第八卷 第二、三期合刊 目錄(2005年3月)

HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台師大數學系）
助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啓文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南師院附中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心)
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

數學歸納法專輯

數學歸納法專輯說明

台師大數學系助教 林倉億

在中、小學的數學教材中，大概沒有比數學歸納法更「弔詭」的了！例如，明明就是個道道地地的演繹法，卻要在名稱上冠上演繹法的「死對頭」—「歸納法」三個字！或者，明明看起來就只有證明 n＝1 成立，其他都是「假設」的，卻可以下結論說對於每一個自然數 n 都成立！再如，明明吃個幾大碗飯就快撐死了，卻可以利用數學歸納法「證得」不管吃幾粒飯都吃不飽！最後，明明是要讓學生認識數學歸納法，卻總有許多學生誤把各種解題技巧當作是數學歸納法的「重點」！

有鑑於此，本刊之編輯小組決定推出以高中教材中的數學歸納法為主題的專輯，從不同的面向、觀點切入，來探討數學歸納法及其歷史發展與教學，希望能對數學歸納法的教與學有所助益。本專輯共有九篇文章，分為四個部分。第一個部分由楊凱琳的〈數學歸納法是什麼玩意兒〉、蘇俊鴻的〈數學歸納法的分析〉及謝佳叡的〈「數學歸納法」教與學的認知與常見謬誤〉所組成，此部分除了對數學歸納法進行分析外，更從教與學的角度來探討數學歸納法。第二個部分是陳啓文與陳敏皓兩位現職高中教師的〈數學歸納法教學心得〉，他們提供了自己的教學策略與心得和大家分享。第三個部分是介紹數學歸納法的歷史發展，包括了蘇惠玉的〈數學歸納法的證明形式之完成〉、黃清揚的〈歷史上的「數學歸納法」：以阿爾-凱拉吉、阿爾-薩毛艾勒、本熱爾松、摩洛利克為例〉及筆者的〈叫誰第一名〉。最後則是蘇意雯的〈如何製作 HPM 學習工作單－以數學歸納法單元為例〉，該文介紹了在製作 HPM 學習工作單時，該涵蓋的面向與應注意的事項。

上述數學歸納法專輯的九篇文章，原訂是在本期中全部刊載，但文章彙整之後，發現遠遠超過本刊一期所能負載的篇幅，因此不得不將此專輯分為兩期刊載。本期先載第一、二部分，第三、四部分刊於下一期。此專輯內容之豐富，由此可見！請各位讀者細細品味！

數學歸納法是什麼玩意兒

中原大學師資培育中心 楊凱琳教授

一、數學歸納法不同於歸納法

數學歸納法在數學知識的領域中，是屬於基本原理的地位 (參考：夏興國，1999)。皮亞諾 (Peano, 1858~1932) 提出關於自然數性質的五個公理，其中第五個公理是：若屬於自然數的一個子集合包含 1，且一旦包含某數(如：n)，也包含其後繼元素(如：n+1)，則此集合爲所有自然數所成的集合。如果捨棄了這個公理，數學即少了一種驗證有關「對所有自然數都成立」的方法。

在高中介紹使用數學歸納法來證明一些對所有自然數都成立的敘述時，常用下列方式：

步驟 1、證明$n=1$ 時，敘述成立。

步驟 2、假設$n=k$時，敘述成立；證明$n=k+1$，敘述也成立。

由數學歸納法得證， n 為任意自然數時都成立

而且，老師們也會特別強調：要寫成上述兩個步驟，證明是我們真的要去做的部分；步驟 2 不可以拆成兩個部分，不然要扣分；最後記得寫上由數學歸納法故得證。

另一方面，歸納法是透過觀察有限例子，從中抽取共通性的一種推理方式。例如：一個數列的前五項是 2,4,8,16,32，請你從中找一個規則推出第n項的表示式。此第n項可以是 2^n，也可能是 $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+2^n$，有很多種可能。對照上述「數學歸納法」的原理與證明格式，不難看出歸納法和數學歸納法至少有兩點大不同：歸納法沒有基本原理所以推論的結果不是唯一也不保證是對的，歸納法的用途在於形成臆測而數學歸納法的用途在於檢驗臆測是對的。

二、數學歸納法是一種數學特有的推理方式

一般談到推理方式時，大致可分成三類：演繹 (deduction)、歸納 (induction) 和誘導 (abduction)。我先介紹一個故事 (引自大阪圭吉所著的《三狂人》，但故事情節有些改變或省略)，再來舉例說明三種推理方式。

有一家精神病院，裡頭只剩下三名中年男性患者。一個叫「咚咚」，因為他每天都用腳跟敲擊榻榻米；一個叫「歌姬」，因為他喜歡穿著女人的和服在眾人面前高歌；一個叫「受傷人」，雖然他沒有受傷但總是將自己從頭到臉用繃帶包起來。一天早上，護士發現三個病患不見了，而且發現穿著白袍的院長全身血淋淋地躺在地上，更慘不忍睹的是腦漿也被掏出。……警方在市區找到了「歌姬」，發現「咚

咚」的頭被火車輾過並死在鐵軌上。但是探員檢查「咚咚」的腳後跟後，便說這不是「咚咚」的屍體。……

在上述的故事中，探員用了哪些推理方式呢？從探員想要去觀察死者的腳後跟來說，這屬於誘導的推理方式；探員先臆測：該名死者可能是別人並不是咚咚，或是懷疑：這真的是咚咚嗎？這樣的臆測或是懷疑不是經由演繹或歸納推得，是一種建設性與創造性思考。這種推論方式不僅是人腦的特殊之處，也是至目前爲止電腦不能取代人腦的部分。當探員看到死者的腳後跟沒有凹陷，來推斷這名死者不是咚咚；這是基於「咚咚」的腳後跟一定有凹陷的理由，屬於演繹的推理方式。從探員推測歌姬可能又到市區的馬路上了，這屬於歸納的推理方式；因爲他依據歌姬經常跑到外面當眾隨興表演的資料，來設想這次可能也是跑到外面去了。

那麼數學歸納法本身，是基於哪些推理方式來成全它的有效性呢？演繹的推理方式，想必是呼聲最高的一種。也有許多參考資料指出數學歸納法的邏輯依據是：無限次具遞迴性的 modus ponens 推理。茲用 $P(n)$ 來表示待證明的敘述，

$P(1)$ 成立　　　　(根據數學歸納法的步驟 1)

且 $P(1) \rightarrow P(2)$　　　　(根據數學歸納法的步驟 2)

所以 $P(2)$ 成立

且 $P(2) \rightarrow P(3)$　　　　(根據數學歸納法的步驟 2)

所以 $P(3)$ 成立

且 $P(3) \rightarrow P(4)$　　　　(根據數學歸納法的步驟 2)

所以 $P(4)$ 成立

……

如果數學歸納法只依據邏輯推理，那麼，應該就有辦法請電腦來幫我們用此法證明，可是，事實上還做不到。這是因爲想要完成數學歸納法的步驟 2，並不見得那麼容易，有時候是需要誘導 (abduction) 的推理方式來洞察或頓悟所需的技巧。

三、對數學歸納法的理解

在日常生活中，我們通常都只是遇到有限個自然數就能處理的問題。既然如此，爲什麼還要學數學歸納法呢？Henkin (1961)曾明白表示：“….the true significance of mathematical induction does not lie in its importance for practical applications.　Rather I see it as a creation of man’s intellect which symbolizes his ability to transcend the confines of his environment.” (轉引自 Movshovitz-Hadar, 1993)。但是，筆者認爲這種理由並不足以說服高中生，使他們願意投入時間來克服「理解」此一方法的困難。爲了設想幫助學生克服此困難的教學方法，何謂對數學歸納法的理解，則是一個值得探討的問題。

談到理解數學歸納法，不少文章已指出，學生對該法的理解只限於表面儀式的操弄，缺乏對於概念的深入思考 (Fischbein & Engel, 1989; Movshovitz-Hadar, 1993)，也因此而產生諸如下列的問題或疑慮：(1) 如果 n 從 0 開始，此法適用嗎？(2) 多檢驗幾個 n 值，是否比只檢驗 n=1 更有保障？(3) 先假設要證明的敘述 P(n)在 n=k 時成立，這樣合理嗎？(4) 如果推得在 n=k+1 時的式子和敘述 P(k+1) 不合，表示此敘述 P(n) 是錯的嗎？我們不難看出其中 (1) 和 (2) 與學生對數學歸納法步驟 1 的理解有關，而 (3) 和 (4) 則是他們在數學歸納法步驟 2 中可能面臨的困惑。

如果把『能夠辨識數學歸納法的形式』與依照上述的兩個步驟證明學過的級數和公式的理解層次，標籤為「工具性理解」，[1]也就是，只知道『依樣畫葫蘆』的階段。那麼，什麼才是對該法的「關係性理解」－『不只是知其然，還知其所以然之故』的階段？筆者先主觀認定在能知道上述四個問題的答案，才是到達關係性理解。我們所以提出這兩種理解的用意，是想請教師們留意：如何從學習數學歸納法的過程中，幫助學生展現超越有限思考的數學能力。這種能力是每位高中生都容易習得的嗎？學生只習得工具性理解的數學歸納法之意義何在？另外，筆者也提出一個合理的假設：對數學歸納法達不到關係性理解的人，無法從事數學專業的研究。可是，在所有高中生從事數學研究的比例畢竟不到萬分之一，所以，期待每個高中生都要花時間，以測試自己是否能對數學歸納法達到關係性的理解層次，是否有此必要呢？

