HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘 謝佳叡（台北醫學大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十五卷 第五期 目錄（2012年5月）

三份 HPM 教案反思與比較：「圓錐曲線雜談」、「無理數」、「餘弦定理」

黃俊瑋
台灣師範大學數學系博士生

一、前言

數學的學習與訓練目的一方面引領我們看穿事物的本質，看見抽象的過程中看見不變性，同時也強調知識的結構與知識之間的連結。然而，數學知識的抽象本質，往往是學生學習障礙的來源，如何賦予抽象知識更直觀的意義以促進理解，或者建立數學知識之間的連結，皆是教學過程中的一大難題與挑戰。

蘇俊鴻老師關於「餘弦定理」、「無理數」、「圓錐曲線」三份教案中，**有效地融入數學史元素**，以**勾股定理的面積證法**連結了勾股定理 **(畢氏定理)** 與餘弦定理；以「**公度量**」的概念連結了有理數和無理數，並以「**正焦弦**」**(*latus rectumin*)** 連結了三類圓錐曲線。這三個教案依序於 **2006**、**2007** 和 **2008** 年榮獲思源科技基金會的教案金獅獎。

以下，筆者便從閱讀這三份教案，以及反思中學教材與數學教學的過程，進一步比較三者之異同。

二、「正焦弦」教案

高中教材的幾何相關單元，由於引入了具有強大威力的解析法，從而代數式與代數演算反成為教學與評量的主幹，不重視幾何關係的瞭解，反而著重在以代數形式來講述幾何內容，掩蓋住原始的幾何味，無論是課程或考題，代數化地處理幾何問題，往往流於代數方程的應用以及符號操作，反而失去原始的數學之美。

以高中圓錐曲線單元為例，教材著重於從定義演繹出圖形的方程式。再利用代數方程處理各類問題，雖然簡單討論了準線、焦點、對稱軸、長短軸、中心、弦、正焦弦與對稱性等幾何元素和性質，但對於一些相關幾何性質反而甚少著墨。而其中，學生或老師們也許會懷疑為何教材中特別交代「正焦弦」的公式或相關計算長度的問題，卻無從理解此一幾何量的意義所在。的確，以正焦弦在目前的高中教材的定位中，似食之無味，棄之可惜的「雞肋」，然而，從 **HPM** 以及知識結構的縱深統整等角度來看，反而突顯了「正交弦」的地位與重要性，從古代阿波羅尼斯的命題中，引入正交弦，一方面不止幫我們進一步了解圓錐曲線拋物線、橢圓與雙曲線之所以得其命名，另一方面，當我們架上坐標之後，利用這些命題，我們可以進一步演繹出這三類圖形的代數方程式，同時，這三類方程式可合而為一以正焦弦 $\boldsymbol{p}$ 為參數的通式：

$$y^2 = px \pm (\frac{p}{d})x^2$$

此通式中，取正項時為雙曲線，負項則為橢圓，若我們將拋物線的長軸長視為無窮大，即 $\boldsymbol{d}\rightarrow$無窮大，便可得拋物線的方程式。另一方面，若從橢圓退化為圓的情況來看，當正焦長為圓的直徑，即 $\boldsymbol{p=d}$ 時，即可得圓的方程式。**利用正焦弦以及相關面積的比較，進而得到此一通式，反過來再從「代數形式上」統整連結了拋物線、橢圓、雙曲線圓錐曲線。同時，三類圓錐曲線皆為此通式的特例，而其中的** $\pm(\frac{p}{d})x^2$ **便為區分三者差別的面積「修正項」。**

否則，若以圓錐曲線相關的二次方程 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 及其圖形來看，隨著其係數的不同，分別可代表圓、拋物線、橢圓、雙曲線，乃至於其它的退化圖形。就現今高中教材而言，若二次方程之中的 $\boldsymbol{b=0}$ 時，即交叉項不存在時，我們尚可以輕易地判別原二次方程的圖形為何。麻煩的是，倘若交叉項 $\boldsymbol{b}$ 不為 $\boldsymbol{0}$ 時，要嘛必需進一步利用坐標軸的旋轉或圖形的旋轉等變換，並花費九牛二虎外加兩隻象的力量，大費周張地進行一連串的代數操作與運算，方能對該二次方程所形成的圖形加以判別與分類，否則就得記誦依前述過程可得的複雜判別式，而在過去，這也曾是困擾許多高中學生的困難單元之一。

然而正如同蘇俊鴻老師的教案，在引入正焦弦這一幾何元素之後，非但可用以分類三類圓錐曲線，同時，原本高中課程中需要記頌三類圓錐曲線的不同定義以及不同的標準方程式，現在，**經過「正焦弦」此一拱心石的連結之後，便可以得到一簡單而明瞭，並可與幾何意義連結的代數方程式，同時從幾何面向與代數「形式」連結、一般化了原本孤立的三個錐曲線。**

