HPM通訊

第十五卷 第一期 目錄（2012年元月）




創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

# 高中數學的 HPM 相關資源

林倉億
國立台南一中

## 一、前言

若一個數學老師希望在課堂上引進不一樣的內容，希望學生能從中獲得更多（元）的學習與啟發，從數學史中找材料會是一個好的方向。然而，真要從浩瀚的數學史料或是數學史著作中找起，不僅會花費許多時間，還不見得能找到適合在教學上呈現的材料。因此，若能有相關的資源提供給數學教師，那教師們就能將時間投注在如何改編成適合自己的教材，如此一來，就會有更多的教師透過數學史帶給學生不同的學習經驗與視野。

所有與數學教學有關的數學史資源，包括傳記、軼事（無論真假）、原典、歷史上的問題、符號演變、數學史著作、數學科普書、數學小說、數學影片……，還有數學教師設計的數學史融入教學的教材等等，我們可以統稱為「**HPM** 資源」。本文將介紹台灣這十多年來，在幾個不同的平台上所發展出來的高中數學 **HPM** 資源，提供給高中數學教師參考。

## 二、《HPM 通訊》

《**HPM**通訊》[1]自 **1998** 年 **10** 月創立了之後，**HPM**在台灣有了正式的專屬發聲平台，而且是一般中學教師也能夠發表文章、分享心得的平台。這十多年來，《**HPM**通訊》中已累積了為數可觀的文章，其中絕大部分都是由中學數學教師（或是職前教師）所貢獻的，因此，每當筆者要找尋適合的**HPM**材料時，第一時間就想到此份刊物，特別是《**HPM**通訊》的主編蘇惠玉老師在第 **11** 卷第 **4** 期〈《**HPM**十週年慶》：與高中數學課程相關

[1] 1998 年 10 月創刊時的名稱是《HPM 台北通訊》，自 1999 年 8 月後改名《HPM 通訊》，沿用至今。

之**HPM**文章〉一文中，依據當時高中教材的章節單元，分類列出《**HPM**通訊》第 **1** 卷到第 **10** 卷的相關文章。透過該文，就可以很快速地找到想要的**HPM**材料，再透過每篇文章所列的參考文獻，又可以找到更多更完整的資料，真的是很方便。由於蘇惠玉老師只列出《**HPM**通訊》前 **10** 卷的資料，筆者在此狗尾續貂，列出第 **11** 卷至第 **14** 卷的相關文章。鑑於現行的高中教材課程章節已有所變動，在此僅列出相關的文章之名稱、作者及所在的卷期：

| 名稱 | 作者 | 卷(期) |
|---|---|---|
| 單設法及其演變 | 黃清揚 | 11(1) |
| HPM 與高中幾何教學：以圓錐曲線的正焦弦為例 | 蘇惠玉 | 11(2/3) |
| 法國的數學天才-巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662) | 游騰雁 | 11(2/3) |
| 苦學有成的中國數學巨匠－華羅庚（1910～1985） | 郭哲君 | 11(2/3) |
| 簡介國立蘭陽女中科學史深耕閱讀計劃（96 年度） | 陳敏晧 | 11(4) |
| 晚清一代疇人—李善蘭 | 陳香穎 | 11(4) |
| 文藝復興時期的通才--達文西 | 蘇意涵 | 11(5) |
| 無限與微積分概念學習單的模組設計：Ｉ. 無限的學習單設計 | 蘇惠玉 | 11(7/8) |
| 無限與微積分概念學習單的模組設計：Ⅱ. 微積分的概念學習單 | 蘇惠玉 | 11(9) |
| 求一術的出路：同餘理論有何教學價值與意義？ | 洪萬生 | 12(4) |
| 高斯 Johann Carl Friedrich Gauss | 陳彩鳳 | 12(4) |
| 數學有確定性嗎？ | 蘇俊鴻 | 12(5) |
| 數學真理與時間相關嗎？ | Judith V. Grabiner<br>黃俊瑋 譯 | 12(6) |
| 《莉拉沃蒂》與《九章算術》 | 黃俊瑋 | 12(7/8) |
| 從歐幾里得到高斯：傳承 2000 年的正多邊形宴席料理 | 黃俊瑋 | 12(9) |
| 十二世紀婆什迦羅二世及其《莉拉沃蒂》 | 黃俊瑋 | 12(10) |
| 海洋文化中的數學 | 陳敏晧 | 12(12) |
| 賞析古典數學：《九章算術》之「開方術」 | 胡政德 | 13(1) |
| 關孝和的《解隱題之法》 | 黃俊瑋 | 13(2/3) |
| 賞析古典數學：《九章算術》之「其率術」 | 胡政德 | 13(2/3) |
| 機率的大秘密 | 李政憲 | 13(5) |
| 插值多項式的教與學問題及其學習單設計 | 蘇惠玉 | 13(6) |
| 解說《括要算法》亨卷「剪管術」 | 邱珮瑜 | 13(7/8) |
| 餘弦定理證明 | 陳敏晧 | 13(11) |
| 數學史融入教學—以對數表為例 | 林倉億 | 13(12) |

| | | |
|---|---|---|
| 三次、四次方程解法：一個歷史的回顧 | 洪萬生 | 14(6) |
| 關孝和與祖沖之的邂逅 | 黃俊瑋 | 14(7/8) |
| HPM 高中教室：單元一：《幾何原本》與《九章算術》 | 蘇惠玉 | 14(7/8) |
| HPM 高中教室：單元二：有理數與無理數—可公度量與不可公度量 | 蘇惠玉 | 14(9) |
| HPM 高中教室：單元三：平方根的近似值 | 蘇惠玉 | 14(10) |
| HPM 高中教室：單元四：解析幾何 | 蘇惠玉 | 14(11) |
| 數學史融入教學—以克拉瑪公式為例 | 林倉億 | 14(12) |
| HPM 高中教室：單元五：函數概念的發展 | 蘇惠玉 | 14(12) |

平心而論，《**HPM** 通訊》提供了相當多的素材，而且許多艱澀難懂的數學史料，經由中學教師的解讀、詮釋甚至是改寫後，變得更容易親近了，一般高中數學教師要將這些素材轉變成教材，也不再是那麼遙不可及。比如說，主編蘇惠玉老師最近的「**HPM** 高中教室」系列文章，是配合她在任教學校所開設的數學選修課程而寫的，內容十分充實詳盡，有興趣的老師都可以從這系列的文章中，找出適合自己的素材。雖然《**HPM** 通訊》提供的資源相當豐富，但美中不足的是，有些高中數學內容如向量、行列式、矩陣、線性規劃等單元，相關 **HPM** 的文章仍有待充實。