四、教數學歸納法不可不知的事

上述的假設，並不表示我們不用費心提升數學歸納法的教學能力。反而，它可以提醒我們再深入思考：究竟數學歸納法的教學目標是什麼？如果我們把數學當成一種人類展現嚴密推理的活動，那麼，讓每個人都有機會學一點理性思考的方法，便成了必要的教學目標之一了。然則，藉由數學歸納法可以傳遞哪些理性思考呢？筆者認為下列四個與數學證明相關的概念，是我們不可不知的事：

1、數學證明的格式不僅利於溝通也有助於思考

在數學歸納法中，以步驟 1 和 2 的方式呈現，可以讓閱讀者便於辨識出特定的證明方式，進而將思維切入此方式的推理活動。但是，如何超越特定證明方式的辨識並引動推理活動呢？此時，老師的提問與引導，就顯得非常重要。問問學生：n 可不可以從 0 開始？或是 n 可不可以是某個自然數以後的自然數？然後，再提出可以造成學生認知衝突的例子。如果只呈現格式而忽略了格式的內涵，就好比參加了祭孔大典，只看到儀式如何進行卻不知各項禮節所代表的意義，是一件捨本逐末的事。

2、數學證明以有效性為主、解釋性為輔

寫下或讀過一個證明之後，我們是否接受這個證明？這裡可以從兩種觀點來思考接受的含義，一種是意義上的接受，另一種則是邏輯上的接受。前者被稱為具有解釋性的證明，後者則是具備有效性的證明。例如：有些學生認為多檢驗幾個 n

值之 P(n) 是否為真，感覺上整個證明是更能保障 P(n)在所有自然數 n 都是對的。就有效性而言，端看步驟 2 用了哪些假設來推得 n=k+1 時 P(k+1)成立，在高中的教材裡，原則上都只需檢驗起始的 n 值等於 1 時 P(1) 成立即可。印此，我們建議在教學上，除了注意對證明有效性的判斷，也要讓學生有機會區辨解釋性與有效性的不同。

3、假設 p 推得 q 的意義不在乎 p 是否為真

即使能夠正確判斷整個證明過程是否有效的學生，也可能對於此證明究竟是證明了什麼仍然是一知半解。茲以 p→q 表示數學命題，即從前提 p 推得結論 q。在學生判斷對一個命題「p→q」的證明過程是正確的之後，如問他此一證明過程可以證明什麼是真的？(1) p 是真的 (2) q 是真的 (3) p→q 有效的，他或許會認為 (1)、(2)、(3) 都真或有效。所以，學生也可能對數學歸納法步驟 2 中假設 n=k 時 P(k) 成立產生疑惑，而對於步驟 2 是證明了什麼，抱持了一知半解的狀態。如果教師們能幫助學生建立這種假設性的推理概念，那麼，這應該對於他們往後在大學學習機率統計的假設檢定概念時，也具有正面的影響。

4、反駁不同於證明的思考方式

如果學生需要證明一個n從 2 開始是不成立的不等式時，他們在步驟 2 發現推得的結果和P(k+1)不同，是否表示P(n) 都是錯的？例如：用數學歸納法證明對所有的自然數n，5^n+1 是 3 的倍數時，我們發現在步驟 2 推得不是 3 的倍數，這樣的結果表示什麼？在數學上針對某個敘述時，一個反例就足以反駁此敘述。一般的高中生或許都已具有這樣的概念，但是，他們倒不一定瞭解什麼條件下構成一個反例，以及某個反例可以反駁什麼。[2]這或許和我們的相關課程主要都是以建構證明為核心，而較少正式探討尋找反例的教學活動有關。我們不妨在教數學證明時，也設計一些錯誤的命題讓學生有機會來『找碴』。

五、數學歸納法不是一個玩意兒

臆測：對數學歸納法達不到關係性理解，則 S 是無法從事數學的研究，對所有 S 屬於人都成立。

證明：

步驟 1. S 是 Peano 時，臆測成立。
步驟 2. 假設 S 是某個人時，臆測成立。

當 S 是另一個對數學歸納法達不到關係性理解的人，由於在上述的假設下臆測成立，

所以，S 是無法從事數學的研究。

基於數學歸納法，故得證！

各位看官，您同意我的臆測嗎？您同意我的證明嗎？無論您的看法如何，我猜您一定認同：數學歸納法可是不容易隨便玩玩的啊！

致謝：

感謝台灣師範大學數學系洪萬生教授、建國高中陳嘯虎老師和台灣師範大學數學系林倉億助教對於本文初稿的指正與建議。

註解：

1. 工具性 (instrumental) 理解和關係性 (relational) 理解的用語，取自 Skemp (1978) 所寫的文章 “Relational Understanding and Instrumental Understanding”。在此，筆者只是透過這個用語，點出「know how」(工具性理解的一種) 和「know why」(關係性理解的一種) 的差別。
2. 提供一個學生不瞭解反駁了或證明了什麼的例子 (引自 Movshovitz-Hadar, 1993)：

Is the following statement true or false?

$$\frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n}} \ ??$$

<u>Student　A</u>

（i）For n=1 the left side = $1/2$,

the right side = $1/\sqrt{2}$

Now , $2 > \sqrt{2} \ \rightarrow 1/2 < 1/\sqrt{2}$

Hence, the inequality holds.

（ii）Assume it hold for n=k, i.e.,

$$\frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2k} \le \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

We want to show that it holds

For n=k+1, namely, that

$$\frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)(2k+1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2k\times 2(k+1)} \le \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}$$

By our assumption：

$$\frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)(2k+1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2k\times 2(k+1)} \le \frac{1}{\sqrt{2k}} \times \frac{2k+1}{2(k+1)}$$

$$=\frac{\left[\sqrt{2k+1}\right]^2}{\sqrt{2k(2k+2)}\times\sqrt{2(k+1)}}$$

$$=\frac{\sqrt{4k^2+4k+1}}{\sqrt{4k^2+4k}\times\sqrt{2(k+1)}}>\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}$$

This contradicts the statement and therefore it is false.

參考資料

夏國興 (1999)，《數學歸納法縱橫談》，台北：九章出版社。

Fishbein, E. & Engel, I. (1989), "Psychological Difficulties in Understanding the Principle of Mathematical Induction", in Vergnaud, G. et als. (eds.), *Proceeding of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 276-282).

Movshovitz-Hadar, N. (1993), "Mathematical induction: A focus on the conceptual framework", *School Science and Mathematics* 93: 408-417.

Skemp, R. R. (1978), "Relational understanding and instrumental understanding", *Arithmetic Teacher* 26(3): 9-15.

數學歸納法的分析

台師大學數學系研究所博士生 蘇俊鴻

一、 前言

在高中的數學課程中，由於學生在數學歸納法的學習上出現極大的困難，[1]使得數學歸納法的教與學，一直是關注的課題，相關的論文也不在少數。例如學生『迷思概念』(misconceptions) 類型的探討；或是注意到數學歸納法的教學中，過於強調證明形式的儀式操弄，缺乏對於概念深入的探討，而導致學生對數學歸納法的理解多半只停留在一知半解，以及只對某些特定類型問題的證明 (例如：級數和公式) 才能上手。因此，教師本身對於數學歸納法具備怎樣的理解，必定會左右學生學習時所獲知的概念，或是影響對迷思概念的診斷與處理。本文的目的，是引介數學教育上對於這個主題的一些研究結果，希望能提供數學教師對於這個主題更多的理解。

一般說來，對於數學歸納法的分析大概有三個面向：(1) 數學面向的分析；(2) 行爲技能面向的分析；(3) 概念面向的分析。[2]以下，我們就針對這三個面向逐一說明。

二、 數學面向的分析

在數學面向的分析中，我們不難發現幾個學生常見的疑問，都和數學歸納法的數學原理有關。疑問之一：數學歸納法和歸納法有什麼差異呢？歸納法是我們用來觀察有限個例子所共有的性質時常使用的推理方法，由比較歸納的程序，我們便能提出假設。然而，這個假設的有效性，只能適用於這些我們所觀察的有限例子上。如何證明這個假設的有效性可以推廣到一般的情形呢？這時，就必須借助數學歸納法來幫忙，而數學歸納法本質上卻是邏輯演繹，關於這點，我們也可以在接下來的說明中看出。

疑問之二：數學歸納法的數學基礎是什麼？對於數學教師而言，了解它的數學基礎奠定在義大利數學家皮亞諾 (Peano, 1858-1932) 於 1889 年所提出的「皮亞諾公設」(Peano′s axioms) 之上，應該是基本的素養。皮亞諾從不加定義的『集合』、『自然數』、『後繼元素』和『屬於』等概念出發，給出了關於自然數的五條公設：

(1) 1 是一個自然數。

(2) 1 不是任何其他自然數的後繼元素。

(3) 每一個自然數 a 都有一個後繼元素。

(4) 如果 a 與 b 的後繼元素相等，則 a=b。

(5) 若一個由自然數所組成的集合 S 包含 1，並且當 S 包含某一自然數 a 時，它一定也含有 a 的後繼元素，則 S 就包含有全體自然數。

其中的公設 (5) 就是所謂的『數學歸納法原理』(the Principle of Mathematical Induction)。

但是，我們要如何向學生解釋呢？事實上，想要嚴密地回答這個問題，就高中階段所習得的數學內容是很難達成的，但我們借助自然數的『良序性』(the well ordering of the natural number) 與骨牌 (或是其他相似例子) 的類比，讓學生直觀地「核證」卻是可行。筆者認爲我們毋須迴避這個問題，雖然我們只能用類比的例子讓學生去感受，但這或許是學生學習後設思考的起點。