三、「餘弦定理」教案

再看看餘弦定理的例子。在中學教科書中，**餘弦定理的意義一開始往往被定位為補正弦定理的不足，處理正弦定理所無法處理的解三角形問題(包含測量)。因此，學習者容易地因「正弦」與「餘弦」的名稱而將「正弦定理」與「餘弦定理」視為「好朋友」，卻忽略了兩者代數形式上的差異，以及「餘弦定理」和「勾股定理」之間的連結以及更深一層的關係。**

蘇俊鴻老師關於餘弦定理的教案中，強調餘弦定律的發現脈絡，並使其與畢氏定理的連結能更加深入與自然，其目的是希望讓學生對餘弦定律的了解能更為深入且多元，不至於僅僅流於單調的公式推導或計算。**至於如何強調餘弦定律的發現脈絡，並且與畢氏定理的連結呢？還是必需回到數學史的反思上。**或許教科書或教師手冊中給出了許多關於餘弦定理的證法，然而，無論是投影證法、坐標式解析證法等，皆只停留在核證數學知識的層次，並沒有辦法跟幾何概念作連結，只是讓學生從代數式子理解定理為真而已。**證明過程中的代數運算就像黑盒子，無從引導學生，甚至是教師們對於數學知識的本質有更深一層的了解。**也因此，餘弦定理在幾何上的意義在教學時卻常被忽略。

部份聰明的學生在學習或觀察了餘弦定理的數學式之後，或許會對餘弦定理的「樣式」感到熟悉，它與「勾股定理」的樣式頗為相似，乍看之下，兩者之間僅差了一項「修正項：$2ab\cos C$」，而這樣的關係便為往後的發現脈絡預埋下種子。至於此「修正項」又有什麼重要意義呢？若不從歐幾里得在對於勾股定理提出的「風車證法」或曰「戰士證法」談起，恐怕一般人難以得其門而入。

因此，蘇俊鴻老師的教案中，從《幾何原本》(***The Elements***) 第一卷之中的勾股定理證法出發，再連結到餘弦定理的證明，比對兩者證明過程中的異與同之後，答案呼之欲出，原來修正項 $2ab\cos C$ 亦非憑空而來，其具有關鍵性的幾何意義。當我們把證明直角三角形勾股定理的面積證法，搬到銳角三角形餘弦定理的證明過程中，很快地就會發現，夾銳角兩邊的正方形與對邊正方形之面積差異，而此面積差異正是餘弦定理修正項的幾何意義。從此證明的過程中，我們更進一步洞見餘弦定理與勾股定理本質上的異同。經此連結，當角 C 為 **90** 度時，即原三角形為直角三角形時，「勾股定理即為餘弦定理的特例」，同時「餘弦定理亦為勾股定理的推廣或通例」。當然無論角 C 是直角、銳角或鈍角時，都可以從幾何面向來解釋修正項「$2ab\cos C$」的意義，如此，透過此一圖形證明過程，不但達到知識核證的效果，同時也引導發現「修正項」的意義，以及當角 C 分別為直角、銳角或鈍角時差別。縱深連結了國中與高中教材的兩個定理。而從教案中，我們也發現作者不斷地利用「由特例到通式」的過程，在同樣的形式之下，逐步抽象化，建立學習者的典範例概念心像，這也值得數學概念教學仿效與學習。

四、「無理數」教案

最後，再來看看「無理數」教案。高中教材中，將可以寫成「***b*/*a***」型式的數定義為有理數，其中，***a*** 與 ***b*** 皆為整數，且 ***b*** 不為 ***0***。反之，無法表示成此型式的數則為無理數，為什麼「可表達」**(logos)** 即「有理」**(rational)**，不可表達便為「無理」**(irrational)** 呢？聰明的學生也許尚能從課本的定義中「意會」此差異，然而冷冰冰的有理數身份證「***b*/*a***」，以及非我族類的「無理數」，帶給多數學生的恐怕只有「記下來」的低階認知層次與疑惑不解。

然而，當我們懷抱數學史，從古希臘「公度量」的概念與意義著手，隔閡住無理數與有理數之間的神秘面紗，便豁然而開。利用公度量，將無理數從「數字共和國」解放出來，進而從「幾何度量」的角度賦與「數字」意義，這樣的數形結合的例子，不正是開展於古希臘畢氏學派的傳統。

而公度量的過程，亦離不開與輾轉相除法之間的連結，教案中，再次以幾何量之間的輾轉相減以及求兩長度的公度量單位為橋，幫助我們連結並洞悉輾轉相除法代數化的程序性過程與幾何意義。並利用正方形邊長與對角線長為例，說明了 **1** 與根號 **2** 之間的不可公度量性，也論證了與 **1** 不可公度量實數的存在，即無理數的存在。

從教案中的比較連結中，不僅整個輾轉相除法的代數操作幾何直觀化，同時，從公度量的操作過程中，更有助於學習者從數學本質上區分「有理數」與「無理數」之間的差異。而這樣的認知歷程正也呼應了數學教育家 **A. Sfard** 關於數學概念對偶性的理論，其認為操作性 **(operational)** 與結構性 **(structural)** 是數學概念的一體兩面，多數時候操作性的發展先於結構，而從公度量的操作歷程中，慢慢經過內化與壓縮的過程，最後有理數與無理數的概念物化為一抽象的結構 - 數學物件，從而理解兩類的本質與差異。