此外，《**HPM** 通訊》中有豐富的《算數書》與韓國古代數學文本的資料，但很可惜的，相關文章都偏向數學史的論述，屬於學術研究的範疇，離 **HPM** 有點距離。《算數書》是現存的中國典籍中，最古老的數學原典，**1984** 年出土，**2000** 年 **9** 月世人才得以窺探其中的內容，對世人了解先秦時代的數學發展，以及數學與社會文化、基層官吏的數學素養等等有很大的幫助，倘若能有幾篇文章是從 **HPM** 的觀點來介紹《算數書》，相信《算數書》將更有機會進入高中課堂之中。至於對韓國古代數學的研究（現稱為東算史），是國際上新興的熱門研究主題之一，這幾年來有許多位台灣中學數學教師，利用進修碩士學位的機會，仔細研究了許多韓國古代的數學文本，對當時數學知識的發展與交流，以至於韓國數學自主性的建立過程，都有深入的探討。若想要在高中數學課堂中讓學生感受到數學知識活動如何受文化的影響，東算史稱得上一個寶庫，希望在不久的將來，能有相關的 **HPM** 文章問世。

## 三、教育部高中數學學科中心《高中數學電子報》

教育部高中數學學科中心《高中數學電子報》至 **2011** 年 **12** 月共發行了 **60** 期，主要是提供與高中數學教育有關的資源給數學教師，內容涵蓋教材教法、定期考優良試題推介、電腦繪圖軟體的教學、高中數學背後的高等數學知識、好書好文推介、課程綱要的討論、研習資訊等等，是國內高中數學教師圈相當普及且受好評的一份電子報。這 **60** 期的電子報中，計有 **29** 篇文章與數學史或 **HPM** 相關，筆者整理於下：

| 名稱 | 作者 | 期別 |
|---|---|---|
| 趣味的繪馬與教學運用 | 蘇意雯 | **16** |
| 海龍 **(Heron)** 公式的各種證明 | 蘇俊鴻 | **17** |
| 賭金分配的課堂教學 | 蘇慧珍、陳彥宏 | **17** |
| 從正焦弦看圓錐曲線 | 蘇惠玉 | **18** |
| 從歷史中女數學家角度談論性別平等 | 陳敏皓 | **21** |
| 從幾何面向看根號 **2** | 蘇惠玉 | **22** |
| 對數發展史 | 吳新吉 | **23** |
| 對數發展史導讀 | 張海潮 | **23** |
| 拋物線的斜角坐標方程式和拋物線弓形面積 | 張海潮 | **23** |
| 從一個問題說起：無窮 | 蘇惠玉 | **24** |
| 一件神奇的 **Brown's Ellipsograph** 橢圓規 | 吳新吉 | **24** |
| 從刻卜勒到牛頓 | 項武義 | **26** |
| 祖氏原理與錐體體積公式 | 張海潮 | **27** |
| 借籌代數 | 郭慶章 | **28** |
| 三次方程式的歷史溯源 | 陳敏皓 | **31** |
| 回溯對數歷史 | 陳敏皓 | **32** |
| 回溯機率小史 | 陳敏皓 | **33** |
| 推薦：洪萬生教授「數學史如何啟發我們學習數學」 | 郭慶章 | **33** |
| 推薦：李國偉教授「摺紙與數學」 | 林信安 | **33** |
| 數學美拾趣 | 許志農 | **33** |
| 中西數學史比較：賈憲三角 **vs.**巴斯卡三角形 | 陳敏皓 | **35** |
| 數學的多元文化進路—以矩陣的教學為例 | 蘇俊鴻 | **38** |
| 球體積公式的探索 | 阮錫琦 | **38** |
| 淺談代數基本定理的證明 | 林鈺傑 | **40** |
| 數學有確定性嗎 | 蘇俊鴻 | **43** |
| 黃金比例教案 | 陳敏皓 | **51** |
| 怎麼算 **log2?** | 林倉億 | **52** |
| 從二次多項式到內插法 | 曹亮吉 | **57** |
| 還沒有解決的四色問題 | 李國偉 | **57** |

由於電子報的呈現方式比較多元，因此，《高中數學電子報》也提供簡報檔**(Powerpoint)**的內容，例如陳敏皓老師的〈三次方程式的歷史溯源〉、〈回溯對數歷史〉、〈回溯機率小史〉、〈中西數學史比較：賈憲三角 **vs.**巴斯卡三角形〉均有提供簡報檔，筆者就曾以陳老師的〈中西數學史比較：賈憲三角 **vs.**巴斯卡三角形〉在課堂上進行教學，

學生反應非常好。又如洪萬生教授與李國偉教授的演講簡報檔，也可以在電子報中尋得，讓無法親臨現場的教師也能夠從中一窺精采的演講內容。

## 四、學位論文

根據筆者收集到的資料，台灣自 **2000** 年以後與 **HPM** 有關的學位論文計有 **1** 篇博士論文及 **6** 篇碩士論文。博士論文是由洪萬生教授指導，蘇意雯博士的《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》，研究目的為：「研擬一套以學校為中心，**HPM** 為進路，促進數學教師專業成長的策略」以及「探討上述策略造成了參與教師哪些面向的改變與成長，並提出教師專業發展模型，再度於實踐中修正策略」。蘇意雯及其研究計畫中的另四位參與教師，經過一年多的共同努力，建立了「**HPM** 教學發展模式」，依此設計學習工作單，並於課堂中實際使用，最後再分析學生的回饋資料。這是十分嚴謹的教學實驗，因此，很值得我們多了解其中的內容。

### 4.1 博士論文：蘇意雯之《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》

由蘇意雯博士論文的附錄可知，他們共發展出八份數學史融入教學的學習工作單，主題分別是「複數」、「海龍公式」、「圓」、「數學期望值」、「矩陣」、「平移、旋轉」、「極限的概念」與「極限的應用」，這之中主要介紹到的數學家橫跨古代到近代、西方到東方，計有卡丹諾 **(Cardano, 1501~1576)**、邦貝利 **(Bombelli, 1526~1572)**、尤拉 **(Euler, 1707~1783)**、基拉德 **(Girard, 1595~1632)**、威賽爾 **(Wessel, 1745~1818)**、阿甘德 **(Argand, 1768~1822)**、高斯 **(Gauss, 1777~1855)**、哈密頓 **(Hamilton, 1805~1865)**、海龍 **(Heron,** 約 **10~75)**、秦九韶 **(1202~1261)**、哥白尼 **(Copernicus, 1473~1543)**、克卜勒 **(Kepler, 1571~1630)**、阿基米得 **(Archimedes, 287 BC~212 BC)**、笛卡爾 **(Descartes, 1596~1650)**、阿波羅尼爾斯 **(Apollonius,** 約 **262 BC~190 BC)**、帕西歐里 **(Pacioli, 1445~1517)**、巴斯卡 **(Pascal, 1623~1662)**、費馬 **(Fermat, 1601~1665)**、凱利 **(Cayley, 1821~1895)**、席爾維斯特 **(Sylverster, 1814~1897)**、李善蘭 **(1811~1882)**、齊諾 **(Zeno,** 約 **490 BC~425 BC)**、歐多克索斯 **(Eudoxus, 408 BC~355 BC)**、劉徽 **(**約 **220~280)**等等。基本上一份學習工作單由一位教師所設計，並在其任教的一個或兩個班級中實施。整過過程大致上可分為三個部分：第一個部分是在設計學習工作單的過程中，負責的教師不但要研讀數學史甚至數學教育的相關資料，也要徵詢其他參與教師的意見；第二部分是在課堂實際施行所設計的學習工作單，課程完成後，教師要讓學生寫回饋問卷，分析問卷資料，必要時則會訪談課堂上的學生；最後一部分則是完成一份完整的報告，報告的內容包含相關的數學史知識介紹、學習工作單的設計目的、施行方式、學生回饋問卷（及訪談）的分析、實施後的心得與建議。總而言之，對數學史融入教學有興趣的教師，可以從參與教師們的報告中，將該份學習工作單轉換成自己的教材而用於所任教的班級之中，如此不僅省去許多搜集資料、編寫教材的時間，更可以獲得前人寶貴的教學心得，對實際的教學有莫大的幫助。