在高中課程內容中，數學歸納法原理常利用以下的兩步驟呈現：

步驟 1、證明 $n=1$ 時，敘述成立。 **(歸納起點，the basis of Induction)**

步驟 2、假設 $n=k$ 時，敘述成立； **(歸納假設，Induction hypothesis)**
證明 $n=k+1$，敘述也成立。 **(歸納步驟，Induction step)**

由數學歸納法得證， n 爲任意自然數時都成立

不知讀者是否想過：數學歸納法原理只能用這樣的形式來呈現嗎？或者是，爲什麼大家總是用這樣的形式來描述呢？在這樣的形式表達下，什麼重點是教學上必須強調的？

這種形式的優點，是我們可以看到數學歸納法原理的循環性 (circularity，或是有人稱爲無限次具遞迴性的 modus ponens 推理)，透過步驟 1 的確立與步驟 2 的遞推，被精準恆動地保持。但是，這卻也使得下列迷思概念產生：數學歸納法是個「假設所要證明的事情爲真，然後又證明它爲真」的方法；既然已經假設敘述成立 (歸納假設)，爲什麼又大費周章地用個複雜的形式結構來證明它成立呢？這個問題的關鍵，在於歸納假設的有效性只是侷限在整個步驟 2 之中，並沒有指涉原本所要證明之敘述的有效性。

上述數學歸納法原理兩步驟形式的完整呈現，正是教師在數學歸納法的教學上最強調的重點。不可否認的，教師如何賣力地再三說明與要求練習，學生的作答表現總還是有不足之處。這意味著想要在形式上構造出正確的數學歸納法證明，學生需要擁有什麼樣的能力？教師需要注意哪些能力的培養？或許對於數學歸納法在行爲技能面向上的分析，可以幫助我們解答此一困惑。

三、 行為技能面向的分析

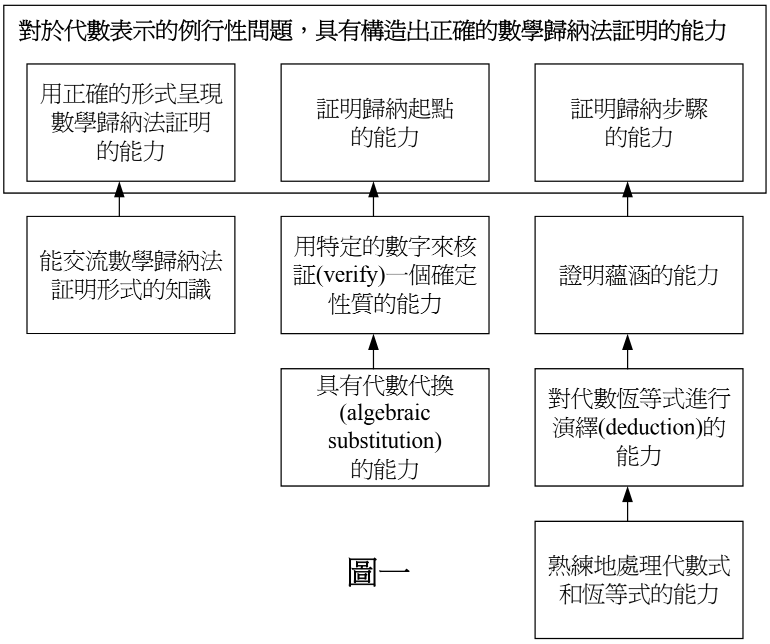
在這個面向上，我們想要回答下列的問題：若要構造出正確的數學歸納法證明，學生必須擁有什麼樣的技能 (skills)？當然回答這個問題前，我們得先設定好學生所要證明的數學問題的難度，這當然會影響學生作答的表現。這裏，我們將問題設定爲多數學生均能理解，並且能表示成代數式或是恆等式。常見的有級數和公式、遞迴數列、數論 (整除性問題) 以及幾何上的結論 (常表示成代數式)。[3]

由上節說明中可知，數學歸納法的形式中包含兩個步驟證明，Paul Ernest 認爲要構造出正確的數學歸納法證明，有三個必須達到的能力項目：(圖一，Ernest，1984)

(1) 證明歸納起點的能力；

(2) 證明歸納步驟的能力；

(3) 用正確形式呈現數學歸納法證明的能力。



圖一

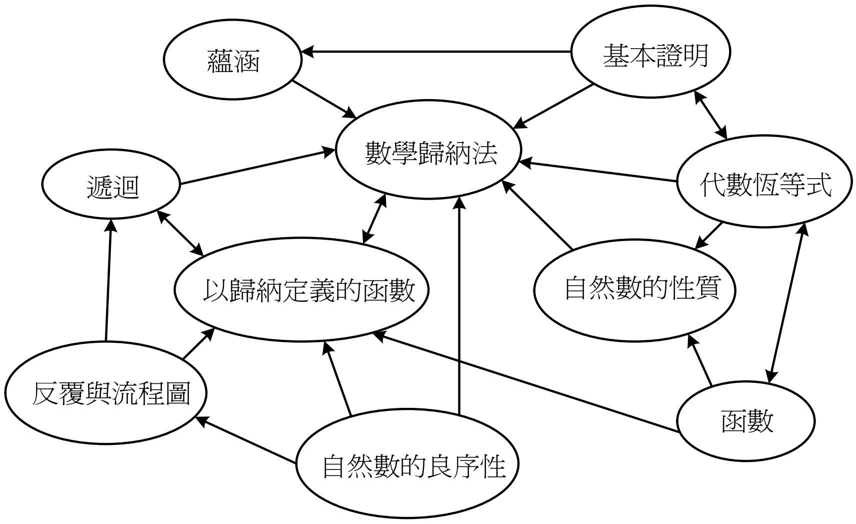
在每個能力項目之下，均包含有欲達到這個項目必須先具備的子項目。舉例來說，當學生想要寫出歸納步驟的證明，不僅要知道由歸納假設出發進行演繹，也要有對代數式 (或是恆等式) 進行演繹的能力才行。因此，教師在設計教學活動時，想要達到「能正確地呈現出數學歸納法證明的形式」的教學目標，便要掌握學生在那個能力項目的基礎是否已經建立，例題與練習題的選擇就顯得重要。

然而，我們如果只是建立起學生在數學歸納法的行為技能，由於特定類型的問題出現較多 (如級數和公式)，便會造成學生認為數學歸納法只能用來證明某些特定種類問題。目前已有不少研究指出，學生如此一來將會陷入儀式性的操弄，而無法更深入做概念性的理解。[4] 不過，行為技能面向的分析，顯然無法深入說明數學歸納法相關的證明理論基礎 (比如為何要採用二步驟的形式？各步驟間的關聯性為何？)、先備知識或概念，連帶地，也無法進一步幫助我們解說某些形式上看來正確、卻是錯誤證明的問題。[5]因此，我們對於數學歸納法進一步做概念面向的分析，的確有其必要性。

四、概念面向的分析

對於這個面向的研究，Paul Ernest 算是最早有系統從事研究，並且提出了一個概念網絡圖。(圖二，Ernest，1984) 在這個圖中，數學歸納法位處中心，相關概念環繞周圍；各個概念間有著單向或是雙向的關聯性。在上一節有關行為技能分析中所涉及到的概念，像是「基本證明」、「蘊涵」(指兩個敘述間的連結關係，通常都是源自基本証明)、及「代數恆等式」(包括代數上用法的普遍規約及運算律，以及「代數恆等式」的證明)，可以算是數學歸納法的相關概念。

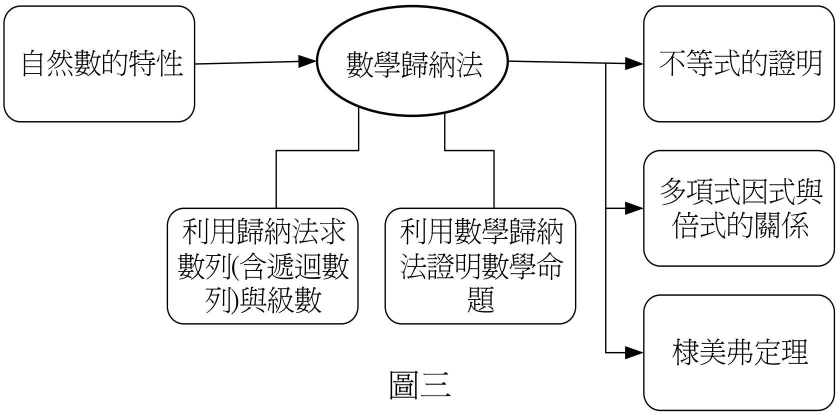
源自於代數恆等式的「自然數的性質」(以具有某些性質的自然數爲歸納範圍)以及與代數恆等式息息相關的「函數」,則可視爲數學歸納法的先備知識。事實上,自然數的某些性質若用單變數的形式表示時,就可以視爲某種特殊的函數,這類的函數就稱爲「以歸納定義的函數」。此外,與歸納定義的函數緊密相繫的概念,就是「遞迴」(這是數學歸納法的核心,遞推步驟及自然數性質得以一般化的關鍵);而「遞迴」的概念,則是建立在「反覆與流程圖」的概念上。反過來,「反覆與流程圖」也幫助「以歸納定義的函數」概念的發展。至於「反覆與流程圖」、「以歸納定義的函數」及「遞迴」等概念,則是源自於「自然數的良序性」,因此,「自然數的良序性」可說是數學歸納法的最主要概念。