五、結論

幾何代數化的結果固然發展出解析幾何等強大工具，代數化地處理幾何問題，也成為現今高中數學課程的主流，然而，幾何知識的「意義」與「圖形直觀面向」卻從繁雜的代數式與演算中退下舞台。然而，數與形的結合，由形更直觀地反思、理解數，不正是兩千年前畢氏學派所依循的進路。

從蘇俊鴻老師這三份教案的設計中，我們可以發現，作者同樣從數學史上尋找靈感與素材，透過數學發展史的反思與融入，也同樣地回過頭利用幾何上的意義，利用「數形」的結合，更直觀而本質地連結了冰冷的數學知識，幫助學習者建立更完整的認知基模，以達到更加「有意義的學習」。對中學數學知識進行縱深統整，重新賦予現今課程中，只具代數「形式」的「有理數 ***a*/*b***」，以及被當作代數化解題實用工具的「餘弦定理」更深一層的意義，也連結了看似彼此孤立的三大圓錐曲線。

「圓錐曲線雜談」教案中，利用正焦弦以及相關面積的比較，了解拋物線、橢圓與雙曲線的差異，不但水平地統整、連結了孤立的三者，更得到以正焦弦 p 為參量的一般化通式：$y^2 = px \pm (\frac{p}{d})x^2$，反過來再從「代數形式上」連結了三者的共通性，同時，三類圓錐曲線皆為此通式的特例，而其中的 $\pm (\frac{p}{d})x^2$ 便為區分三者差別的面積修正項。

至於「餘弦定理」教案中，則是以歐基里得的面積證法出發，利用相同的證明方式**(**勾股定理**)**，由特例到一般化，營造出可以讓學生參與的發現脈絡，縱深統整了勾股定理與餘弦定理，並賦與了餘弦定理修正項「**2*ab*cos*C***」幾何上的意義，引領學習者從面積比較的幾何本質，重新認識餘弦定理。同時，不只從代數式來看兩者之關連，更從幾何的意義中理解為何「勾股定理是餘弦定理在夾角為直角時的特例」，並且「餘弦定理是勾股定理的推廣」。

上面兩個例子中分別先從特例「直角三角形」與「拋物線」出發，再推廣到其它情況，從而引出面積修正項「**2*ab*cos*C***」與 $\pm (\frac{p}{d})x^2$，而此修正項，正能幫助我們從幾何面向來比較並認識不同特例**(**三類圓錐曲線以及直角、銳角與鈍角三角形**)**之間的關係與差別。

最後的「無理數」的教案中，以公度量的概念與意義出發，輔以輾轉相除法，透過具幾何意義的度量過程，比較並連結了有理數與無理數，而可否與 **1** 公度量，便是這區分兩類實數的本質上的差別。

這三份教案同樣地師取古希臘數學家的想法，同樣利用「幾何」意義，連結了原本孤立的數學知識，從而發現數學知識本質上的共通性與差異，也讓我們更加深刻地重新認識過去習以為常的數學知識。數學史融入教學，並不單只是說故事與動機的引發為目的，更能有助於學習者對於數學概念的理解以及概念之間的連結與統整，從而建立更完善的認知基模與相關知識結構。而三份 **HPM** 教案也給了上述論述最好的示例。

Information ICME-12 TSG 20 論文時間表

TSG 20 主題: The Role of History of Mathematics in Mathematics Education
Co-chairs: R. Chorlay (renaud.chorlay@paris.iufm.fr),
W.-S. Horng (horng@math.ntnu.edu.tw)
Team Member: Manfred Kronfellner (Austria), Cathy Clark (USA),
Abdellah El Idrissi (Morocco), Hyewon Chang (Korea)

Tuesday, July 10

10h30:
General introduction to TSG20

10h40 - 11h05: Paper #0166
Lawrence, Snezana (Bath Spa University, United Kingdom)
The historical thread - enhancing subject knowledge with history of mathematics in Newly Qualified Teachers

11h05 - 11h30: Paper #0484
Smestad, Bjorn (Oslo and Akershus University College of Applied Sciences, Norway)
Not just "telling stories". History of mathematics for teacher students ? what is it and how to teach it?

11h30 - 12h00: Paper #0250
Kjeldsen, Tinne (Roskilde University , Denmark)
Genuine history and the learning of mathematics: The use of historical sources as a means for detecting students' meta-discursive rules in mathematics

Wednesday, July 11

10h30 - 10h55: Paper #0875
Wanko, Jeffrey (Miami University, United States)
Understanding Historical Culture Through Mathematical Representations

10h55 - 11h20: Paper #0860
Cauty, Andre (Universite Bordeaux 1, France)
Lab work of epistemology and history of sciences: How to transform an Aztec xihuitl (a 18 periods year) into a calendar?