從上述這幾位參與教師報告中，特別是心得與建議的部分，我們可以發現幾個值得注意的地方：

**(1)** 學生主要是學數學，而不是學數學史

在每位參與教師的報告中，都可以看到學生對透過數學史來學習數學的正面迴響，舉幾則學生所寫的肯定為證：

「這種上課方式，感覺較好，這才像是真正學數學，不像平常目的是為考試。」

「可以了解到數學的演進史和發展歷程，更能體會一個偉大發現背後所蘊藏的想法與假設。」

「一方面上數學，一方面了解古代數學史，由古今之間的轉變中，選擇更容易了解的方式，聽聽數學史也可減緩上數學課的緊張感，在一大堆代號及數字中，同時也了解古人的思考模式。」

「聽了融入歷史的數學，彷彿分享著古人的喜悅，好像自己置身在其中的那種喜悅是無法用言語表達的，不僅促成學習動機，也讓我們有種莫名的成就感。」

不過，水能載舟，亦能覆舟，也有同學產生了負面的感受：

「數學是很單純的東西，但把數學史加進去，給人有更困難的感覺，故數學應暫時和歷史分離，以現代口吻來說給人了解，學起來才不會這麼複雜。」

「數學史的內容太難了（某些），根本不能細說，也很難了解，歷史跟數學混在一起，變更複雜了。」

「使得進度變慢，減少上課時間，感覺沒有效率。」

「考試用不到，幫助不大。」

從上述這些學生的實際反應可知，如何將數學史巧妙、平順地融入教學之中，確是件很有挑戰性的工作。因此，如何選擇適當的數學史內容、如何改編成適合學生的教材，著實是數學史融入教學是否能夠成功的重要關鍵。一位參與教師在連續兩學期使用數學史後的的真心話，最能貼切代表教師對選擇數學史材料時應秉持的態度：

連續兩學期的數學史融入教學，筆者深深以為題材的選擇需相當慎重，質深量重的題材並不適宜，就如學生言：收「畫龍點睛」之效，足矣！任何大而不當的東西，對學生可能均是一種戕害。畢竟老師眼中不過爾爾的東西，學生看來未必如此。是不？歷史不會改變，但選材卻可靈活運用，讓這些歷史的珍寶，化為可用好用值得用的教材，

**這是再美好不過了。當學生對數學學習始終無法得心應手，興趣缺缺時，教材與技巧的改變，或許可幫他們開啟另一扇窗。**

**(2)** 對學生除了有數學啟發，還有人格的啟發

洪萬生教授曾指出教師運用數學史的三個層次之一就是利用說故事，對學生的人格成長產生啟發的作用。[2]謝豐瑞教授在其國科會研究計畫「教師數學史知識與教學信念研究」的報告中也提到，數學史知識融入教學的價值之一是「培養正面的生命價值」。[3]從參與蘇意雯研究計畫的教師的研究報告中，也可以發現一則例證。一位參與教師利用凱利與席爾維斯特的故事為例，幫助一位學生從人生的低潮及學習的徬徨中走出來，積極地融入同學之中，組織一個學習夥伴，並讓每一個學習夥伴的成績都有明顯的進步。[4]這種教育功能雖不是在每次教學中都可以得到的，但無論是無心插柳還是有心插柳，柳成蔭之後豈不美哉！

**(3)** 大部分學生的回饋是正向，對教師產生激勵作用

身為一個教師，當自己的教學活動受到學生的肯定、喜愛，這大概是教學生涯中最喜悅的時刻之一了。從參與教師的報告中，可以很直接地感受到他（她）們分享這樣的喜悅。學生的正面回饋更可以激勵教師繼續精進。舉例來說，在〈數學史融入數學教學—以極限的概念單元為例〉中，參與教師對任教的兩個班均實施所設計的學習工作單，當時的學生是正面臨大學入學考試壓力的高三學生，不過，這兩班學生對數學史學習工作單各有 **92%**及 **87.5%**的學生表達正面的看法，讓該位參與教師感到十分值得。另一位參與教師的研究報告也指出，經過兩個學期實施數學史融入教學，兩個班級的學生持正面看法的比例，分別從 **65%**、**82%**提升到 **95%**、**88%**，讓他感到非常的振奮，也更願意將數學史融入其他的單元之中。

除了上述筆者特別提出的這幾點，蘇意雯的博士論文中更仔細研究了 **HPM** 對參與教師在教師專業發展上的影響歷程，並提出促進教師專業成長的策略，這是很難能可貴的研究成果，供有興趣的教師參考。

**4.2 碩士論文**

**2001** 年開始至今的 **32** 篇與 **HPM** 有關碩士論文中，共有 **6** 篇是以高中數學課堂為研究主題的，其中的 **5** 篇（見下表）將任教的班級分成「實驗組：融入數學史的教學」與「控制組：傳統式教學」兩組，在教學完成後，均有採用問卷及統計方法進行量的分析（亦有研究者訪談學生進行質性研究）。在「學習成就」方面，得到的結果均是沒有顯著差異或是沒有負面影響；在「學習態度」方面，則有 **3** 篇論文指出學生有正向的改變，並達顯著差異，而另外 **2** 篇則顯示出數學史融入教學並不會有負面的影響。最後，**5** 位研究者均指出「實驗組」的學生大多數喜歡並肯定融入數學史的教學，且研究者也認為融入數學史對學生的學習是有幫助的。