圖二

在上述的概念面向分析中,Paul Ernest 特別強調有兩個概念叢集 (conceptual clusters) 是在行爲技能面向的分析上無法提及的:(1)「由自然數定義的性質」和「函數」;(2)「遞迴」和「自然數的良序性」。前者對於數學歸納法的證明非常重要,因爲數學歸納法證明要求的,正是對自然數的性質有所認識 (recognition)、理解 (understanding) 及運用 (use)。後者則提供了數學歸納法論證的基礎,數學歸納法的運作機制,正是奠基於自然數的良序性及連續的遞迴。

在概念網絡圖的分析下,的確讓吾人能有更多觀察思考數學歸納法的角度,像是點出「遞迴」的重要性。然而,這個網絡圖也有著讓人商榷的部份,例如,Ernest 對於概念間的關係的描述,是基於發生的順序來的 (誰源自誰)。在這樣的看法下,會讓吾人以爲「自然數的良序性」比數學歸納法更爲基本。事實上,這兩者是互爲等價的觀念。此外,對比現行高中課程在數學歸納法之主題-希望學生學會的具體概念(圖三,高中數學第一冊教師手冊,康熙版),Paul Ernest 所提的,主要是幫助教師能在教學上進行後設認知的反思,並非是教學上的題材。



圖三

五、結論

透過數學歸納法在數學面向、行為技能面向及概念面向等面向上的分析，我們希望數學教師們對於數學歸納法，能有更深入一層的理解。本文中除了讓讀者看到數學教育在相關研究上的成果外，也展現了教育研究工作細緻的一面，它對於我們平日所知的概念或是能力，總能仔細地分辨出其中的差異，提供我們更多思考的向度。因此，本文所論，是對教師們在實際教學活動中，提供更多的關照角度，以及更多有益於後設認知思考的資料。本文雖然並沒有提供實際教學活動的建議，但在各節中的分析，相信可以提供設計教學活動的基礎。透過適當安排的教學序列 (teaching sequence)，一定可以避免學生迷思概念與概念學習的困難的產生。這也是關於數學歸納法的教學研究中，愈來愈重要的課題。

註解：

1. 像是無法接受數學歸納法的證明形式；無法完整呈現數學歸納法的形式；在歸納步驟（由 $n=k$ 推到 $n=k+1$）上的證明出現的困難等等以及一些似是而非的證明(如註解 5)。

2. 參考 Paul Ernest 在 1984 年發表的 “Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion”。本文對數學歸納法三個面向的分析，是沿用 Paul Ernest 的說法。

3. Paul Ernest 將這一類的問題稱為代數表示的例行性問題 (routine problems expressed algebraically)。

4. Paul Ernest 也認為教學若是只達成這些行為技能目標的話，就只是讓學生對數學歸納法有著工具性的理解 (instrumental understanding)，這是他借用 Skemp 的術語。

5. 例如，我們可以推論：若要找出一堆硬幣中的一枚偽幣，無論硬幣的數量為何，最多用天平量四次，均可找出（量法任意，只要能找出即可）。用數學歸納法証明如下：
   步驟 1 當 $n=2$ 時，只要量一次，便可找出。
   步驟 2 假設 $n=k$ 時成立，也就是 k 枚硬幣中找出一枚偽幣，最多用天平量四次。當 $n=k+1$ 時，我們先從這 $k+1$ 枚隨意拿出 1 枚放在一旁，則剩下的 n 枚硬幣，依

照上述假設，我們最多量四次，便可找到僞幣。若找到僞幣，表示一開始，我們拿出的硬幣爲真。若找不到僞幣，表示我們一開始拿出的硬幣是僞幣，如此一來，我們也找到僞幣。

依照數學歸納法，我們可以推論：若要找出一堆硬幣中的一枚僞幣，無論硬幣的數量爲何，最多用天平量四次，均可找出（量法任意，只要能找出即可）。如何說明其中的錯誤呢？

參考文獻

徐道寧 (1997),《數學歸納法》，凡異出版社。

Ernest P. (1984), “Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion”, *Educational Studies in Mathematics*15: 173-189.

Movshovitz-Hadar, N. (1993), “Mathematical induction: A focus on the conceptual framework”, *School Science and Mathematics* 93: 408-417.

現在上數學歸法時，我都用禿頭故事當啟蒙例，我覺得學生非常有感覺...

禿頭故事如下（我自己加入了一些情境啦）
老師昨天經過體育館看到排隊排超長的，看不到盡頭在哪，
正在想發生了什麼事時，突然發現了二件奇怪的事

1. 排第一個的人是禿頭耶（這時學生會笑）
2. 每個禿頭後面也是禿頭耶 （這時學生會狂笑?但三秒後會有學生說那不就全部都禿頭??)（台南女中 李宜芬老師提供）

這個例子雖然不很嚴謹，但充分的表現出數學歸納法的精髓，
我覺得比課本什麼河內塔或骨牌好太多了

而且我每次都講得好像真的看到一樣，學生還會問 "哪裡的體育館?"
"真的全部都禿頭嗎？"

由台南女中李宜芬老師提供

「數學歸納法」常見的謬誤

台師大數學系助教 謝佳叡

■ 前言

本文主要是從大一學生和大四準教師的兩個實例引入，來考察學生對於數學歸納法的認知，進而探討教師在教學上需注意的事項，以及學生對於數學歸納法的常犯的錯誤。

數學歸納法這個名稱，在 Dedekind (1831-1916) 後也開始流行稱爲「完全歸納法（complete induction）」(Miller, 2001)，其相對比的名稱就是「不完全歸納法」。所謂「完全歸納法」，在自然科學和數學中各有不同的意涵。在自然科學中，指的透過觀察某類事物的「所有例子」，從而得到關於這類事物一般性的結論（田，1996），換言之，透過完全歸納所得到的結論具有確定性，但具體操作卻不見得可行。相對地，在數學上，完全歸納法卻有另一個意義，它是意指：「若(i) $n=1$ 時成立，且（ii）若 $n=1$、2、3、…、k 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立，則對每個自然數都成立」(Daintith & Nelson,1997)，此定義常被某些數學教材指稱爲「第二型的數學歸納法」（若只假設 $n=k$ 成立就稱第一型）。不難辨別，將「數學歸納法」稱爲「完全歸納法」並不完全適當，它既不是科學上指涉的完全歸納法（去觀察所有的自然數，來證明所有的自然數滿足所要的條件），即使在數學上，完全歸納法也僅是數學歸納法其中的一個類型。

雖然如此，「完全歸納法」這個名稱倒也讓數學歸納法中的「歸納」一詞有了一個解釋空間，觀察 $n=1$、2、3、…、k 多個情形再到 $n=k+1$ 的確會帶來一股「歸納感」，不像一般科學所稱的「歸納法」都必須先觀察一定數量的例子，再進行一般性質的抽離、臆測，而數學歸納法只驗證「$n=1$」或是「一個起始例子」。再者，「歸納法」所得的結果其內容會超越觀察值（或說是前提）本身的內容，但是數學歸納法這種證明方法並不會超越前提的內容，自然數的性質也無法經由這種方法得到擴充（頂多得到驗證），這些都顯示出數學歸納法本質上是一種演繹方法。當然，這個方法要稱做什麼名稱實無損於它本身的價值，爲何會稱爲數學「歸納」法，這個問題或許可以留給有興趣的人！

除了名稱經常造成誤解之外，這個方法本身的思維方式，也是許多人所不瞭解或難以接受的，因此，對此方法的疑問層出不窮。譬如在學校中，可以聽到學生提出如下的疑問：「知道 $n=k$ 和 $n=k+1$ 成立又如何，仍不知道後面幾項是否也成立？」、「爲何只證明兩個數就可以代表所有的數？」、「自然數有無限多個，無法知道確實性」、「k是假設成立的，就算$k+1$ 成立和全體有什麼關係？」、「假設 $n=k$ 成立，若 $n=k$ 真的不成立呢？」、「用假設來證明很沒有說服力，假設成立，畢竟還是假設！」、「如果第一隻烏鴉是黑的，如果第k隻烏鴉是黑的，第$k+1$ 隻烏鴉也是黑的，那也只能說三隻烏鴉是黑的」等之疑問（朱，1999）。我們也看過一些書上利用數學歸納法來證明：「每個人都是禿頭」、「人力無限大」、「永遠吃不飽」、「所有人都一樣高」等荒謬的命題。

■ 一個例子

這是發生在數學系大一「微積分」課程某個學生的一個例子，雖僅爲一特例，倒也提供許多思考之空間。題目是這樣的：

「設 M 爲正整數，試證：數列 $a_n = \frac{M^n}{n!}$ 在 $n \ge M$ 時遞減。」（Let M be a positive integer. Show that $a_n = \frac{M^n}{n!}$ decreases for $n \ge M$.）（Salas, Hille & Etgen, 2003）

這個學生的證明方式如下：

> $n \ge M$ ，且 M 爲正整數，
>
> （i）在 $n = 2$ 時，$a_2 = \frac{M^2}{2!} = \frac{M^2}{2}$ ，　　$a_3 = \frac{M^3}{3!} = \frac{M^2}{2} \times \frac{M}{3}$
>
> 因爲 $M \le n = 2$ ，所以 $a_2 > a_3$ 成立。
>
> （ii）若 $n = k$ 時，使得 $a_k = \frac{M^k}{k!} > a_{k+1} = \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}$ 成立，(其中 $M \le k$)
>
> 則 $n = k+1 \Rightarrow a_{k+1} = \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+2} > \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{M}{k+2} = \frac{M^{k+2}}{(k+2)!} = a_{k+2}$
>
> (因爲 $M \le k < k+2$)
>
> 由數學歸納法可知，對於實數 n ，正整數 M，（ $n \ge M$ ），$a_n = \frac{M^n}{n!}$ 爲遞減數列，得證。

