HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台師大數學系）
助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啟文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南師院附中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心)
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第八卷 第四期 目錄(2005年4月)

數學歸納法 part 2

- 數學歸納法的證明形式之完成
- 歷史上的「數學歸納法」：以阿爾-凱拉吉、阿爾-薩毛艾勒、本熱爾松、摩洛利克為例
- 叫誰第一名？
- 如何製作 HPM 學習工作單－以數學歸納法單元為例

數學歸納法的證明形式之完成

西松高中 蘇惠玉老師

當我們打算證明一個命題對所有自然數都成立時，數學歸納法算是一個很好的證明策略。使用此一方法的證明形式，必須先證明兩個前提成立：(1) 證明起始值成立，通常是 n=1 時；(2) 假設 n=k 時命題成立，利用此一『歸納假設』證明 n=k+1 時原命題成立；最後，得到所謂的結論：「由數學歸納法原理」可證得本命題對所有起始值以後的自然數成立，到此證明才算完畢。當我們對自然數的特性足夠瞭解後，對數學歸納法作為一種證明法的有效性，當然不會有所疑慮；但是儘管「自然數的特性」這個詞看起來顯然易懂，自然數本身理論基礎的嚴密，卻又不是那麼容易可以達成。因此，在證明一個對所有自然數都成立的命題時，所面臨的第一個問題，即是我們要如何將無窮多的「每一個」自然數都一一證明？歷史上許多的數學家面臨這樣的問題，而在皮亞諾 (Giuseppe Peano，1858-1932) 的對自然數的公設提出之前，他們各自以自己的方法解決問題，或多或少對「數學歸納法」的理論基礎作出貢獻。在本文中，我們就以沃利斯 (John Wallis，1616-1703)、尤拉 (Leonhand Euler，1707-1783) 以及巴斯卡 (Blaise Pascal，1623-1662) 為例，說明數學歸納法的證明形式如何完成！

沃利斯，英格蘭人，1649 年成為牛津大學薩維爾 (Savilian) 講座的幾何學教授，在他的《無窮算術》(*Arithmetica Infinitorum*, 1655) 中，他想要找出 $y=x^k$ 曲線下的面積。為此，他先以平方為例，在決定 $y=x^2$ 在x=0 與$x=x_0$之間的面積與由x_0, x_0^2所決定的矩形面積的比值時，他必須先找出下面的這個值，以現在的符號表示，即為：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^2+1^2+2^2+...+n^2}{n^2+n^2+n^2+...+n^2}$$

在計算這個值之前，他以幾個簡單的數字試試，結果發現，

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{14}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

於是，他「歸納」出：一般而言， $\frac{0^2+1^2+2^2+...+n^2}{n^2+n^2+n^2+...+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$ ，當有無限多項時（即這些縱坐標的線「充滿」所要的曲線下面積時），這個比值為$\frac{1}{3}$。

接下來，他在《無窮算術》中的命題 39，以 3 次方為例子：

給定一個連續地以算術比例遞增，從 0 開始的立方序列（即 0, 1, 8, 27, 64,…），另一序列為與前一序列項數相同且每項都等於前一序列的末項，求給定序列與另一序列的比。

根據此一發現，他進一步寫道：

和以前一樣，這一問題可用「歸納法（induction）」考察。我們有

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64=320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+...+125=225}{125+...+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+...+125+216=441}{216+...+216+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$$

等等。所得的比值總是大於$\frac{1}{4}$，但是隨這項數的增加，超出$\frac{1}{4}$的部分逐漸減少，……

顯然，沃利斯他用所謂的「歸納法」得出命題 64 的結論：

如果取由 0 開始的任一冪次（此冪可以整數或分數）連續遞增的無窮數列，則這個數列與項數相同且各項等於它的末項的數列之比為 1 除以此冪指數加 1。

以現在的符號來看，這即是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+...+n^k}{n^k+n^k+n^k+...+n^k}=\frac{1}{k+1}$$