---

[2] 參閱洪萬生(1998)，〈HPM 隨筆（一）〉。
[3] 轉引自蘇意雯(2004)，頁 36。
[4] 參閱蘇意雯(2004)，頁 190。

| 作者 | 指導教授 | 碩士論文名稱 | 融入數學史之教學單元 |
|---|---|---|---|
| 宋永耀 | 左太政 | 《融入*數學史*教學對高一學生數學學習成效影響之研究》 | 「對數」 |
| 陳建丞 | 左太政 | 《融入數學史教學對高一學生數學學習成效─以「和角公式」單元為例》 | 「三角函數和角公式」 |
| 林志全 | 左太政 | 《融入數學史對高二學生數學學習成效影響之研究─以「二項式定理」單元為例》 | 「二項式定理」 |
| 馬婉華 | 左太政 | 《融入數學史教學對高一學生數學學習成效影響之研究－以「數學歸納法」單元為例》 | 「數學歸納法」 |
| 蔡佳燕 | 蕭龍生 | 《數學史融入教學對高一學生數學學習成效影響之研究》 | 等比數列」、「直角坐標系」、「複數」、「函數」等 |

還有一篇碩士論文：王耀璋《數學史融入教學以提升學生學習成效之行動研究》（指導教授為秦爾聰教授，進行研究的教學單元是「圓與球面」、「空間中的直線與平面」、「一次方程組與矩陣的列運算」等），這一篇特別之處在於研究者很詳實地記錄了從一開始的研究構思，到實行上所遇到的困難，然後如何藉助同儕及專家的建議作調整，最後找出一個適合研究者本身及其學生的數學史融入教學的模式，而整個研究歷程長達一年。據研究者自己在論文中表示，他引入數學史的模式可分為三種。第一種是說故事，但學生反應不佳，因為不少學生認為數學課變成了歷史課。修正後的第二種模式是要學生收集資料作專題報告，同樣地，學生也不是很捧場，因為所花的時間非常多，而且感受不到這對數學學習有何幫助。最後一種模式是研究者認為最適合研究者本身的模式，包括基本課程講解、學生閱讀並討論所發的數學史資料、利用工作單進行數學史人文面的探討。工作單是一組學生一張，而每張工作單的任務都不同，內容可能是數學的，也可能是歷史的，還有是用戲劇的方式來呈現特定的主題。例如在「圓與球面」單元中的八張工作單內容如下：[5]

工作單一：出題目，包含平面上兩點距離、平面向量垂直條件、二次函數配方法、平面上點線距離。請幫同學複習這些所學過的課程。

工作單二：就之前所接觸的幾何課程內容，請問你們對解析幾何有何印象？解析幾何由何人所創？何謂解析幾何？必備條件為何？請將討論結果對全班報告。

工作單三：笛卡兒對於方程組（代數）有何見解？請以數學家的眼光將以下的問題來解決。

[5] 引自王耀璋(2006)，頁 169~170。

工作單四：就解析幾何來討論，笛卡兒和費瑪最大的不同點為何（軌跡與方程組）？試探討出笛卡兒與費瑪的爭執！請以短劇編排出（**15** 分鐘）來呈現數學家的討論及爭執方式。

工作單五：圓有哪些特性？可否依照這些特性尋找出圓的軌跡？能由這些軌跡成立方程組嗎？或者是先行成立方程組進行發現軌跡？請以教學成果來展現本組的創見！

工作單六：題目：包含二次函數配方法、空間中兩點距離、空間向量垂直條件、空間中點面距離。請幫同學複習過這些已學過的課程。

工作單七：想一想？如何將球面介紹給同學們了解？如果你們是第一位發現了天上有一顆與球一樣的幽浮，如何把它定位？

工作單八：從幾何學到解析幾何，請就小組所了解以及搜集到的數學家們，可否簡述他們的創見作一番整理，並介紹將來的發展為何？（未來發展的重要性）

從上述的工作單可預見，研究者的第三種模式不僅會佔據課堂上許多的時間，學生們也要額外付出許多時間與精力來完成工作單的內容。可喜的是，研究者在前兩種模式的經驗累積之後，知道該如何適時引導學生方向以及掌控進度，因此，第三種模式帶給研究者很大的成功，學生的接受度也很高。而就這份碩士論文所呈現的結果，研究者採用了第三種模式之後，大大改變了學生學習數學的態度，學生藉此培養了自我探究與學習的能力，而數學家思考的方式、研究數學的熱忱與堅持，也成為學生們學習的榜樣。到了研究後期（即下學期），不少學生在學習數學上變得更為主動積極，因此，成績也大幅的提升了。

## 五、「2004 亞太 HPM 國際研討會」與「高中基礎科學優良教案甄選」

除了學位論文之外，台灣也有幾位數學教師為了自己的學生而發展出 **HPM** 教材，並在不同的平台上公開和所有的數學教師分享。以下介紹「**2004** 亞太 **HPM** 國際研討會」與「財團法人思源科技教育基金會**(SpringSoft Education Fundation)**」舉辦的「高中基礎科學優良教案甄選」。

### 5.1 2004 亞太 HPM 國際研討會

「**2004** 亞太 **HPM** 國際研討會」中有幾位高中數學教師和國內外的與會者分享其在課堂上使用 **HPM** 的經驗。筆者首先介紹阮錫琦老師的〈**HPM** 在課堂上的應用：以「三角函數」教學活動為例〉**(Use of the HPM in Classroom: The example of "trigonometric functions" teaching activities)**。阮老師依當時的課程章節共設計了五張工作單，在每一單元開始前的 **20** 分鐘使用一張工作單。這五張工作單的內容包含了東西方的數學史，例如中國第一部三角學著作《大測》，這是在明朝由徐光啟和傳教士鄧玉函**(Jean Terrenz,1576～1630)**、湯若望**(Jean Adam Schall von Bell,1591～1666)**合編的；清初數學

大家梅文鼎的三角學著作《平三角舉要》，此書不僅利用「圖文對照」的看圖說故事方式，更創造許多幫助記憶的口訣，如「但以餘為正，以正為餘」、「正餘互用」等，以利學習。西方的數學家則有利用托勒密的《***The Almagest***》來介紹正弦定理與餘弦定理。比較特別值得注意的是，在第二張工作單中引用了崇禎三年**(1630)**徐光啟在奏摺〈醜虜暫束，綢繆宜亟，謹述初言，以備戰守疏中〉中的一段話：

> **教演大銃・・・一切裝放皆有秘傳。如視遠則用遠鏡，量度則用度板，未可易學，亦不宜使人人能之，所謂國之利器，不可以示人也。臣嘗深慮，以為獨宜今世臣習之，自勳戚子弟以及京衛武臣，擇其志行可信、智勇足備者教之。**