11h20 - 11h45: Paper #1208
Bonilla Maria del Carmen (Sociedad Peruana de Educacion Matematica , Peru)
Visualization of the Archimedes mechanical demonstration to find the volume of the sphere using 3D dynamic geometry

11h45 - 12h00: Short introduction to Posters affiliated with TSG20

Friday, July 13

10h30 - 10h55: Paper #0523
Alpaslan, Mustafa (Middle East Technical University , Turkey)
"History of Mathematics" Course for Pre-service Mathematics Teachers: A Case Study

10h55 - 11h20: Paper #0326
Luo Xinbing (Shannxi Normal University,Xi'an,China)
Character and Model of Distribution of Mathematics History in the High School Mathematics Textbook (paper)

11h20 - 11h45: Paper #0837
Sun Xuhua (Faculty of Education, University of Macau, China)
The systematic model of JiuzhangSuanshu and its educational implication in fractional computation

11h45 - 12h00: Short introduction to Posters affiliated with TSG20

Saturday, July 14

10h30 - 11h00: Paper #0225
Lodder, Jerry (New Mexico State University, United States)
Primary Historical Sources in the Classroom: Discrete Mathematics

11h00 - 11h30: Paper #0874
Michel-Pajus Annie (IREM, Universite Paris Diderot, France)
Historical algorithms in the classroom and in teacher-training

11h30 - 12h00: Paper #0868
Jakobsen, Arne (University of Stavanger, Norway)
Mathematical Knowledge for Teaching in Relation to History in Mathematics Education

推薦《1, 2, 3 和＋－×÷的數學旅行》

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：《**1, 2, 3** 和＋－×÷的數學旅行》
作者：大衛．柏林斯基（**David Berlinski**）
中譯者：甘錫安
推薦序：洪萬生
出版資料：**271** 頁，平裝本，定價新台幣 **320** 元
出版社：臉譜出版社，台北市
出版年月：**2012** 年 **6** 月
ISBN 9789862351833
關鍵詞：數學基礎、數學史、數學普及

就數學普及書寫而言，本書主題近於大學數學系的傳統課程《數學基礎》（**foundations of mathematics**），是相當罕見且具膽識的選擇。顧名思義，數學基礎探討最基本的數學知識（如自然數概念等）的本質，尤其為什麼它具有確定性（**certainty**）。這或許可以解釋何以作者提出他所謂的「超基礎數學」（**absolutely elementary mathematics**）。

由於本書說理與敘事兼備，儘管前者是重頭戲，不過，有時候為了讓讀者暫時擺脫邏輯的必然性「壓力」，作者會在適當時機提供敘事（**narrative**）。因此，除了在相關脈絡中引進數學家的故事或文學性作品之外，作者也運用了許多比喻（**metaphor**），讓讀者對於他的說理有了更溫潤的理解可能。

一般來說，具有數學洞察力與寫作才華的數學家書寫普及作品時，都很喜歡針對數學世界進行比喻，以便強化他們的敘事與說明。他們除了模仿啟蒙運動思想家將數學知識比喻成一棵大樹之外，像史都華（**Ian Steward**）就將數學比喻成為一座風景區，如此一來，他就可以搖身一變為風景區的導覽志工。至於本書作者則「**設想數學就像一個城市，城市天際線的主角是三座雄偉的高塔。這三座宏偉的建物分別屬於『幾何』、『分析』和『代數』，探究的對象各是空間、時間及符號和結構。**」在這樣的藍圖中，作者希望他所陪伴的主人翁自然數、**0**、負數和分數，可以為我們訴說這座數學城市的故事。

不過，本書最精彩的比喻，則是在第 **21** 堂課中，將環（**ring**）的三重抽象概念類比到法律上的契約的三種內涵。對比威利斯頓（**Williston**）的《契約》（***Contracts***），作者指出：在數學這一邊，首先的要求是數學家（以及讀者）願意接受公理所進行的壓縮；其次，數學家（以及讀者）願意把眼光投向剛開始要求我們接受公理的主題之外；最後，願意在公理系統中找出完全由公理創造的事物。而在法律這一邊，則威利斯頓注意到「法

律將履行契約視為義務」；其次，法官或陪審團著手瞭解某些雙邊協議中有承諾約束；最後，願意瞭解契約法所說的契約是什麼。由於數學知識的確定性來自邏輯的「必然性」，因此，作者顯然企圖呼應契約中的某種法律「強制性」。