這一題在證明上無需用到數學歸納法便可證明，只要說明：在 $n \ge M$ 時，$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{M^n} = \frac{M}{n+1} < 1$ ，就可證得這個數列在 $n \ge M$ 時遞減。這位同學卻選擇了使用數學歸納法。而當學生拿到批改爲錯後的作業，很不解的跑來問我錯在哪裡？（如是各位，你們會如何答？）當下要完整回答他的問題並不容易，因爲他的作法裡頭涉及到的概念太多了，但撇開其他部分不管，就數學歸納法的使用以及概念，至少就有幾個迷思：（一）使用數學歸納法的時機；（二）爲何他從 $n = 2$ 開始？（三）他所指的「成立」到底是指什麼成立？以及（四）從 $n=k$ 成立，到 $n=k+1$ 成立時，兩者之間根本沒有遞推的關係，（五）數學歸納法怎會用在證明「對於實數 n 」？

雖然腦中閃過了一大堆錯的理由，一時之間竟挑不到「關鍵點」(key point) 告訴他，只得敷衍似的回答「這一題不用數學歸納法，而且你的數學歸納法也用錯了！」他點點頭，滿臉疑惑的離開了，我卻滿懷愧疚，因爲我並沒有解決他的問題。而四年後，他很有可能成爲教室中教學生數學歸納法的老師。

在重新檢閱此題時，發現有許多的問題是可以進一步思考的。姑且不論本題是否適合用數學歸納法證明，從題目的形式來看，正整數、數列、等式，以及從某一項之後如何如何等等這些字詞，的確經常在使用數學歸納法的題目中出現，因而可能讓這位學生將本題與數學歸納法產生了的連結，並啓動數學歸納法的「程序性套裝思維」進行證明（謝，2001）。然而，這一題真地不能用數學歸納法證明嗎？仔細思考後，由於 $n \ge M$ 恰是此數列遞減的「充分且必要」條件，因此只要從 $n = M$ 開始，稍加設計的確可利用數學歸納法加

以證明（留給讀者自行證明）。只是，這位同學選擇了使用數學歸納法，但這卻不是他在本題所犯的最大的錯誤（比起來，他將 M 在定數與變數之間任意切換，以及將 $n \geq M$ 視爲定設條件可能還更爲嚴重），單就數學歸納法的使用而言，也明顯的忽略了幾個應注意的要素！

■ 一個教學活動

在本系固定每週四節的「數學教學實習」課堂中，筆者參與了一位大四的準教師進行「數學歸納法」單元的教學演示，由其他同修該課程的同學充當高一學生。這位準教師一開始引進的活動，是操作「河內塔」--一個經常在此單元教學被引用的活動。這位準教師還精心製作了幾組河內塔模型，讓學生可以實際動手操作。

一開始，他敘述一個經過包裝的古老故事。故事中提到了六十四個由大至小的金盤，盤中有孔，並放置在寶石製成的針上。這些金盤可以根據底下三個規則移動，目標是將金盤由其中一根針移到另一根針上：

1. 一次只能移動一個盤子。
2. 大盤子永遠不能放在小盤子上。
3. 這一疊盤子可以藉由另外的一個外加的暫時位置從某個位置移到另外一個位置。

（在此暫且不去考慮這三個規則所引發的邏輯問題，例如：規則 1 和規則 3 是不相容的，以及如果規則 3 成立，哪還玩什麼？但我們不難看出，這位準教師設計奇怪的規則 3 是爲接下來要教的「數學歸納法」所鋪設的。）

首先，他先請同學示範一個和兩個圓盤。接著，讓同學分組操作三個及四個圓盤的情形，並分別請同學上台示範。在示範四個圓盤時，其中一個同學利用剛剛已經做過的三個圓盤可以搬完，而把三個當成一個單位一起先移動，再移第四個最大的，最後在一起移動那三個，完成任務！

最後，老師讓同學試著去猜猜看當圓盤有 64 個時，可否搬完？在同學討論結束後，老師開始進行如下的講解：當三個可以搬時，用剛剛那同學的作法四個也就可以搬；同樣的，假設四個可以搬，那麼五個也可以搬，一直延續下去，64 個也就可以搬完！（此時，有同學提出反駁：如果可以假設，那就直接假設 64 個可以搬就好，何必一個一個推？準老師回答數學必須要經由邏輯推導才行！）接著，這位準老師以此爲引子，開始進行「何謂數學歸納法？」的教學，並直接利用「$1^3+2^3+3^3+...+n^3=?$」的例題，先藉由觀察，歸納出級數的和，再利用數學歸納法加以證明。在接下來的教學中，這位準老師將教學的重點放在各類級數恆等式的觀察及歸納，以及如何從 $n=k$ 導到 $n=k+1$ 的計算上。

■ 教學的迷思

不可否認地，這位準教師的教學案例，不是一個成熟且完善的教學活動。在某種程度上，也反映出這位準教師心中關於「數學歸納法」的數學知識（MK）和教學內容知識（PCK）。這個教學活動結束後，在指導教授的引導下，同學們進行了激烈的討論，也提出了豐富的批判與建議。藉著討論的過程，筆者也有機會窺探其他同學心中對「數學歸納

法」的想法。

對這位準教師而言，整個數學歸納法的概念關鍵點，其實是在那位上台演示的學生上。但是，整堂課中這位準教師卻未將之強調出來。怎麼說呢？大多數的同學在操作四個圓盤時是獨立的，也就是說，在完成四個圓盤時並非透過三個圓盤能完成來協助，而是重新開始。更重要的是，對這位準教師缺了將這個想法轉成一般的情形，也就是當「某個」圓盤數可完成時，再圓盤多一個時是可以藉由前一個可完成來協助的，這也是初任教師最容易忽略的地方。

在教學活動的討論中，這些準教師們認爲數學歸納法的教學上，最困難的地方在於「如何從假設$n=k$成立，導出$n=k+1$成立」；而他們認爲學生學習數學歸納法最困難的地方，也在「如何從$n=k$成立，導出$n=k+1$成立。」彷彿整個數學歸納法的精神就在這個地方。不可否認地，高中生實際所接觸到的數學歸納法，其證明過程以及書寫中，「從$n=k$成立，導出$n=k+1$成立」的確是整個證明最費力之處，但並不表示數學歸納法的「概念」最困難的地方在這裡，相對的，這只是一個「技巧」(skill)」問題。如果將數學歸納法的粗分成下列幾個部分：

如果　(i) $n=1$ 成立；　（此僅爲一代表，有時不一定從 $n=1$ 開始）

以及　(ii)假設 $n=k$ 成立，可導出 $n=k+1$ 也成立。

那麼　n 爲任意自然數時都成立。

則會發現，在教學上至少必須注意五個問題（當然，實際要注意的問題更多）：
（一）爲何需要驗證（i）$n=1$ 成立？
（二）爲何要有（ii）這一項？假設 $n=k$ 成立導出 $n=k+1$ 也成立背後的意義是什麼？
（三）怎麼從 $n=k$ 成立，推導出 $n=k+1$ 也成立？
（四）爲何（i）（ii）成立，可保證 n 爲任意自然數時都成立？且缺一不可？
（五）怎麼樣的情境適合用數學歸納法來證明？

Avital & Libeskind (1978) 指出學生在使用數學歸納法證明時，會出現概念上、數學上，以及技術上的困難。所謂概念上的困難，主要來自這個方法本身的邏輯推理，例如學生提出：「我們又不知道假設的 $n=k$ 是否真的成立，怎可用它來建立 $n=k+1$ 成立？」、「爲何一下子從 $n=1$ 成立跳到 $n=k$ 成立？又爲何這樣就可以說全部自然數成立？」，均屬此類；數學上的困難，是指學生的困惑不在這個方法的概念上，而在推論上的數學問題，比如先證明了 $n=1$ 成立，但在 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推論過程中，卻又要求 k 必須大於 1。這經常發生在待證命題成立之起始例子不是 1 時。一個好的例子就是「$n^2<2^n$」，這個式子在 $n=1$ 以及 ≥ 5 的自然數是對的，但在 $n=2$、3、4 是錯的！因此，若在證明時，證明了 $n=1$ 成立，卻沒留意到 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推論過程中，必須要求 k 大於 2，將會認爲明明已具備所有數學歸納法的要件，爲何不是所有自然數都對？而技術上的困難，指的是學生對不同

類型的題目，從 $n=k$ 到 $n=k+1$ 之推論過程中，所遇到的技巧及代數操作上的困難。

我們不難辨別，問題（三）是屬於上述所說技術上的問題，其所需要的能力較偏重於代數計算能力、數學符號使用及演繹能力，這個跟其他幾項需偏重概念理解、演繹推理、建立數學結構等能力是不同的。因此，在教學上，我們必須釐清我們想要學生學會的到底是什麼？

根據前言中曾提及國內研究關於學生數學歸納法的學習困惑，我們不難辨別大都屬於概念上的迷思（當然，這並不表示他們在技術上沒問題！）；同樣地，Ernest (1984) 也指出學生在學習數學歸納法時會有下列六個迷思，包括：（1）對「歸納法」一詞的混淆、（2）對「用假設」來證明的存疑、（3）對量詞（quantifiers）或變數角色的混淆（一下子 $n=1$，一下子又 $n=k$、$n=k+1$，n 是什麼？k 又是什麼？）、（4）認爲數學歸納法的某個要素不是真的必要，常見如認爲 $n=1$ 不重要、（5）誤認爲數學歸納法僅能特定用在有限級數和，以及（6）懷疑這麼複雜且看似武斷的原理竟然可以用。這些都屬於概念上的迷思，也是教師教學上必須克服的。然而，準老師們最關心的，且認爲學習最困難的地方，卻是在「如何從 $n=k$ 成立，推出 $n=k+1$ 也成立」的技術性操作，就連學生自己也認爲這是最困難的地方！