徐光啟認為三角測量屬於國防機密，是富國強兵的利器，建議其原理僅可從志行可嘉且智勇兼備的勳戚子弟或京衛武臣中，擇善而教之。阮老師在實際使用後記錄：「學生們反應甚感不可思議，但同時瞭解到三角函數在應用科學上的重要性，非常貼近生活面，突然感覺到自己所學已經觸及『國防機密』。」除此之外，在第五張工作單中，阮老師利用《**Proof without Words**》上的圖形來說明和角公式 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 、 $\cos(\alpha\pm\beta)$ ，學生的反應是非常喜歡且容易熟記圖形的解法。特別指出第五張工作單與前四張最大的不同處在於：它沒有 **HPM**！由此可以看出阮老師在設計此份工作單時，最念茲在茲的仍是如何幫助學生學習數學，從各種可能有利於學生學習的角度出發設計工作單，而不是塞一堆數學史給學生，倒了學生的學習胃口。無怪乎阮老師在文中指出，每份工作單的時間是 **20** 分鐘，見好就收！

另外還有兩外高中教師在「**2004** 亞太 **HPM** 國際研討會」分享他們的 **HPM** 經驗，也十分值得注意，分別是陳啟文老師的〈數學史融入無窮等比級數的教學〉**(Integrating the History of Mathematics into the Teaching of Infinite Geometric)**與蘇俊鴻老師的〈數學史融入數學教學—以數學歸納法為例〉**(The Use of the History of Mathematics in Teaching and Learning Mathematics: The Method of Mathematical Induction)**。陳啟文老師分享他在課堂提供給學生不同的方法來證明 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$ ，同時，提醒她們數學知識的各種面向。蘇老師則是利用 **Wallis** 與 **Pascal** 作為對比，希望能使學生感受到對「証明」的需求、「歸納法」及「數學歸納法」的異同以及「數學歸納法」的必要性，進而激起學習「數學歸納法」的興趣。無論是在陳老師或蘇老師的文章中，我們都可以看見學生表現出不同一般課堂上的學習興趣與投入，足見這樣子的教學方式對學生來說的確是正向的。不過，仍要特別指出，這兩位老師之所以能得到多數學生的正面迴響，關鍵在於他們都花了許多心力在讓數學史內容能平順地與主題融和。蘇老師就語重心長地指出：「在數學史融入數學教學的過程中，筆者最常遇見的困難是如何對材料適當的剪裁，使其與課程主題融合，不至於過份突兀，加重學生學習上的壓力，反倒造成學生學習上的困擾與抗拒。這也是想利用數學史協助數學教學的教師伙伴們，需要斟酌再三的。」

### 5.2 高中基礎科學優良教案甄選

「財團法人思源科技教育基金會(SpringSoft Education Fundation)」在 2005~2008 年舉辦了 4 屆的「高中基礎科學優良教案甄選」，有不少數學老師參與甄選，得獎的教案也公佈在網站上供老師下載使用。在這 4 屆得獎的作品中，有 3 件是 HPM 的作品，作者都是蘇俊鴻老師，主題名稱及主要內容如下：

| 作品名稱 | 設計理念及內容介紹 |
|---|---|
| 餘弦定理 | 設計理念主要是強調餘弦定律的發現脈絡，並與畢氏定理的連結更加深入。其目的是為了讓學生能對餘弦定律的性質了解更為深入且多元，不至於流於單調的公式推導或計算。<br>內容分為兩個部份：第一部份由正餘定律解決三角形邊角問題出發，讓學生察覺其使用之侷限，進而利用條件改變(由具體數字變成文字符號)，引導出餘弦定律的形式，並對於餘弦定律的性質進行觀察。<br>第二部份由餘弦定律是畢氏定理的推廣出發，經由畢氏定理的歐幾里得證法，「再現」餘弦定律的提出與形式都是件自然的結果。 |
| 無理數 | 設計理念主要在想要能具體地讓學生感受「不是有理數的數，就稱為無理數」的意義。藉由公度量概念的引進，成為判斷無理數的依據<br>此份教案分成兩個部份：第一部份說明有理數所蘊涵的意義是「可以公度量」，學生先前所學習的公因數概念、輾轉相除法都有其重要性及概念的銜接關係。<br>第二部份是無理數與不可公度量，以 $\sqrt{2}$ 為例，具體地呈現兩線段不可公度量的意義，讓學生對於「不能寫成分數形式」的數叫做無理數，能有更具體的概念了解。 |
| 圓錐曲線雜談 | 設計理念在圓錐曲線教學上進行一些相關主題的補充，因此適合在圓錐曲線課程進行後，做為教材補充之用。<br>在這份教案中的第一個主題是採用現在的符號將阿波羅尼斯在《錐線論》中對拋物線、橢圓及雙曲線的命名加以說明，試圖將正焦弦的幾何意義突顯出來。事實上，正焦弦長是阿波羅尼斯用來定義圓錐截痕拋物線、橢圓及雙曲線的依據。同時，在這個定義下，我們可以得到一個比較具有一致性形式的方程式。<br>另一個主題則是借助十九世紀的數學家(同時也是軍人及工程師)Dandelin 的巧妙安排，探討圓錐截痕與課本的圓錐定義之關係 |

這項甄選的要求參賽老師必須將教案內容以 Powerpoint 的形式呈現，並且還要有逐張對照使用說明，也就是說，就算是對該主題不甚熟悉的教師，只要搭配使用說明，很容易就可以在課堂上使用，甚至是作適當地修改，成為自己的課堂教材。此外，當年度選出的最佳教案之設計老師，也會受邀到該基金會舉辦的「高中基礎科學教學研習會」中報告與展示其得獎教案，並和與會教師面對面交流、分享教學經驗。筆者曾經參加該研習會，收穫甚豐。然而，此教案甄選自 2009 年後就未再舉辦，殊為可惜。

## 六、結語

除了上述介紹的資源外，國內還有其他的資源可供有興趣的教師挖寶。例如台灣師大數學系的「台灣數學博物館」網站（網址：http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php），不但有數學史特區，還有數學教育、數

學遊戲、科普等專區，並不時提供國內外數學教育的相關訊息，很值得常常造訪。又如科普書籍的推介，無論是《HPM 通訊》還是《高中數學電子報》，都有多篇的書評可參考，此外還有「台灣數學博物館」網站與「向社會推薦優良數學科普書籍」網站（網址：**http://www.math.sinica.edu.tw/mrpc_jsp/book/default.jsp**），除了有書介外，還列出閱讀該書所需數學知識的難易程度，若老師們想推薦數學科普書給學生的話，這倒是一個蠻不錯的參考指標。還有，《數學傳播》、《科學人》與《科學月刊》中也有許多相關且值得一讀的文章，特別是《科學月刊》中游森棚教授與單維彰教授的專欄，筆者是定期拜讀，獲益匪淺。