從沃利斯的策略來看，他提供了我們在證明上的一個「著手」的起點，這也是數學歸納法所以加上「歸納」的一個重要範例。它提醒我們：在對於無窮多項的自然數 n 不知從何著手時，數學家先以幾個特例觀察「歸納」它的形式！當然，沃利斯在推至無窮大的 n 與任一個 k 時，還有他邏輯上不足的地方，所以，雖然他自稱為「歸納法」，但是並沒有達到

我們現今認可的數學證明方法的嚴密程度。

沃利斯的方法，提供了我們在面臨無窮多個數需要證明時的一個策略。再來，讓我們看看尤拉的例子。尤拉無疑是 18 世紀最偉大而且才華洋溢的一位數學家，他從費馬的作品中，得到許多研究數論的靈感，其中，當然包括他也曾經試著解決「費馬最後定理」（當 n>2 時，$x^n + y^n = z^n$ 沒有正整數解）。事實上，他曾經證明 n=4 的情形成立，其結果分別發表於 1738 年，1747 年出版。首先，他以這樣的定理開始：

> 定理 1：任何兩個四次方數的和如 $a^4 + b^4$ 不可能是平方數，除非這兩個四次方數中的其中一個消失。[1]
>
> 證明：為了便於證明，我將定理作了這樣的更動。我將證明，假如 $a^4 + b^4$ 是一個平方數，則不管a和b有多大，總能逐步找到更小的a和b，直到找到符合這樣條件的最小整數為止。[2]因為實際上並不存在使其四次方和為一平方數的這樣的最小整數，，所以我們必可歸結出在最大的數中也沒有這樣的數。……

簡單一點來看，$a^4 + b^4$ 為一平方數，則 $a^2 = p^2 - q^2$，$b^2 = 2pq$ 當然也是平方數，如此得到 p 和 2q 也都是平方數，再由此可得 $p = m^2 + n^2$，$q = 2mn$，而導出 m 與 n 也都是平方數，所以，$m = x^2$，$n = y^2$，$p = m^2 + n^2 = x^4 + y^4$ 也是一個平方數。從此，我們可以得到「若 $a^4 + b^4$ 為一平方數，則 $x^4 + y^4$ 也是一個平方數，但它顯然要比 $a^4 + b^4$ 要小很多，同樣的方法，我們可以從 $x^4 + y^4$ 再得到更小的四次方數，其和是平方數，我們逐步地得到整數中最小的四次方數」。

在此，尤拉使用了所謂的「無窮遞降法」，從起始的成立，得到下一個也成立，再得到下一個，如此繼續下去到得到最小的為止。以現在數學的角度來看，這樣的想法無疑跟「數學歸納法」證明的形式相當接近，利用「起始」，以及「後繼」，解決了無窮多個的問題。不過，這樣的想法，其實早在巴斯卡時，就已經清楚的呈現出來了。

巴斯卡的數學成就廣為人所知的，莫過於所謂的「巴斯卡三角形」（Pascal's triangle）。若以年代來論，他當然不是最早使用這樣的三角形的人，但他卻是第一個將這個算術三角形本身當成一個研究主題，並從各個面向加以研究的數學家。

巴斯卡的《論算術三角》(*A treatise on the Arithmetical Triangle*) 成書約在 1654 年，但卻在他去世後才出版。全書分成兩部分，第一部份包含此三角形的構造、性質與 19 條相關推論；第二部分為應用，包含圖形數、組合及在賭博遊戲中的彩金分配問題與二項展開式的係數。以下為本書第一部份關於算術三角形的推論 12 以後的部分：

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	G 1	σ 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1	1	1	1	1
2	φ 1	ϕ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

在同一底上的兩個相鄰的格子，位置在上的格子（上格）與位置在下的格子（下格）的數字比，等於從此上格到此底的頂格的格子數與從下格到底端的格數的比，而此上、下格都包含在其中。[3]

考慮同底上任一兩相鄰格 E、C，我斷言：

E　比　C　＝　2　：　3

下格　比　上格　從 E 到底端有兩格　從 C 到頂端有三格，

（即 E、H）　（為 C、R、μ）。

雖然這一定理有無限多種情況，藉由假設以下兩個引理，我將給出一個很短的證明：[4]