基於此一數學 **vs.** 法學之比喻，我們很容易可以猜測本書在數學論證方面的講究。現在，讓我簡介本書內容，或許讀者可以據以體會作者的用心。

本書共有二十五堂課，其中第 **5**、**13**、**16** 課分別以整課的篇幅，介紹三位數學家（阿伯拉、狄摩根和索菲雅 **•** 卡巴列夫斯基）的故事，其餘 **22** 課內容，就圍繞在自然數、**0**、負數與分數之概念及其運算所產生的抽象數學結構上。第 **1-3** 課主題是自然數與 **0** 的命名及位置記數法，其中並提及如何利用集合來定義自然數。在第 **4** 課中，作者介紹邏輯學中有關推論形式之意義，特別是與自然數的連結。第 **6-7** 課主題是公理系統與皮亞諾公理（**Peano's Axiom**）。第 **8-9** 課主要解釋加法的定義。第 **10** 課主題是乘法的定義，而進一步延伸的，是第 **11** 課的基底以及位置記數法。第 **12** 課主題是遞迴原理（**recursion theorem**），其中作者也特別說明它與相關定義法（**method of definition**）之連結。在第 **14** 課中，作者介紹五個算術定律：結合律、交換律、（乘法對加法的）分配律、三一律以及消去律，並且預示運算決定了數系結構之事實。在第 **15** 課中，作者說明數學歸納法原理（**principle of mathematical induction**）與良序原理（**well-ordering principle**）之關連。

限於篇幅，我上述這些流水帳式的簡介，看來相當「枯燥乏味」，儘管原書中還是有許多頗為精巧的論證。無論如何，作者顯然覺得此時必須來個「中場休息」，這應該是他在第 **16** 課介紹偉大女數學家索菲雅 **•** 卡巴列夫斯基（**Sofya Kavalevskaya**）的故事，「**不妨體會一下它們隱藏的熱情，以及它們引發的戲劇性事件**」。

在第 **17** 課中，作者演示數學歸納法，以證明加法的結合律。第 **18** 課介紹 **0** 與負數，其中罕見地提及負數在複式簿記制度中相當好用。第 **19** 課主題是整數系。在第 **20** 課中，作者引述新代數作為一種符號的科學（**science of signs**），以及偉大（女）數學家諾特（**Emmy Noether**）對現代抽象代數的偉大貢獻。由於諾特的貢獻之一是環（**ring**），因此，作者緊接著在第 **21** 課中，介紹此一抽象代數之結構。然後，在此一關連中，作者在下一章（第 **22** 章）提供「負負得正」之證明。在第 **23** 課中，作者從《萊茵德紙草書》談到方程式求解，最終目的是討論多項式（可構成一個環）的角色。第 **24** 課主題是除法與分數，並進一步討論分數與小數的表徵形式。第 **25** 課的主題是數體 **number field**），作者引進這些抽象結構，完全基於它們的圓滿自足：「**體的定義……本身告訴我們，數學和超基礎數學需要人類投注所有心力，創造抽象概念，同時相信這些概念。**」最後，在結語中，作者引用《蘇丹在後宮》這一幅畫，來強調數學的本質是關乎「**自然生成與人為創造的兩種事物，和諧地彼此共存**」。

就訴求目標讀者來說，本書可以跟《社會組也學得好的數學十堂課》（傑瑞 **•** 金著，商周出版，**2010**）做一個對比。後者顯然針對非科學主修大學生的數學通識課程。作者

傑瑞‧金（**Jerry King**）使用了數學 **vs.** 詩篇的類比，強調即使是人文社會科學主修的學生，也可以學好數學。如果一般人可以被詩篇所感動，那麼，他們又何嘗無緣參與數學知識活動呢？傑瑞‧金認為基本的邏輯推理訓練、集合論、從自然數經整數、有理數、實數到複數的數系發展、數論、函數（含解析幾何）、機率論以及微積分等等，都是不可或缺的主題。同時，他又高度重視數學知識的結構面向，譬如從自然數系到微積分的縱深統整論述，就明確地演示數學的意義與價值不僅在於它的廣泛應用，而且也關乎它自身的真與美。

相對而言，本書也極端重視論證，不過，作者在求「真」方面顯得更加堅持，為此，他認為應該深入公理系統的設置底層，探索比如算術加法與乘法的結合律（**associative law**）與遞迴（**recursion**）的本質關係。另一方面，他的「求真」也相當「純粹」，比如當他運用一列骨牌比喻數學歸納法：「**若（if）第一張骨牌倒下，且若（if）推倒任何一張骨牌即可再（then）推倒下一張，則（then）所有骨牌一定會倒。**」緊接著，他表達了「以物理方式類比數學運算時的必然限制」：「**我經常想，這個說法（按即骨牌比喻）在物理學上是否成立。動量在骨牌長龍中傳遞，意味著骨牌可能會持續倒下，但動量在骨牌常龍中會逐漸衰減，意味著骨牌長龍延伸到外太空時，它呈現的波浪會逐漸減慢，最終會停頓下來，直到很多很多骨牌直立者。**」還有，基於這種比喻，本書內容幾乎不涉及數學應用例證，一點都不令人感到意外。

上述有關本書這些風貌，都可以解釋作者的敘事手法。由於本書強調數學基礎之論證，因此，在考量到讀者的耐心時，他隨時地「岔入」數學或數學家的故事。在本書中，作者所介紹的數學家（從古代到 **20** 世紀中期）就將近 **20** 位之多，而且大都簡述他（她）們的故事傳奇。此外，他也經常引述一些文學作品，以便「淡定」陷入基礎深淵的數學熱情。

