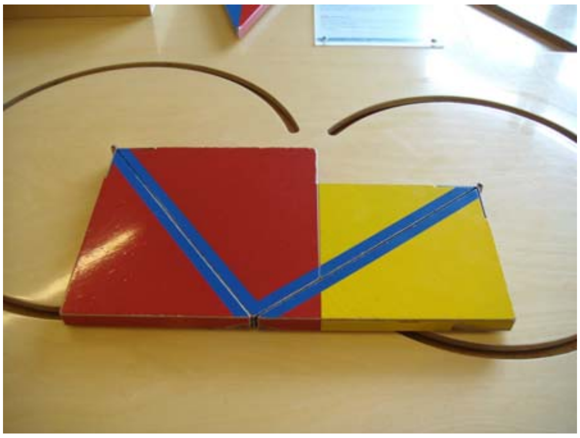
博物館的第二間展覽室。可以看到在裡面玩的，除了一些來來去去拍照傻笑的像我這樣的遊客，但更多像是當地的居民，就帶著小孩坐下來耗時間在解遊戲，彷彿把這裡當成休閒娛樂的地方，還看到至少兩對少年情侶在裡面約會，「把數學博物館當約會場所」，感覺挺驚世駭俗的......

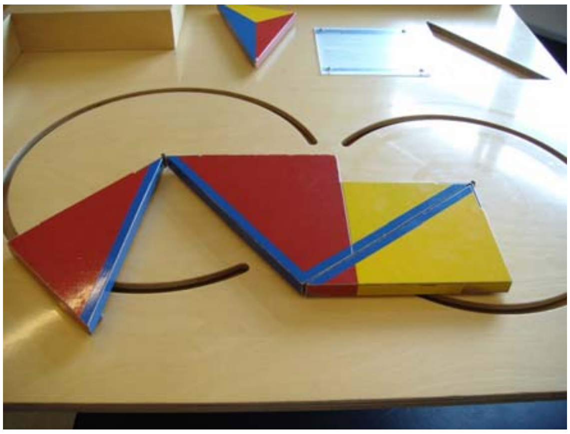


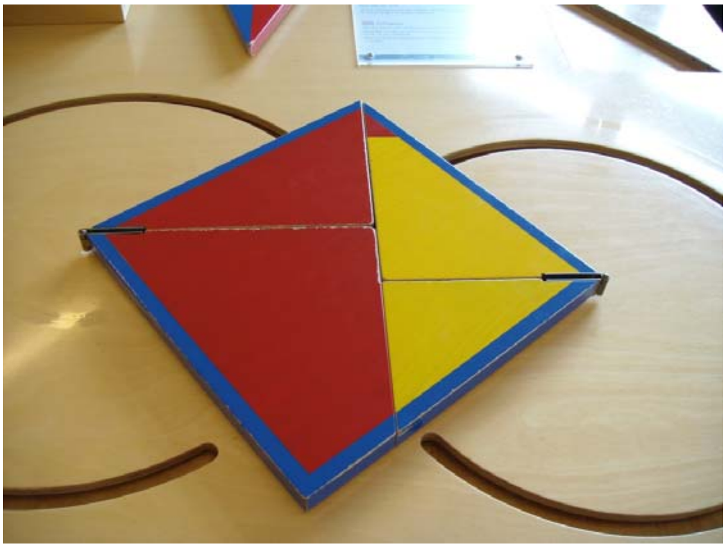

博物館中的壁畫，雖然我看不懂它想說什麼，但覺得很美，就照下來了。萬生按：此一木刻圖應該是出自杜勒（**Albrecht Durer, 1471-1528**，藝術家通常中譯為丟勒），他是德國十五世紀文藝復興著名畫家，**1494** 年曾到威尼斯學習繪畫透視學，獲益良多。其實，這些木刻圖也是射影幾何學（**projective geometry**）緣起的重要文本。



這是結合兩個不同數學原理的有趣設計，牆壁看起來是平凡無奇的鑲嵌圖案，但另一頭用燈光照射，因此可以將手上的立體成像為映在牆上的平面圖形，你需要調整遠近和角度，才能造出你想要的多邊形。操作起來沒有想像中的容易，而且饒富趣味！







畢氏定理的有名的證明方法。
但操作起來還是有一種說不出
的美妙的感覺！