引理 1：本身即是證據。[5]這個命題在第二底時顯然成立；因為很明顯地φ比σ等於 1 比 1。

引理 2：假設此命題在某一底為真時，則可得到在其下一底也一定為真。[6]

從以上可知在所有的底都為真，因為在引理 1 中，第二底為真；所以由引理 2 知第三底亦為真，從而在第四底亦為真，如此以至無窮。所以僅需證明引理 2 即可。證明可用如下的的方法：設此命題在某一底為真，如在第四底 Dμ 上為真，即 D 比 B 等於 1 比 3，B 比 θ 等於 2 比 2，且 θ 比 μ 等於 3 比 1，等等。則我說在下一底 Hδ 上也有同樣的比例，例如 E 比 C 等於 2 比 3。

由假設知，D 比 B 等於 1 比 3，於是

D＋B 比 B 等於 (1＋3) 比 3， 而 D＋B＝E，所以

E　比 B 等於　4　比 3

同樣的方法，由假設知 B 比 θ 等於 2 比 2，於是

B＋θ 比 B 等於 (2＋2) 比 2， 而 B＋θ＝C，所以

C 比 B 等於 4 比 2

而 B 比 E 等於 4 比 3，由合比定理得 C 比 E 等於 3 比 2。證明完畢。

在所有其他的底上，都可以用同樣的方法證明，[7]因為這樣的證明方式僅建立在這樣的事實上：命題在前一底為真，且每一格都等於它的前一格（左邊的格子）與其上面一格的和，而這一點對每一種情況都成立。

由以上的內容來看，挑剔一點的數學家可能會認爲證明有瑕疵，因爲巴斯卡並沒有證明一般情況，而只是用了一個第四底的特例。這個例子，數學史家Victor J. Katz稱爲「能一般化的例子」 (generalizable example)，洪萬生老師則稱爲「張本例」(generic examples)，[8]意思是說，從這個例子的證明方式，可以看到一般化的證明方式。因此，即使巴斯卡並沒有證明一般情況，我們也能預見他的證明內容會是什麼樣的形式。而就證明的邏輯形式而言，巴斯卡在證明一個命題對無窮多的自然數都成立時，他確實使用了「數學歸納法」證明的形式與精粹。難怪巴斯卡常會被當成是使用「數學歸納法」證明的第一人。

到目前爲止，問題僅剩下「爲什麼這樣就可以證明對所有的自然數都成立？」這一點了。爲此，我們必須回到自然數本身來看。在 1870 年代以前，數學的發展幾乎都建立在直覺、觀察以及實效的基礎上，這一點可以從上述沃利斯，尤拉與巴斯卡等三的例子得到一點佐證。但是，從 18 世紀末至 19 世紀，甚至是 20 世紀初，數學史的重大發展，例如微積分基礎的需求、四元數的發現、非歐幾何學的建立等等，都迫使數學家進一步重新追求證明及數學基礎的嚴密性，而數學的嚴密化通常藉著各支系的公設化而完成。其中，扮演重要角色之一的，即是義大利數學家皮亞諾。

皮亞諾對邏輯符號寄予重任，他希望他的著作 *Formulaire de mathematiques* (1894)能發展成包含不只數學邏輯，還有數學其他重要分支的形式語言。他在 1889 發表的《算術原理》(*Arithmetics Principia*) 的序言寫道：「我認為任何科學的命題都能單獨以這些邏輯符號表示，並使我們增加符號來呈現那個科學的主體。」所以，他以邏輯符號∊、⊂，及無定義名詞「N 自然數 (number)」、「1，單位元 (unity)」、「a+1，後繼元素 (the successor of a)」、「＝相等」等，來給予出自然數的公設 (axiom)：