總之，這是一本相當另類的數學普及小品。一般讀者初次接觸本書不免覺得論證「超量」，但平心而論，讀者若懷抱一點點耐心，順著這些材料讀下去，也並非難以理解。數學知識中有許多基本但極為深刻的內容，譬如自然數如何定義？中學階段所學習的數學歸納法有何意義？所謂的遞迴定理與我們所理解的數學基本概念又有何關連？還有，數學運算如何決定結構？等等，都在本書中有了簡易可及的切入點。無論如何，本書的訴求呼應了通識教育中非常古典的心智訓練，讀者若有機會隨性地讀個幾章（順序無妨），一定可以變得比較博雅才是。至於中小學數學教師呢，本書至少可以提醒：那五個算術定律為何那麼重要了。

最後，我們必須指出本書的一些謬誤與商榷，供讀者參考。

有關基數（**cardinal number**）問題。頁 **12** 提及「沒有自然數，我們無法計數，也無法回答『有多少？』這個問題。」這一句論斷值得商榷，因為在「數不過三」（亦即：只能數一、二、很多很多）的民族部落中，還是有能力運用一一對應關係（**one-to-one correspondence**），確認他的二十頭羊是否走失。

頁 **141**：有關骨牌比喻數學歸納法之說明中，「直到僅餘一個骨牌直立著」應該修訂

為「直到還有很多很多張骨牌直立著」，才比較「正確」與達意。

在頁 **185**，作者提及群論（**group theory**）是在伽羅瓦決鬥身亡前一天晚上寫成的作品中達到完備。又，在頁 **224**，作者再次強調：「在決鬥身亡的前一天晚上，二十四歲的伽羅瓦盡情發揮才能，重新檢視多項（式）方程式的根，首先發現了對稱限制系統，這個系統將可決定哪些方程式可解、哪些又不可解。」有關此一敘事不符合史實，數學史家早已貼心糾正，可惜，作者可能還是參考始作俑者的 **E. T. Bell** 的《大數學家》（***Men of Mathematics***）。事實上，在決鬥前夕，伽羅瓦寫信給他的好友，交代後者要幫忙珍惜他自認為畢生最偉大的數學貢獻，而那是他已發表的論文結果，因為他說：「我的命運已經無法讓祖國及時認識我的貢獻」。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

HPM 教室

單元八：解方程式的線性思維—試位法與雙設法

蘇惠玉
台北市立西松高中

適用課程單元：99 課綱數學 I，多項式方程式

一、 試位法

不管對哪一個文明而言，數學的發展一開始通常都來自於現實世界的需求。這些現實的問題，包含了稅收、分糧食、面積測量等等問題形式，通常可以歸類成解線性的一次方程或非線性的一元二次方程式問題。要解決這些問題並不須要複雜的數學知識，即使像古埃及的書記官或是中國的官吏們，儘管沒有現代便利的符號，用文辭敘述的方式依然可以將問題解決。

在古埃及的蘭德紙草文書中，記載了許多關於一次方程式的問題，例如

有一個量，它的一半和它的三分之一與它加在一起後變成 10。

受訓練的埃及書記官學習和我們現今一樣的方法來解這個線性方程：用 **10** 去除以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$。在紙草書的許多問題中，顯示了許多這樣的除法技巧訓練。然而在紙草文書中，還提供了另一種解線性方程的方法。譬如在蘭德紙草文書中的第 **26** 個問題：「**一個量，它與自身的 $\frac{1}{4}$ 相加結果為 15**」，書記官寫下的解題步驟如下：

假設解答為 4，將 4 加上它的 $\frac{1}{4}$ 等於 5，…找一個乘 5 能得到 15 的數，這個數是 3，用 4 乘 3，答案是 12。

這個問題所用的方法，稱為試位法(**false position**，或稱單設法)。假定一個答案，儘管可能不是真正的解答，但是會使得計算容易一點，然後使用這個猜測去得到一個倍數，使得猜測的數乘上這個倍數會得到真正的答案。

所謂試位法，就是利用兩個量之間的線性關係，當我們所解的方程式為 **Ax=B** 時，將 **B** 乘上 **k** 倍，**x** 也會變成 **k** 倍：**A(kx)=kB**。雖然在紙草文書中沒有去討論這個方法為何有效，但是顯然地，書記官們曉得兩個量之間的線性關係的這個基本觀念。再舉一個試位法的例子，下面的這個問題來自蘭德紙草文書的問題 **24**，解法中涉及到分數的計算，我們也可從這個例子中一窺埃及數學在計算方面的特徵：