總而言之，過去十多年來，**HPM**在台灣蓬勃發展，不但有學位論文以此作為研究主題，證明**HPM**的確對老師的教法以及學生的學習都有正面的幫助，也有許多的高中數學教師以親身的經驗，發展出相當多樣化的資源供其他教師選擇。國外學者**Tzanakis**和**Arcavi**等人也提出數學史可以幫助教學的五大立論：**1.** 幫助數學學習；**2.** 對於數學本質和數學活動的發展，可有另一個觀點；**3.** 提升教師自己教學知識；**4.** 讓教師能喜好數學；**5.** 視數學為一項文化成果的珍視。[6]只要有實際將數學史融入教學的經驗的老師，一定能認同並感受到這五大立論。即便沒有這樣的經驗，從上述介紹的由高中數學教師所寫的諸多文章中，挑個有興趣的幾篇閱讀，相信也能夠分享到他們成功經驗的喜悅。接下來，就可以在他們的經驗、材料上，發展屬於自己的**HPM**教材，然後再跟大家一起分享。

## 參考資料


王耀璋 **(2006).**《數學史融入教學以提升學生學習成效之行動研究》，國立彰化師範大學科學教育研究所，碩士論文。

阮錫琦 **(2004).** 〈**HPM** 在課堂上的應用：以「三角函數」教學活動為例〉，**Wann-Sheng Horng** 等編，《歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集》**(Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference)**（台中：國立台中師範學院），頁 **103-113**。

洪萬生 **(1998).**〈發刊詞〉，《**HPM** 台北通訊》**1(1): 1-2**。

洪萬生 **(1998).**〈**HPM** 隨筆（一）〉，《**HPM** 台北通訊》**1(2): 1-4**。

宋永耀 **(2002).**《融入*數學史*教學對高一學生數學學習成效影響之研究》，國立高雄師範大學數學研究所，碩士論文。

林志全 **(2002).** 《融入數學史對高二學生數學學習成效影響之研究─以「二項式定理」單元為例》，國立高雄師範大學數學研究所，碩士論文。

陳建丞 **(2002).**《融入數學史教學對高一學生數學學習成效─以「和角公式」單元為例》，國立高雄師範大學數學研究所，碩士論文。

陳啟文 **(2004).** 〈數學史融入無窮等比級數的教學〉，**Wann-Sheng Horng** 等編，《歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集》**(Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference)**（台中：國立台中師範學院），頁 **139-150**。

馬婉華 **(2005).** 《融入數學史教學對高一學生數學學習成效影響之研究－以「數學歸納


[6] 轉引自蘇意雯(2004)，頁 28。

法」單元為例》，國立高雄師範大學數學研究所，碩士論文。

蔡佳燕 (2004).《數學史融入教學對高一學生數學學習成效影響之研究》，國立高雄師範大學數學研究所，碩士論文。

蘇意雯 (2004).《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》，國立台灣師範大學數學研究所，博士論文。

蘇俊鴻 (2004).〈數學史融入數學教學—以數學歸納法為例〉，Wann-Sheng Horng 等編，《歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集》(Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference)（台中：國立台中師範學院），頁 169-180。

蘇惠玉 (2008).〈《HPM 十週年慶》：與高中數學課程相關之 HPM 文章〉，《HPM 通訊》11(4): 17-20。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）英家銘（中國醫藥大學）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

# 斐波那契數列與生成函數

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

斐波那契數列的一般項如何求得？這個本質上是二階差分方程（**second order difference equation**）問題，又是如何連結上生成函數（**generating function**）呢？結城浩在他的《數學少女》（青文出版社，台北市，**2008**）中，給了我們一個極精彩、且顯然是國中學生可以理解的方法，值得我們大力推薦。

在本文中，我們簡要說明他的論述，並且引用他的符號與表式。給定斐波那契數列 $F_0=0, F_1=1$，當 $n\geq 2$ 時，$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$。造一個以前述數列為係數的生成函數 $F(x)=F_0x^0+F_1x^1+F_2x^2+F_3x^3+\ldots$，亦即 $F(x)=x+x^2+2x^3+3x^4+\ldots$。現在，考慮

**(A)** 式：$F(x)x^2=F_0x^2+F_1x^3+F_2x^4+F_3x^5+\ldots$
**(B)** 式：$F(x)x^1=F_0x^1+F_1x^2+F_2x^3+F_3x^4+\ldots$
**(C)** 式：$F(x)x^0=F_0x^0+F_1x^1+F_2x^2+F_3x^3+\ldots$

並計算 **(A)**＋**(B)**－**(C)**，得

$$F(x)(x^2+x^1-x^0)=F_0x^1-F_0x^0-F_1x^1+(F_0+F_1-F_2)x^2+(F_1+F_2-F_3)x^3+(F_2+F_3-F_4)x^4+\ldots$$

或 $F(x)(x^2+x-1)=-x$，最後得

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}\text{。}$$

接著，我們要將上述分式函數展開成為無窮級數，如此，我們便可以運用比較係數法，而求得斐波那契數列的一般項 $F_n$。由於 $1/(1-x)$（$|x|<\mathbf{1}$）極易展開，因此，我們藉由因式分解 $1-x-x^2=(1-rx)(1-sx)$，將 $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ 表示成為 $\frac{R}{1-rx}+\frac{S}{1-sx}$，比較後兩個表式的對應項係數，可得 $R=\frac{1}{r-s}$，$S=-\frac{1}{r-s}$。

現在，

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{(1-rx)(1-sx)}=\frac{R}{1-rx}+\frac{S}{1-sx}=\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{1-rx}-\frac{1}{1-sx}\right)\text{，}$$

再將括號內的兩項分別展開成為無窮級數，則

$$F(x)=\frac{1}{r-s}[(1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\ldots)-(1+sx+s^2x^2+s^3x^3+\ldots)]$$
$$=\frac{r-s}{r-s}x+\frac{r^2-s^2}{r-s}x^2+\frac{r^3-s^3}{r-s}x^3+\ldots$$

將上式與原來的$F(x)=F_0x^0+F_1x^1+F_2x^2+F_3x^3+\ldots$比較係數，則可得

$$F_n=\frac{r^n-s^n}{r-s}\text{，}n=0, 1, 2, 3, \ldots\text{。}$$

再由$1-x-x^2=(1-rx)(1-sx)$得根與係數關係如下：$r+s=1, rs=-1$。設$r\geq s$，則 $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$s=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。最後，

$$F_n=\frac{r^n-s^n}{r-s}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]\text{，}$$

即為所求。

以上便是結城浩「求斐波那契數列一般項」所使用的「旅行地圖」:

**斐波那契數列$F_n$→生成函數$F(x)$→生成函數$F(x)$的閉公式**
**→斐波那契數列一般項。**

最後，他利用本小說主角米爾迦的結語：

**生成函數是操作數列的有效方法。原因在於，我們熟知的函數解析方法都能在生成函數的國度裡發揮效用，而在函數中培養的技術也能活用在數列的研究中。**

藉以呼應高德納 **(Donald Knuth)** 在計算機科學經典作 ***The Art of Computer Programming*** 中的備註：

**……在展開長長的算式時，使用生成函數這個重要的手段，是為了要展示最初找出這個等式的方法。**

**HPM 高中教室**

# 單元六：求一術與插值多項式

蘇惠玉
台北市立西松高中

配合課程單元：**99** 課綱高中數學 **I**，多項式的運算與插值多項式

## 一、 插值多項式的學習意義與目的

**99** 數學課綱在第一冊的教材中，新增了插值多項式的內容。以插值多項式作為多項式除法的一個應用，然而學生在學習此單元時，通常不知學習目的何在，或是很難賦予插值多項式意義，尤其是拉格朗日插值多項式，對學生而言，簡直是天外飛來一筆，通常只能告記憶的方式勉強背誦。

99 課綱的專刊說明中提到：

> **在一般多項式的應用中有兩個課題，一是多項式的求值，一是插值多項式。原則上多項式可以透過四則運算求值，也因為如此，多項式被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值。另外，多項式也被用來作為插值的工具。插值的方法很重要，它用少量的數據表現連續型的資訊，展現數學的效率與精確性。**

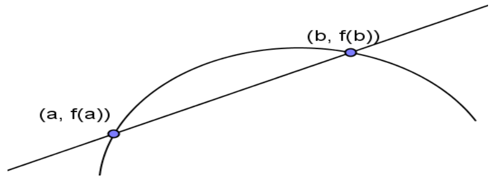
在以除法為核心方法來處理多項式問題的精神下，新課綱強調的是數學「化繁為簡」的精神以及在科學、生活中的應用，因此在 99 課綱的架構下增加了插值多項式的概念。

從學生的學習角度來看，在學習插值多項式時會碰到幾個問題：

**1.** 插值多項式被放入教材中的正當性，來自於課綱中所要強調的多項式的應用：「**多項式被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值**」。對學過高等微積分的數學教師們，對這一點的理解與認同，當然不成問題，但是，對函數只學過一次、二次及 $y=x^3$，$y=x^4$ 的高一學生而言，這句話簡直如同天書一般難以理解！因此首先學習插值多項式時，必須先「知道」這一點，至少必須知道，在此的多項式，是用來求一般函數得近似值的。

2. 何謂「插值」多項式？插值多項式的數學意涵是什麼？在這個單元的題目中，有時題目寫的是「求多項式」，有時是求「插值多項式」，有何不同？學生必須理解所謂「插值多項式」，就是利用已知的幾個數據點，來逼近函數的多項式。

3. 在課綱中強調學生必須理解「**f(x)**除 以**(x-a)(x-b)** 的餘式為通過 **(a, f(a)), (b, f(b))** 的插值多項式」。何意？因為多項式 **f(x)** 除以 **(x-a)(x-b)** 的餘式 **r(x)**為一次式，且 **x=a** 時，**r(a)=f(a)**，**x=b** 時，**r(b)=f(b)**，因此餘式 **r(x)**為通過 **(a, f(a)), (b, f(b))** 的一次多項式，也是通過 **(a, f(a)), (b, f(b))** 的割線。因此，可當成是已知 **(a, f(a)), (b, f(b))** 時，用來逼近 **f(x)**的多項式，也就是說，可以用來求在 **x=a** 與 **x=b** 之間的 **f(x)** 的近似值。



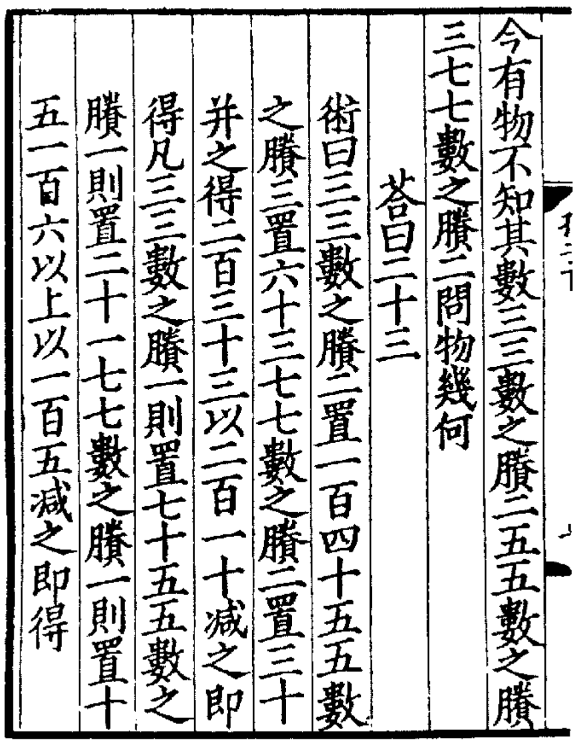

4. 接著為過三點的插值多項式。過三點**(1, 1), (2, 3), (3, 7)**的「插值多項式」，為何要以這麼複雜的形式表示： $f(x)=1\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+7\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$ ？該如何建立學習動機與建構出學習意義？除了「這樣的假設方式合乎條件」之外，能否以一個更有意義，更能接受的方式學習與記憶？

對於拉格朗日插值多項式的學習，我們可以藉助古人的智慧，從數學史料中尋找可以幫助我們學習的素材。將多項式的除法類比到先前的經驗，即一般正整數的除法，則可以從一次同餘式的中國剩餘定理中尋找到我們所需要的形式的類比。

## 二、《孫子算經》與求一術

所謂求一術，即是一般所稱的中國剩餘定理，指的是解一次同餘式的問題，例如：

> **今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？**



今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
并之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得

這樣的問題首先出現在《孫子算經》一書中。本書的作者和成書年代都不詳，現存最好的版本為南宋版（1213 年）。《孫子算經》共分上中下三卷，上卷敘述算籌的縱橫相間制和籌算的乘除法則；中卷舉例說明算籌的分數算法與開平方法；下卷則選取幾個算術難題，目的在增加讀者的興趣，下卷中最有名的問題即為上述的「今有物不知其數」的問題，為下卷第 26 問，一般這個問題就稱為「孫子問題」，這種問題在民間流傳頗廣，通常有「秦王暗點兵」、「韓信點兵」、「翦管術」、「鬼谷算」等稱法。

孫子問題即是「求一數 N，除以 3 餘 2，除以 5 餘 3，除以 7 餘 2」，這個問題不僅是一個提昇讀者興趣的題目，它和古代曆法的推算有密切的關係。我們用 N≡$r_1$(mod $m_1$)符號代表 N 用 $m_1$ 去除餘 $r_1$，例如 N≡2(mod 3)表示一數 N 除以 3 餘 2，因此這類問題即是解下列的聯利一次同餘式：

$$\begin{cases} N \equiv r_1 (\operatorname{mod} m_1) \\ N \equiv r_2 (\operatorname{mod} m_2) \\ N \equiv r_3 (\operatorname{mod} m_3) \\ \vdots \\ N \equiv r_n (\operatorname{mod} m_n) \end{cases}$$