1. $1\in N$。
2. 若 $a\in N$，則 $a=a$。
3. $a, b\in N$，若 $a=b$，則 $b=a$。
4. $a, b, c\in N$，若 $a=b$, $b=c$，則 $a=c$。
5. 若 $a=b$, $b\in N$，則 $a\in N$。
6. $a\in N$，則 $a+1\in N$。
7. $a, b\in N$，若 $a=b$，則 $a+1=b+1$。
8. $a\in N$，則 $a+1\neq 1$。
9. k 是 class（集合），且 $1\in k$，若 $x\in N$, $x\in k$ 則 $x+1\in k$，則 N 包含於 k。

在提及自然數的公設時，數學家通常只列出其中不包含運算的 5 個公設 (1, 8, 6, 7, 9)，並

將它們「翻譯」成如下的形式：

1. 1 是自然數。
2. 1 不是任何自然數的後繼元素。
3. 每個自然數 a 有個後繼元素。
4. 若 a 與 b 的後繼元素相等，則 a, b 亦相等。
5. 若一自然數集 S 包含 1，且若自然數 $x \in S$ 則 $x+1 \in S$，則 S 包含所有自然數。

上述的公設 5 通常稱爲數學歸納法原理 (the axiom of mathematical induction)，這即是數學歸納法作爲一個證明方法的邏輯基礎所在。

戴德金 (Richard Dedekind, 1831-1916) 也曾努力將自然數公設化，他在 1888 年出版的 *Was sind und was sollen die Zahlen?*(What are the (natural) numbers and what do they mean?) 中，將自然數中每一元素有唯一的一個後繼元素這一基本性質，以函數對應的概念一般化，將一元素s的後繼元素對應成s的transform $\phi(s)$；若在集合R上存在一個一對一變換 (transformation) 使得$S = \phi(R)$，則稱兩個集合R與S相似 (similar)；一個集合N經過這樣的一個「變換」後的集合$\phi(N) = N'$，若一集合N除了特定一個元素（例如 1）外，其餘都在此集合 N' 中，此集合 N' 稱爲N的proper part；若一集合S與其proper part相似，則稱S爲無限集。然則何謂自然數N呢？若集合K滿足 1 屬於K，K中每一元素的後繼元素也在K中，N爲每一個這樣的集合K的交集。換句話說，N包含基本元素 1，1 的後繼元素$\phi(1)$，這個數的後繼元素$\phi(\phi(1))$等等，而無其他元素。[9]從這樣的概念及公設系統出發，當然也可得到所謂的「數學歸納法原理」，只是由於皮亞諾的的公設化形式流傳較廣，一般在論及「數學歸納法原理」時，通常指的都是上述皮亞諾對自然數的這 5 個公設。

故事到此，似乎迎向一個美好的結局。雖然皮亞諾並沒有提及這些公設是爲數學歸納法尋找證明的邏輯基礎，但是正如他所認爲的，邏輯符號所提供的公設化系統，確實爲數學分支中的一個懸而未決的問題提供解決之道，不過，我們也不要忘記這也是許許多多的數學家經年累月的提供貢獻，才能有最後的開花結果。

註解：

1. 原文爲：The sum of two biquadratic numbers such as $a^4 + b^4$ cannot be a square number unless one of the two biquadratic numbers vanishes.
2. 此段原文：…no matter how large the numbers a and b, then I can progressively find smaller numbers a and b and at the end can reach the smallest integral numbers.
3. 即是證明$C_k^n : C_{k+1}^n = (k+1):(n-k)$。
4. 此段原文：Although this proposition has an infinite number of cases I shall give for it a very short demonstration by supposing two lemmas
5. 原文爲：evident in itself
6. 此段原文：[I]f this proposition is true in an arbitrary base, it will necessarily be true in the next base.
7. 此句原文：The proof can be given in the same way in all the other case

8. 關於張本例詳細的概念說明，請參考洪萬生，〈中算史中的『張本例』(generic examples)〉,《HPM 通訊》第五卷第十二期。
9. 詳見有關戴德金的理論說明，請參考 Katz 的 *A History of Mathematics* 中的 pp. 664-p.665，以及 Calinger 所編 *Classics of Mathematics* 中 p. 634 收入有關戴德金此篇論文的摘錄。

參考文獻

謝佳叡 (2003)，〈數學雜談--從數學歸納法談起〉，《HPM 通訊》第六卷第八、九期。

李文林主編（2000）,《數學珍寶》，台北：九章出版社。

Kline, M. 著，林炎全，洪萬生，楊康景松譯（1983）,《數學史—數學思想的發展》，台北：九章出版社。

Calinger, R. ed. (1995), *Classics of Mathematics*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Edwards, A. W. F. (1987), *Pascal's Arithmetical triangle*, London: Charles Griffin & Company Limited.