問題　某數與他的$\frac{1}{7}$相加得 **19**，求該數。假設該數為 **7**

＼**1**	**7**
＼$\frac{1}{7}$	**1**
和數	**8**

然後計算何數乘以 **8** 能得 **19**（計算 **19÷8**）：

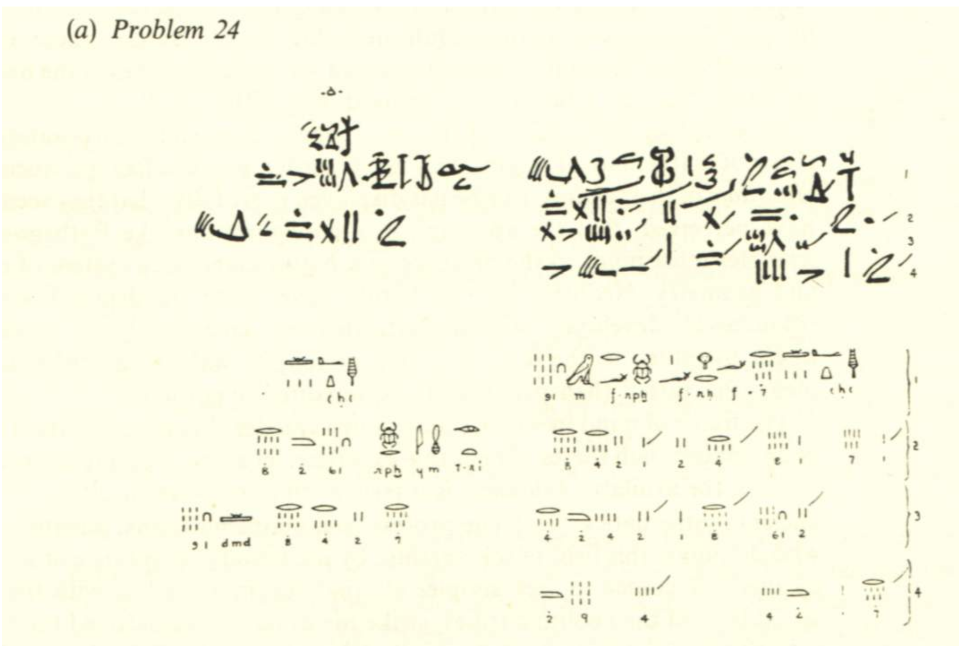
1	**8**
＼**2**	**16**
$\frac{1}{2}$	**4**
＼$\frac{1}{4}$	**2**
＼$\frac{1}{8}$	**1**

和數$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$

再將該數乘以 **7** 就得到所求數（計算$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$×**7**）：

＼**1**	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
＼**2**	$4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
＼**4**	$9\frac{1}{2}$

驗證如下：所求數	$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$
$\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
和數	**19**



(a) *Problem 24*

二、雙設法

當線性方程的問題變成稍微複雜一點的形式時，延伸試位法而來的一種方法稱為雙設法**(double false position)**，在中國的古算學中，則稱這種算法為盈不足術。盈不足術首見於 **1984** 年在湖北張家山墓地中出土的竹簡《筭數書》，《筭數書》的成書年代不晚於西漢呂后二年（公元前 **186** 年），其中第 **51** 題如下：

> **分錢　分錢人二而多三，人三而少二，問幾何人、錢幾何？得曰：五人，錢十三。贏（盈）不足互乘母為實，子相從為法。接贏（盈）若不足，子互成母而各異直（置）之，以子少者除子多者，餘為法，以不足為實。**

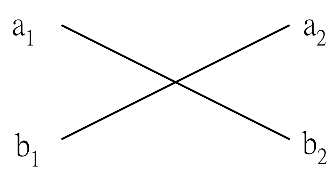
同樣類型的題目也出現在《九章算術》的第七章「盈不足」中，譬如：

> **今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？**
> **答曰：七人、物價五十三。**

這個問題若以現在的符號代數解法，可以假設人數為 **x**，物價為 **y**，因此得到兩個二元一次方程式，聯立解之，則可得人數與物價。但在《九章算術》中，則以所謂的盈不足術來解決：

> **盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。另維乘所出率，并，以為實。并盈、不足為法。實如法而一。有分者，通之。盈、不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法實。實為物價，法為人數。**

也就是說，假設兩次付款數（所出率）分別是 $\mathbf{a_1}$、$\mathbf{a_2}$（$\mathbf{a_1}>\mathbf{a_2}$），盈、不足數分別是 $\mathbf{b_1}$、$\mathbf{b_2}$，所謂「**置所出率，盈不足各居其下**」，即將已知四數排成下圖：

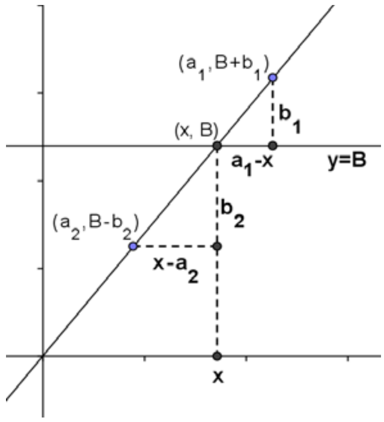


「**維乘所出率，并，以為實**」即是將上圖中四數交叉相乘後相加，得 $\mathbf{a_1b_2+a_2b_1}$ 後作為被除數；「**并盈、不足為法**」即以 $\mathbf{b_1+b_2}$ 為除數；「**實如法而一**」即可得每人應出錢數＝$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$。另外，「**置所出率，以少減多**」，即 $\mathbf{a_1-a_2}$；「**餘、以約法**（$\mathbf{b_1+b_2}$）、**實**（$\mathbf{a_1b_2+a_2b_1}$）。**實為物價、法為人數**」即得物價及人數為

$$\text{物價}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2}\text{，人數}=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$$