這個問題要解決，可以考慮先求除以個數後餘 1 的情況，即求下列式子中的 $k_i$：

$k_i \dfrac{M}{m_i} \equiv 1 (\operatorname{mod} m_i)$，其中 $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ , $i$=1, 2, 3⋯,n

當求出 $k_i$ 之後，所求 N＝$(r_1 k_1 \dfrac{M}{m_1} + r_2 k_2 \dfrac{M}{m_2} + \ldots + r_n k_n \dfrac{M}{m_n}) + tM$ 。當 $m_i$ 簡單如 3, 5, 7，輕易可以推測出 $k_i$；中國南宋時期，秦九韶 **(1202-1261)** 在他的著作《數書九章》**(1247)** 中，將此問題推廣到任意的除數（非兩兩互質）及餘數。至於此求解的方法，就稱為「大衍總數術」，是先將除數化為兩兩互質，再用「大衍求一術」去求解，對相關的理論和算法，作了集大成的工作。

針對插值多項式的學習，筆者嘗試設計一分學習單，藉由問題設計的引導，可以慢慢學習理解何謂插值多項式，以及其精神所在。藉由求一術，將數字中以餘數問題返回推被除數的方法，與拉格朗日插值多項式的假設方法作一個簡單的類比，期望藉此能更輕易地、合理地接受與學習拉格朗日插值多項式。

## 三、學習單

**1.** 已知多項式，求近似值

設 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$，

**(1) f(1)=?　f(2)=?**

**(2)** 若 **f(x)=a(x-1)$^3$+b(x-1)$^2$+c(x-1)+d**，**a, b, c, d=?**

**(3)** 求 **f(1.1)**的近似值

**2.** 已知多項式的兩點，求近似值

設 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$，

**(1)** 若 **f(x)** 除以 **(x-1)** 餘 **5**，除以 **(x-2)** 餘 **3**，則 **f(x)** 除以 **(x-1)(x-2)** 的餘式為何？

**(2)** 求過**(1, 5), (2, 3)**的直線方程式。

**(3)** 求 **f(1.1)**的近似值。

**3.** 已知多項式的三點，求近似值

**(1)** 已知多項式 **f(x)**除以**(x-1)** 餘 **5**，除以 **(x-2)** 餘 **3**，除以**(x-3)**於 **3**，則 **f(x)** 除以 **(x-1)(x-2)(x-3)** 的餘式為何？

**(2)** 求過三點 **(1, 5), (2, 3), (3, 3)** 的多項式 **g(x)**

**(3)** 求 **f(1.1)** 的近似值。

**4.** 求一術（中國剩餘定理）

**(1)** 已知一數 **n** 被 **3** 除餘 **2,** 被 **5** 除餘 **3**，則此數 **n** 為何？

解：先分別找除以 **3** 餘 **1** 與除以 **5** 餘 **1** 的數：

| 除數 / 被除數 | 3 | 5 |
|---|---|---|
| 10 | 5 的倍數，被 3 除餘 1 | 5 的倍數，被 5 除餘 0 |
| 6 | 3 的倍數，被 3 除餘 0 | 3 的倍數，被 5 除餘 1 |

因為被 **3** 除餘 **2**，所以取 **2×__10__**；被 **5** 除餘 **3**，所以取 **3×__6__**，因此**n=__20+18__**

**(2)** 已知一數 **n** 被 **3** 除餘 **2,** 被 **5** 除餘 **3**，被 **7** 除餘 **2**，則此數 **n** 為何？

解：先分別找除以 **3** 餘 **1**、除以 **5** 餘 **1**、除以 **7** 餘 **1** 的數：

| 除數 / 被除數 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| 2*5*7 | 5 與 7 的公倍數，被 3 除餘 1 | 5 與 7 的公倍數，被 5 除餘 0 | 5 與 7 的公倍數，被 7 除餘 0 |
| 3*7 | 3 與 7 的公倍數，被 3 除餘 0 | 3 與 7 的公倍數，被 5 除餘 1 | 3 與 7 的公倍數，被 7 除餘 0 |
| 3*5 | 3 與 5 的公倍數，被 3 除餘 0 | 3 與 5 的公倍數，被 5 除餘 0 | 3 與 5 的公倍數，被 7 除餘 1 |

被 **3** 除餘 **2**，所以取 **2×__2*5*7__**；被 **5** 除餘 **3**，所以取 **3×__3*7__**，被 **7** 除餘 **2**，所以取 **2×__3*5__**，因此

**n=2×__2*5*7__+3×__3*7__+2×__3*5__=__233__**

**n**最小為**__23__**

**5.** 已知函數三點，求近似值

**(1)** 求過三點**(1, 5), (2, 3), (3, 3)**的插值多項式 **g(x)**

解：**g(x)**的假設方法：

| 除式<br>多項式 | (x-1) | (x-2) | (x-3) |
|---|---|---|---|
| **(x-2)(x-3)** | **(x-2)**與**(x-3)**的公倍式，被**(x-1)**除餘 **1** | **(x-2)**與**(x-3)**的公倍式，被**(x-2)**除餘 **0** | **(x-2)**與**(x-3)**的公倍式，被**(x-3)**除餘 **0** |
| | **(x-1)**與**(x-3)**的公倍式，被**(x-1)**除餘 **0** | **(x-1)**與**(x-3)**的公倍式，被**(x-2)**除餘 **1** | **(x-1)**與**(x-3)**的公倍式，被**(x-3)**除餘 **0** |
| | **(x-1)**與**(x-2)**的公倍式，被**(x-1)**除餘 **0** | **(x-1)**與**(x-2)**的公倍式，被**(x-2)**除餘 **0** | **(x-1)**與**(x-2)**的公倍式，被**(x-3)**除餘 **1** |

被 **(x-1)** 除餘 **5**，所以取 **5×**______________

被 **(x-2)** 除餘 **3**，所以取 **3×**_____________

被 **(x-3)** 除餘 **3**，所以取 **3×**______________

故取 **g(x)= 5×**_______________**+3×**_______________**+3×**_______________

**(2)** 若一函數連續 **f(x)**, 已知 **f(1)=5, f(2)=3, f(3)=3**，求 **f(1.1)**的近似值。

## 參考文獻

李儼（1983），《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。
錢寶琮主編（1992），《中國數學史》，北京：科學出版社。
洪萬生（2009），〈求一術的出路：同餘理論有何教學價值與意義？〉，《HPM 通訊》12(4)。
楊瓊茹（2001），〈中國剩餘定理〉，《HPM 通訊》4(10)。