Boyer, C.(1991), *A History of Mathematics*, Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Katz, V. J. (1993), *A History of Mathematics*, New York: HarperCollins College Publishers.

負數概念歷史發展之啟示：

負數概念之完成，歷悠久時期之有機生長，而非由於一二思想家有意識之反省，亦可見純正邏輯在建設新觀念上之用途，在於調整，而不能作建設途徑之南針。因如僅顧及邏輯上和諧性之要求，則尚有他種系統存在，其去取又何能定乎？

余介石 倪可權，《數之意義》(台灣商務，1966 台二版)，頁 11。

歷史上的「數學歸納法」：以阿爾-凱拉吉、阿爾-薩毛艾勒、本熱爾松、摩洛利克為例

北縣福和國中 黃清揚老師

前言

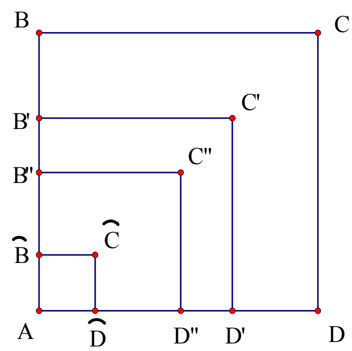
本文主要在介紹歷史上早期數學歸納法的型式，這包括了四位數學家阿爾-凱拉吉、阿爾-薩毛艾勒、本熱爾松、摩洛利克的著作，年代從第十到第十六世紀。這四位數學家在二十世紀初相繼被學者提出來討論，[1]其主軸在於確定誰是第一個發現數學歸納法的數學家。不過，筆者在本文中，則是將對這四位數學家的討論，定位在他們所提出的『方法』，並提供大家做爲教學上的參考。

阿爾-凱拉吉（**Al-Karaj**，全名 **Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji, 953~約 1029**）

阿爾-凱拉吉西元 953 年出生於巴格達，他一生中大部分時間也住在巴格達，重要數學著作主要也在這一時期完成。其中，他的有關代數之作品 *Al-Fakhri* 更獻給巴格達的統治者。本書的重要性，在於作者在書中運用『歸納法』討論了整數的立方和公式（$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$）。有趣的是，他的證明並未陳述此級數 n 項和的結論，而是只證明前 10 項之和，即 $(1+2+...+10)^2 = 1^3+2^3+3+...+10^3$，並且由 n=10 往回證明至 n=1。

他的作法如下：

先利用右圖證明 $(1+2+...+10)^2 = (1+2+...+9)^2 + 10^3$，其中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 1+2+...+10$、$\overline{BB'} = \overline{DD'} = 10$、$BCDD'C'B'$ 的面積 $= 2\cdot 10(1+2+...+9)+10^2 = 2\cdot 10\cdot \frac{9\cdot 10}{2} + 10^2 = 9\cdot 10^2 + 10^2 = 10^3$。



再連續利用這個式子得到：

$$\begin{aligned}
&(1+2+...+10)^2 \\
&= (1+2+...+8)^2 + 9^3 + 10^3 \\
&= (1+2+...+7)^2 + 8^3 + 9^3 + 10^3 \\
&= ... \\
&= 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3
\end{aligned}$$

阿爾-凱拉吉對後來阿拉伯數學的影響頗大，這由數學家阿爾-薩毛艾勒的著作《算術全書》中提及阿爾-凱拉吉對他的啓發可見一斑，以下即介紹阿爾-薩毛艾勒。

阿爾-薩毛艾勒（ **Al-Samawal,** 全名 **Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal,** 約 **1130**~約 **1180**）