問題到底出在哪？如果我們希望學生學會的，是數學歸納法的概念及數學結構，那麼，爲何要出現過於複雜且困難的例子，而讓學生在技術性的操作上到處碰壁？如果我們要學生熟練的代數符號技術性的操作能力，那又何必挑數學歸納法這個概念困難的單元？如果我們要學生兩者都兼顧，那當然會有「學生只會機械式的操作」、「學習時數太少」、「太難了，學生只模仿格式，不理解結構」等等的抱怨產生。

另一方面，我們不禁也要問：教師們又真地完全理解數學歸納法，以及其教學上的問題？

■ 學生常犯的幾個錯誤

在《數學歸納法縱橫談》（夏，1999）一書中，作者具體地提出了三個初學數學歸納法常見的錯誤，這些錯誤也包含在 Avital & Libeskind 和 Ernest 所提的幾個學習者的迷思概念內。

第一個錯誤稱爲「忽略奠基的必要」，也就是忽略了 $n=1$ 需要成立。例如：「試證：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+1$」，這個結論當然是荒謬的，但如果不驗證 $n=1$ 的情形，僅假設 $n=k$ 成立，是可以導出 $n=k+1$ 也成立的。更簡單的例子是證明「$2n+1$」是偶數。

第二種錯誤稱爲「忽略歸納遞推的必要性」，就是僅證明有限多項成立，未證明一般項之結論是否成立，例如：「試證：當 n 爲任意自然數時，$n^2+n+72491$ 爲質數。」如果你有耐心試，當 $n=1,2,\ldots,11000$ 都是對的，但事實上，這個結論也是錯的（$n=72490$ 就不是），特例驗證再多，也不能代替一般證明。

第三種錯誤驗稱爲「忽略歸納遞推與奠基的協同配合」，也就是證明了 $n=1$ 成立，也

證明了 $n=k$ 成立可推到 $n=k+1$ 成立，但兩者之間卻不相配合（即此 Avital & Libeskind 所稱「數學上」的困難類型之一）。這種錯誤本身並不容易察覺，甚至明知有錯誤也一時難以看出。舉一個例子：

試證:對一切自然數 n，不等式 $(1+2+3+...+n)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})\geq n^2+n-1$ 成立。

證明：當 $n=1$，不等式兩邊都 $=1$，原式成立。

設 $n=k$ 時原式成立，即 $(1+2+3+...+k)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k})\geq k^2+k-1$ 成立，則

當 $n=k+1$ 時，

$$[1+2+3+...+k+(k+1)](1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{k}+\tfrac{1}{k+1})$$

$$=(1+2+3+...+k)(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{k})+\tfrac{1}{k+1}(1+2+3+...+k)+(k+1)\underline{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{k})}+1$$

$$\geq(k^2+k-1)+\tfrac{1}{k+1}\cdot\tfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)\underline{(1+\tfrac{1}{2})}+1$$

$$=k^2+3k+\tfrac{3}{2}=(k+1)^2+(k+1)-\tfrac{1}{2}$$

$$>(k+1)^2+(k+1)-1$$

這說明，$n=k+1$ 時不等式成立。

根據數學歸納法，當 n 是任意自然數時，原不等式成立。

但這個命題卻是錯的，因爲在 $n=2$ 時，不等式並不成立。怪哉！這個證明中數學歸納法的步驟明明都具備了，爲什麼會這樣呢？難道真有 $n=1$、k、$k+1$ 對，但 $n=2$ 卻錯的情形？當然不是！原因就在，畫底線的部分是推導過程中關鍵的步驟，但這個步驟中，k 是不能等於 1 的，也就是在從 $n=k$ 推到 $n=k+1$ 時，必須假定 k 要大於 1，此與 $n=1$ 是不配合的。這種類型的謬證，也經常出現在大學數學系的課程中，以用來訓練學生找出其中的錯誤點，如「證明：若任 n 個人中，有一個人是近視，則此 n 個人皆爲近視」或「證明：所有的自然數都相等」，都是利用此一謬點。

儘管該書十分結構化的將錯誤分成這三個類別，筆者卻認爲這三種錯誤不是國內學生經常表現出來的錯誤類型，更貼切的說，這不是學生經常「有機會」犯錯的類型。一來國內的數學課程環境中（包含練習或測驗），不會讓學生去「證明一個錯誤的命題，而學生還用錯誤的數學歸納法證明出命題是對的」（除非設計成一個勘誤題）；再者，以第一個錯誤類型爲例，就算學生真地認爲驗證 $n=1$ 不重要，在我們的「數學寫作」訓練之下，也經常有能力寫得出來。

暫且不管技術性的計算錯誤，在學生的答題上確實還能看得到其他類型的錯誤，如：（一）僅得數學歸納法之「法貌」，未得其「法髓」。這種拿起框架就硬套的例子，比比皆是；（二）不知適用時機，用於不需（當）用之處，如本文第二節所舉之例子。各位有興趣，不妨可以考考學生：「試證：$\forall n\geq 2$，$(n+1)^2\geq 2n+5$」（可不先告知 n 是否爲正整數）；（三）明明知道可以用數學歸納法，卻完全不知如何下手，尤其遇到一些非數列型的題目；（四）$n=1$ 時帶入原式，卻只有一部分成立所產生的邏輯混淆，此最多發生在不等式的時

候。如證明「若n為自然數，則$2^n \ge 2n$。」學生帶入$n=1$，卻發現兩邊是相等的，這樣到底原式成立還是不成立？（五）「知道原理」和「實際使用」是不一致的，明知數學歸納法需要哪些要素，實際用到解題時，卻又東漏西漏。還有許許多多的例子，相信有經驗的老師皆可信手拈來，我們就不在此班門弄斧了。

最後，還是參考《數學歸納法縱橫談》一書，我們在此提供兩個更為鮮明的錯誤類型。

錯誤類型四：「假設 $n=k$ 成立，但在證明 $n=k+1$ 成立時，卻未用到 $n=k$ 成立的式子或是兩者之間根本沒有遞推的關係」。這算是錯誤類型二的變形，例如：證明：「$0.\overline{9}<1$」，若證法如下：

設若n代表小數點後 9 的個數
當$n=1$時，$0.9<1$
設$n=k$成立，即$0.99...9<1$（k 個 9）
則$n=k+1$時，$0.99...99<1$　（k+1 個 9）
由數學歸納法，n為任意自然數都成立，故$0.\overline{9}<1$

乍看之下，數學歸納法的要素都具備了，但卻忽略了「$n=k$」和「$n=k+1$」之間並無遞推關係。當然了，此題也牽涉到極限問題，那就更複雜了。又如本文第二節所舉之例子，以及在「河內塔」教學上準老師也經常忽略了這個問題。

更多這種類型的子類，是學生明知要從 $n=k$ 推出 $n=k+1$，卻怎麼湊也湊不出來，乾脆來個魚目混珠，前後該有的式子寫一寫，中間就故意製造一些煙霧，反正這類型的題目式子都十分複雜，說不定老師一時不察就給矇混過去了，遇到這類學生真是哭笑不得。

錯誤類型五：「將數學歸納法用在生活上的例子」。大概很少數學家會願意承認數學方法不適用在日常生活上，但一牽涉到「人」的感覺，有些數學方法就變調了。最常見的就是「最後一根稻草」(the last straw) 問題（謝，2003)，例如：試證「每個人都是禿頭」、「人力無限大」、「永遠吃不飽」，都是想藉由人的感覺，將 $n=k$「偷渡」到 $n=k+1$ 上，如：「只有 1 根頭髮當然是禿頭，假設有 k 根頭髮是禿頭，那多加 1 根仍是禿頭（你能說有錯嗎？），因此根據數學歸納法，每個人都是禿頭」；又如「飢餓時吃 1 粒飯不會飽，假設吃 k 粒飯不會飽，那多吃 1 粒飯仍不會飽，根據數學歸納法，只要吃的是自然數粒飯就吃不飽，因此，人永遠吃不飽」。你相信嗎？

■ 教學上的反思

「數學歸納法」本身概念之難、應用範圍之廣、題目型態之多樣、要求的先備知識之豐富，都使得它在高中數學課程中，不是一個「教師容易教」與「學生容易學」的單元。再加上許多老師反映，高中數學課中並沒有給予教師足夠的時間來好好的教授這個單元（朱，1999），教師往往在趕進度的壓力下，在學生尚未確實掌握這個方法的精神時，就必須提供複雜且多樣的題目供學生練習（不得不如此，因為考試就會考這麼難的），學生

在囫圇吞棗地學習情形下，導致學習只流於「格式的套用」，而教師也只能對這個情形表示無奈。對於學生在數學歸納法學習上所犯的迷思，教師也無暇顧及。

然而，這並不表示我們對改善這個現象無能爲力。儘管數學歸納法這個單元教學時數是這麼的有限，教師們只要有共識地去釐清幾個問題：我們到底需要在這個單元教給學生什麼？要學會這個單元，學生需要具備什麼樣的能力？而我們的學生在學習這個單元時，是否已經具備了這些能力？是否掌握到學生經常犯錯的地方？是否熟悉解決這些錯誤的方法？以及該出現什麼樣的題目來讓學生練習及考試？等，相信，對於教學的成效會有幫助的。而這些問題的相關研究，雖稱不上多如牛毛，倒也非十分罕見。加上資訊發達，如教師們能共同合作，建立教師教學溝通管道，集思廣益，相信這些問題終能找到解決方法。

最後，再次提醒自己，對於數學歸納法的認知，我們是否已正確無誤？

參考文獻：

Daintith, J & Nelson, R.D.（1997）, 《牛頓數學辭典（The penguin dictionary of mathematics）》，余文卿、謝暉光譯，台北市：牛頓出版社

田運 (1996)，《思維辭典》，上海市：浙江教育出版社出版

朱綺鴻 (1999)，《高中師生對數學歸納法瞭解的情況與教學因應之研究》，八十七學年度博士論文，國立台灣師大學科學教育研究所

夏國興 (1999)，《數學歸納法縱橫談》，台北：九章出版社。

謝佳叡 (2001)，《國中生配方法學習歷程中之數學思維研究》，九十一學年度碩士論文，國立台灣師大學數學系。

謝佳叡 (2003)，〈數學雜談--從數學歸納法談起〉，《HPM 通訊》第六卷第八、九期。

Avital,S. & Libeskind, S.(1978), “Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues”, *Educational Studies in Mathematics* 9: 429-438.