因此在「共買物」這一題中，可得每人應出錢數=$\frac{3\times8+4\times7}{3+4}$，而物價＝$\frac{3\times8+4\times7}{8-7}$＝**53** 錢，人數＝$\frac{3+4}{8-7}$＝**7** 人。

盈不足的公式從何而來？為什麼這個方法有效？當然中國的傳統算法自有其整個算學文化傳承的脈絡，在此略過不談，我們只專注在其線性思維的部分。以現在我們所學的觀念來理解，因為人數多少是固定的，而每人所出的錢數與總錢數之間有一線性關係存在，設總錢數為 **y**，每人所出的錢數為 **x**，那麼 **y** 與 **x** 的線性關係可設為 $y=mx$，圖形如右。共買物的問題可以轉換成當 **y**=物價（設為 **B**）時，每人所出錢數 **x**＝？而現已知此直線上兩點**(a_2, B－b_2)**與**(a_1, B+b_1)**，利用斜率相等可知



$$\frac{b_2}{x-a_2}=\frac{b_1}{a_1-x}\text{，因此 } x=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}\text{。}$$

在「盈不足」這一章中，將盈不足術分為盈不足、兩盈、兩不足、盈適足、不足適足等五種情形，當然這五種情況以現在的直線理論來看，都在相同的概念架構之下。

由於在解決線性方程式的問題上，雙設法是一個相當有效率的方法，因此即使在符號代數發明之後很長一段時間裡，雙設法還持續被使用著。譬如在十九世紀早期出版的一本書《校長的好幫手 ***Daboll's Schoolmaster's Assistant***》中有這樣一個例子：

> **將一袋錢中的 100 美元分給 A、B、C 和 D 四個人，如果 B 要比 A 多 4 元，C 比 B 多 8 元，而 D 所得是 C 的兩倍，那麼每一個人可以分得多少錢？**

在此書中即用了雙設法來解決這個問題。雖然符號代數為我們帶來了解方程式的快捷與便利，然而卻也因為代數符號的操弄，容易失去對圖形直觀所帶來的洞察力。

Exercise

1. 在巴比倫的泥版上有這樣一個問題：
我找到一塊大石，但沒有秤它，在我給它加上總重的七分之一以後，又加上**(**後來總重的**)**十一分之一，其重量為 **1** 米拉**(mina)**（＝**60** 斤**(gin)**），這塊石頭原重多少斤**?**
(1) 列出一個符合敘述的代數關係式。
(2) 利用試位法解這個問題。

2. 在蘭德紙草文書的問題 **24** 的解法計算過程中，你覺得埃及的計算方式有何特殊的地方？

問題　某數與他的 $\frac{1}{7}$ 相加得 **19**，求該數。假設該數為 **7**

＼**1**	**7**
＼$\frac{1}{7}$	**1**
和數	**8**

然後計算何數乘以 **8** 能得 **19**

（計算 **19÷8**）：

1	**8**
＼**2**	**16**
$\frac{1}{2}$	**4**
＼$\frac{1}{4}$	**2**
＼$\frac{1}{8}$	**1**
和數 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	

再將該數乘以 **7** 就得到所求數

（計算 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}\times 7$）：

＼**1**	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
＼**2**	$4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
＼**4**	$9\frac{1}{2}$

驗證如下：所求數 $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$

$\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
和數	**19**

3. 下面是《九章算術》「盈不足」章中的雙盈問題：

今有共買金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。問人數、金價各幾何？

(1) 用現代的符號代數解決這個問題。

(2) 改用雙設法解決這個問題。

4. 下面是 **19** 世紀《校長的好幫手》中的問題：

將一袋錢中的 100 美元分給 A、B、C 和 D 四個人，如果 B 要比 A 多 4 元，C 比 B 多 8 元，而 D 所得是 C 的兩倍，那麼每一個人可以分得多少錢？

(1) 用現代的符號代數解決這個問題

(2) 改用雙設法解決這個問題。

5. 如果要解決一個線性方程式（**x** 的一次方程式）的問題，你會優先選擇用符號代數的方法，或是雙設法（或試位法）？為什麼？

參考文獻

Katz, V.J. (1993). ***A History of Mathematics—an Introduction*. New York: HarperCoollins College Publishers.**

比爾・柏林霍夫/佛南度・辜維亞著，洪萬生、英家銘暨 **HPM** 團對譯（**2008**），《溫柔數學史》，台北：博雅書屋。

黃清揚（**2008**），〈單設法及其演變〉，《**HPM** 通訊》第十一卷第一期。

李繼閔 **(1998).**《《九章算術》及其劉徽注研究》，台北：九章出版社。