阿爾-薩毛艾勒出生於巴格達，其父親爲專長於宗教及文學的基督教學者，不過，阿爾-薩毛艾勒後來改宗伊斯蘭教。由於家學淵源，阿爾-薩毛艾勒早期即顯露出對數學的興趣，

他最重要的作品《算術全書》（*al-Bahir fi'l-jabr*，意思是 *The brilliant in algebra*）就是在 19 歲完成的。由於阿爾-薩毛艾勒在該書中提到他的著作來自於阿爾-凱拉吉，可知作者受到阿爾-凱拉吉的影響頗大，這當然也包含了歸納法。《算術全書》包含四個部分：（1）前提、乘、除與開方（2）未知量的開方（3）不可公度量（4）問題的分類。其中歸納方法的使用主要在第二部分。一般來說，作者的陳述方式是先論述已知條件在 $n=\mathrm{k}$（k 為特定數字）時成立，接下來再證明在 $n=\mathrm{k}$ 條件成立之下 $n=\mathrm{k}+1$ 會成立，之後作者陳述若想要做到 n 為多少都可以類似方法說明。以二項式定理（阿爾-薩毛艾勒在書中並未將之陳述為一般定理）n=4 為例，他說：

> 一個數分成二個部分，這個數的平方−平方（四次方）等於每一個部分的平方−平方，四倍每一個部分乘另一部分的三次方，六倍每一部分的平方的乘積之和。

這也就是：$(a+b)^4=a^4+b^4+4ab^3+4a^3b+6a^2b^2$。他的證明如下：

假設 c=a+b。

因為 $c^4=cc^3$，而且 $c^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab^2+3a^2b$，

所以

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)\\
&=(a+b)a^3+(a+b)b^3+(a+b)3ab^2+(a+b)3a^2b\\
&=a^4+a^3b+ab^3+b^4+3a^2b^2+3ab^3+3a^3b+3a^2b^2\\
&=a^4+b^4+4ab^3+4a^3b+6a^2b^2
\end{aligned}
$$

其中，作者引《幾何原本》第二卷中的 $(r+s)t=rt+st$ 來進行式子的展開。接下來，在引用 n=5 的結果之後，al-Samawale 提到：

> 知道我們剛才所說的人，能證明任何數被分成兩個部分時，它的五次方等於每一個部分的平方−三次方（五次方）、五倍每一部分乘另一部分的四次方、十倍每一部分平方乘另一部分的三次方之和。以此類推。

其中作者給出了五次方的二項展開式，並且說高次方的展開也是用類似的方法。同時，阿爾-薩毛艾勒也給出了 12 次方二項式係數對應的的巴斯卡三角形，來說明對較大的 n 值如何一般化他的法則。然而，用現今的觀點來看，由於阿爾-薩毛艾勒在文本中並未陳述一般的二項式定理，所以，我們不能說他用數學歸納法或其他方法證明了此定理。但他的作法的確給當時的讀者一個可理解並且可以操作的方案，或許以當時來說，這就是所謂的證明。這也是阿拉伯世界帶給大家的豐富數學遺產之一。

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
		1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
			1	5	15	35	70	126	210	330	495
				1	6	21	56	126	252	462	792
					1	7	28	84	210	462	924
						1	8	36	120	330	792
							1	9	45	165	495
								1	10	55	220
									1	11	66
										1	12
											1

本熱爾松 (Levi ben Gerson，1288-1344，法國)