Ernest, P. (1984), “Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion”, *Educational Studies in Mathematics* 15: 173-189.

Miller, J. (2001), “Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics (M)”, http://members.aol.com/jeff570/mathword.html.

數學歸納法的教學心得

中山女高 陳啟文老師

在「數學歸納法」的教學上，源自古印度神廟中搬動 64 個大小圓環的河內塔(Tower of Hanoi) 問題，算是最好的教學素材。從 1 個環、2 個環、3 個環的操作，可以很明確的讓學生了解到 $k+1$ 個圓環是之所以能夠完成，是建立在 k 個圓環能夠完成的基礎上，如果對照歷史上的一些典故，例如，費馬猜想對任何自然數 n，式子 $2^{2^n}+1$ 的值都是質數，結果在 $n=5$ 時，$2^{2^n}+1=641\times 6700417$ 卻是合數，或是 $n=1$，2，3，…，15 的時候，雖然 n^2+n+17 的值都是質數，而在 $n=16$ 時， $n^2+n+17=16^2+16+7=17^2$ 卻不成立，相信在這樣的比較下，應該更能夠強調一個涉及自然數的命題，如果無法從 $n=k$ 成立的條件下，去推得 $n=k+1$ 也成立，那麼僅靠有限個的猜測，恐怕都要畫上問號。

用「骨牌效應」來表達「數學歸納法」的內涵十分貼切，所以，它常是老師們的最愛。在完成「河內塔」活動後，筆者都會要求學生觀察兩種不同排列的骨牌 (如下圖)，希望他們能用自己的語言想辦法「說服」老師「相信」從某一個骨牌開始倒下後，圖中「…」代表後續的骨牌也會跟著相繼倒下。透過適切地的引導，學生的描述都會集中於前一塊和後一塊的微妙關係，最後，大家的焦點會放在「骨牌的長寬高」、「骨牌的密度」，並深信「第 k 塊與第 $k+1$ 塊的間隔大小」是影響後續骨牌相繼倒下的重要因素。不管如何，筆者想要把學生的話題引到 $n=k$ 與 $n=k+1$ 的目的就達到了。

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 …

1 2 3 4 5   6 7 8 9 10 11 …

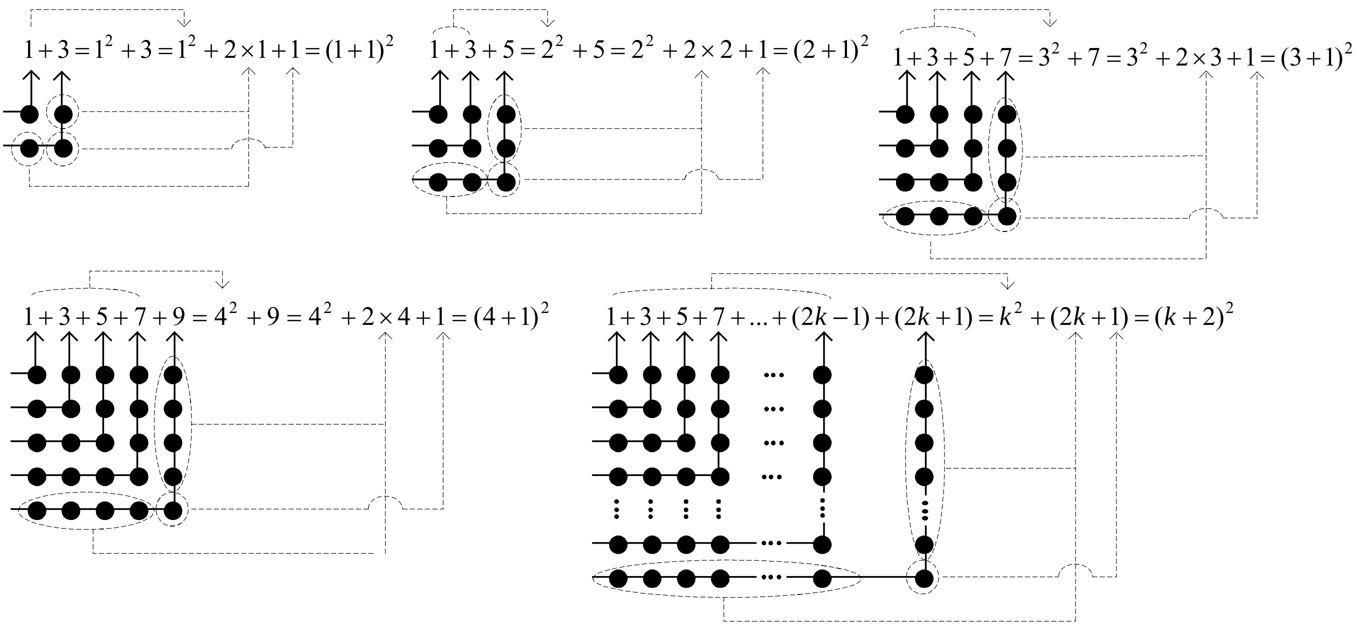
整體的教學中，要求學生去驗證自然數 n 從多少開始時，命題的敘述方為真確，較為容易，但要學生建構並相信「數學歸納法」中，從 $n=k$ 成立，推得 $n=k+1$ 的必要性就頗為棘手！因此，為了避免過於純代數符號的操作，筆者便選擇較能表現由 $n=k$ 來推得 $n=k+1$ 的例題，如：$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ 以及 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，輔以具體的圖形變化 (如下圖) 與學生討論。

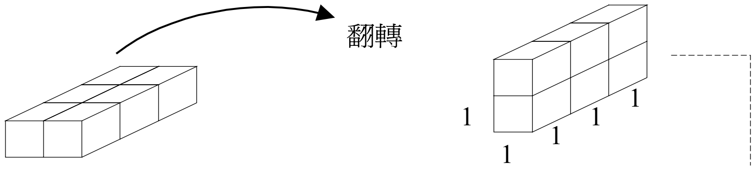
一般而言，帶領學生學習如何從 $n=k$ 成立，推得 $n=k+1$ 也成立的工作固然重要，但鼓勵學生主動觀察、歸納、找到結論，再利用「數學歸納法」來證明的活動亦不能忽略。如果我們能夠提出大部分學生能力足以勝任的問題，讓學生有「發現」的樂趣，相信教學者會更滿意自己的角色扮演。只是目前教科書在切入這個單元時，大都把型如 $f(n)=5^{n+1}+6^{2n-1}$ 的函數，要求學生找到 P，並證明對所有自然數 n， $P \mid f(n)$ 恆成立，當成教學實例。可惜，本例不夠直觀，很難引起初學者的共鳴。根據筆者的經驗，型如『$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ 的總和公式為何？』相當適合在課堂上與學生討論，與學生一起寫出

下面幾個式子，並提示他們觀察「1，2，3^2」、「1，2，3，6^2」、「1，2，3，4，10^2 」…的規律，尋找與證明公式並不難，而且十分有成就感！

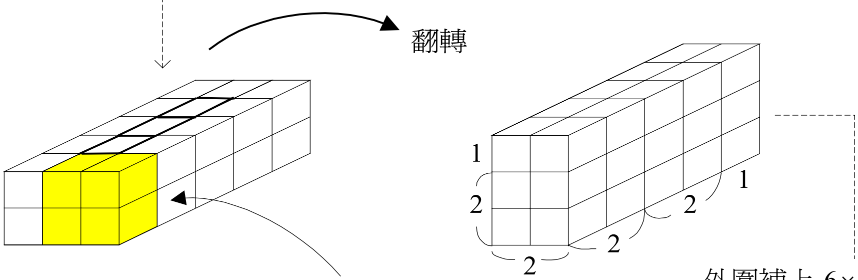
$$1^3=1$$
$$1^3+2^3=9=3^2$$
$$1^3+2^3+3^3=36=6^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$$
$$\ldots$$

如果直接要學生用數學歸納法證明$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$成立，便錯失了一次與學生互動的機會。

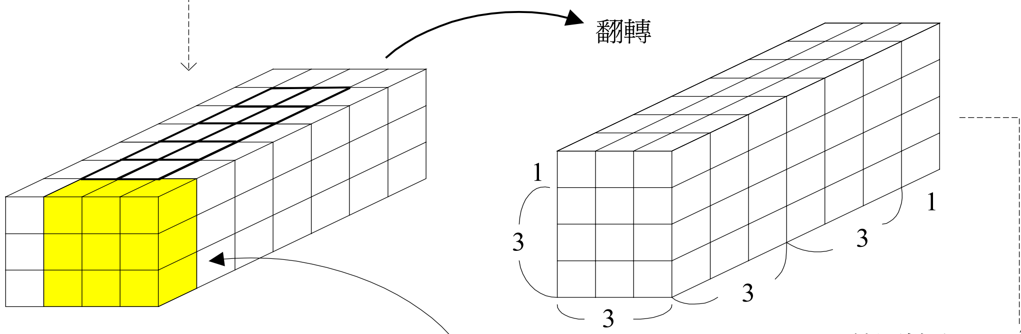




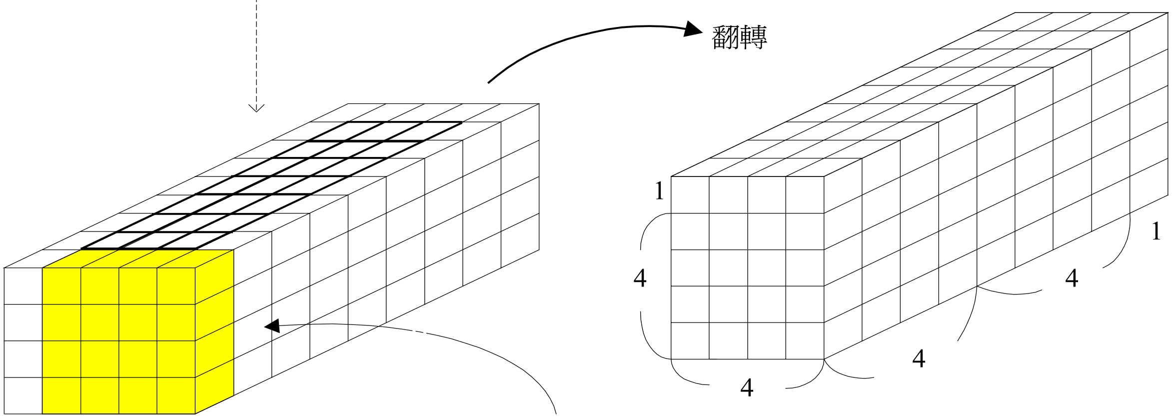
$$6\times(1^2)=(1)(1+1)(2\times 1+1)$$



$$6\times(1^2+2^2)=(2)(2+1)(2\times 2+1)$$



$$6\times(1^2+2^2+3^2)=(3)(3+1)(2\times 3+1)$$



$$6\times(1^2+2^2+3^2+4^2)=(4)(4+1)(2\times 4+1)$$

…

$$6\times(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2)=(n)(n+1)(2n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

數學歸納法教學心得

蘭陽女中 陳敏晧老師

談論數學歸納法 (mathematical induction)，就必須提及義大利數學家皮亞諾 (Giuseppe Peano, 1858-1932) 的五個公設。他總結了自然數的有關性質，提出五條公理，後人稱之爲「自然數的皮亞諾公理」，其內容如下：

1. 1 是一個自然數。
2. 1 不是任何其他自然數的後繼數。[1]
3. 每一個自然數a都有一個後繼數。
4. 如果a與b的後繼數相等，則a與b亦相等。
5. 若一個由自然數組成的集合s包含有 1，又若當s包含有某一數a時，它一定也含有a的後繼數，則s就包含有全體自然數。

上述第 5 條即所謂的『數學歸納法的原理』，也就是目前中學生所熟悉的解題模式 (problem-solving module) 之依據，[2]其步驟如下：

1. 證明當 n 取第一個元素 n_0 時（起始元素)，原式成立。

2.1 假設 $n=k$ （$k\ge n_0$）時（中繼元素)，原式成立。

2.2 利用 2.1 證明 $n=k+1$ 時（後繼元素），原式成立。[3]

這種想法是利用遞迴 (recursion) 的方式，從有限步驟推得一般化的結論，也就是能將有限項問題推廣至無窮多項的作法。這通常是一般學生解數學歸納法的三部曲，而在教學過程中，學生最常問的問題是：「真的需要三個嗎？缺一個可以嗎？」通常，我會舉反例說明，以加強她們對於『數學歸納法』的概念瞭解。

・反例一：**僅提供步驟 1 及 2.1**

這種例子以數學史上曾發生過爲佳，這樣對學生而言是更具有說服力的，而且也較爲貼近。例如：著名的費馬（Pierre de Fermat，1601-1665）猜想：「$f(n)=2^{2^n}+1$是否爲質數？」費馬曾試過前幾項，發現 $n=0,1,2,3,4$ 時，所得到的都是質數，可是，後來尤拉 (Leonard Euler，1707--1783) 計算 $n=5$ 時，得到 $f(5)=2^{2^5}+1=641\times 6700417$ 並不是質數，而導致 $f(n)=2^{2^n}+1$ 爲質數的猜想不成立。類似的情形，尤拉曾舉過一例，即「$\forall n\in N, f(n)=n^2+n+41$的值是否爲質數？」當 $n=1,2,3,......,39$ 確實都是質數，然 $n=40$ 代入時，$f(40)=40^2+40+41=41^2$ 爲完全平方數，並非質數。

・反例二：**僅提供步驟 2.1 及 2.2**

如果沒有考慮起始元素，也是會發生錯誤的。例如，

「$\forall n \in N, 1+2+\ldots\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+10$」顯而易見，這是個錯誤的命題！然而，若只有考慮中繼元素、後繼元素兩項時：

假設 $n=k$ 時，$1+2+\ldots\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}+10$ 成立，

則 $n=k+1$ 時，$1+2+\ldots\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+10+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}+10$ 成立

若僅依此來斷定原命題成立，那就大錯特錯了！讀者可從此角度出發，自行練習一個錯誤命題：「所有的正整數都相等。」您更會發覺到起始元素的重要性。

・反例三：**僅提供步驟 1 及 2.2**

如果沒有考慮中繼元素時，同樣地也是會發生問題的。例如：「$\forall n \in N, f(n)=x^n+1$ 是否為 $x+1$ 的倍式？」當 $n=1$ 時，$f(1)=x+1$ 成立；若 $n=k+1, x+1\left|x^{k+1}+1\right.$ 成立時，是否代表 $n=k, x+1\left|x^k+1\right.$ 必成立？舉 $k=4$ 即可反證，因為 $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$，所以 $x+1\left|x^5+1\right.$，但是，x^4+1 卻不是 $x+1$ 的倍式。

總之，數學歸納法是高中數學課程內容中的重要一環，尤其在恆等式證明方面，更是不可或缺的利器。我個人認為在數學歸納法的教學中，重心應擺在讓學生體認數學歸納法的「精髓」，而不是一味地解題與熟練各種不同的解題技巧。本文意在拋磚引玉，希望與分享我的教學策略，利用舉反例的方式，來增進學生對數學歸納法的真正了解。

註解：

1. 繼數 (next number)，是指自然次序中的次數，引自羅素著，傅種孫、張邦銘譯，《算理哲學》，台北：臺灣商務印書館印行，1970 年。

2. 此處的解題模式 (problem-solving module) 是以數學問題為出發點，根據此問題讓學生經由解決問題的過程中，學習到相關數學歸納法的概念、及運算技能，並培養學生對於該歸納法問題的思考模式，這種解題的方式，筆者稱之為「解題模式」。

3. 此處所謂起始元素 (initial element)、中繼元素、後繼元素，為筆者在教學過程中所採用的名稱，在一些專論數學歸納法的書中，只有起始元素 (initial element)、繼數 (next number) 等詞，筆者為求學生學習方便聯想，故引入此感覺連貫的用語。

Information 第七屆科學史研討會論文宣讀篇名

主辦單位： 國際科學史與科學哲學聯合會科學史組中華民國委員會
時間：2005 年 3 月 26-27 日
地點：國立台灣師範大學分部數學系館

姓　　名	篇　　　　　　名
王成　程海娟	中國獸醫史研究 60 年回顧
王道還	敘事在科學中的地位
李學勇	達爾文學說在二十世紀中的演變
周維強	試論鄭和使用火銃來源、種類、戰術及數量
林炳炎	火山灰混凝土技術在台灣
林倉億 蘇俊鴻	《算數書》各家校勘之比較與評析
林聰益 顏鴻森	古機械復原研究的方法與程序
城地 茂	關孝和之故居與他的《楊輝算法》抄本
洪萬生	中國近代數學三百年（1600-1900）
徐光台	明末清初西方「格致學」的衝擊與反應：熊明遇對「分野」問題的看法
徐志豪	被污名化的腎：近代「腎虧」概念的演化與形成
張之傑	鄭和下西洋與麒麟貢
張志強	宋人的蝗蟲觀及其科學認知
張淑卿	50、60 年代台灣國民學校的衛生教育工作：以結核病為例
張澔	五行學說緣起與中國古代科學思想之探討
陳久金	新發現的十二星次圖及其研究
陳美東	中國古代的漏箭制度
陳政宏	台灣管筏演變簡史
陳恒安	Ludwik Fleck 的思惟樣式、思維集體與科學普及
陳敏皓	初探《歷學疑問》、《歷學疑問補》
陳瑞麟	赫茲的陰極射線實驗被複製了嗎？
楊龢之	狸狌考
溫如梅	西學東漸對蒙書「天文知識」的影響
萬輔彬	銅鼓的傳播與發展及其反映的文化多樣性
趙瑞隆 張學文	中國古籍中的唇足動物
劉昭民	台灣日據時代動物學之研究
劉廣定	從一些兵器與車輪再探〈考工記〉
龍村倪	「青花」－科技的創新

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至　Hsuhui_yu@yahoo.com.twH
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。H投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.twH
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：Hhttp://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htmH
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學)
英國劍橋：李佳嬅（李約瑟研究所）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中） 洪正川（新竹高商）陳春廷（寶山國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）