在阿爾-薩毛艾勒之後，數學的發展重心隨著阿拉伯帝國文化的沒落逐漸轉移到歐洲，而之後有關於數學家歸納法的文本，則首先出現在中世紀歐洲數學家本熱爾松的著作中。本熱爾松出生於法國南部的Bagnols-sur-Cèze，他一生中大部分時間活動於出生地的附近城鎮奧朗日 (Orange)。本熱爾松不僅僅是數學家，也是天文學家、哲學家及釋經員（彌撒中解釋經文的人員）。他的成就，在於發明了可以度量星體之間角度的Jacob Staff，以及提出數學歸納法的早期型式，後者見於 1321 年所著《計算者的技術》（*Maasei Hoshew*，意思是The Art of the Calculator）一書之中。在該書中，作者討論了排列、組合問題，並運用古希臘學者的成果，對部分命題給出了歸納法的證明，[2]其中本熱爾松將其所使用的歸納法稱之爲 “rising step-by-step without end”。而他使用歸納法的論述則與阿爾-凱拉吉類似，都是由n證明到n-1。以證明$(1+2+...+n)^2=1^3+2^3+...+n^3$爲例，首先，他先在書中第 41 個命題利用代數方法證明 $(1+2+...+n)^2=n^3+(1+2+...+(n-1))^2$。接下來，第 42 命題爲：自然數由 1 加到給定的數的平方等於由 1 的立方加到所給定數的立方，亦即證明：$(1+2+...+n)^2=1^3+2^3+...+n^3$。其過程如下：

首先 $(1+2+...+n)^2=n^3+(1+2+...+(n-1))^2$

而$(1+2+...+(n-1))^2=(n-1)^3+(1+2+...+(n-2))^2$（命題 41）

…

$1^2=1^3$，

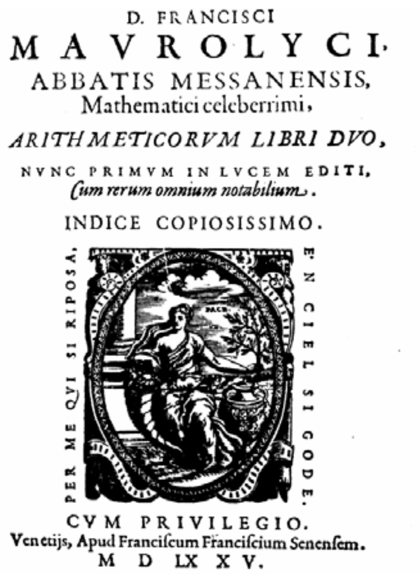
從而得證。

由於本書採用歐幾里得式的書寫方式來證明所有的結果，而且，作者對歸納方法給出

了一個名詞。所以，對比之前阿爾-凱拉吉及阿爾-薩毛艾勒的成果，本熱爾松似乎對數學歸納法更有概念。雖然如此，而且本熱爾松的文本也流傳至今，可惜，他對往後二、三百年數學的發展，卻一點影響也沒有[3]，對後來較有影響力的文本，反而是摩洛利克的《算數》。

摩洛利克（Francesco **Maurolico，1494~1575，義大利**）

摩洛利克於 1494 年 9 月 16 日，出生於西西里半島的密西那，他一生中大部份時間即在密西那 (Messina) 及西西里度過。在當地，他曾當過建造防禦工事的工程師、造幣廠主監等。從數學史上來看，他是 16 世紀主要的數學家之一，也是中世紀歐洲最早翻譯、注釋古希臘科學著作，復興並推廣古希臘數學的學者之一，尤其是在推廣阿基米德的數學方法方面，更是頗有貢獻。除此之外，他還寫了許多數學著作，涉及球、稜錐、圓錐面以及旋轉拋物面等，但大部分都沒有發表。在這期間，我們注意到他在 1575 年所著《算數》（*Arithmeticorum Libri Duo*）（右下圖為其封面），其中作者使用歸納步驟證明了正整數的一些性質，例如命題 11：第n個三角形數加上它前面的那個三角形數和為 n^2 。以下便是他的方法：


D. FRANCISCI
MAVROLYCI
ABBATIS MESSANENSIS,
Mathematici celeberrimi,
ARITHMETICORVM LIBRI DVO,
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI,
Cum rerum omnium notabilium,
INDICE COPIOSISSIMO.
PER ME QVI SI RIPOSA, EN CIEL SI GODE.
CVM PRIVILEGIO.
Venetijs, Apud Franciſcum Franciſcium Senenſem.
M D LX X V.

因為第n個三角形數為 $t_n = 1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

又 $t_{n-1} = t_n - n$ ，

所以 $t_n + t_{n-1} = 2t_n - n = n^2$

摩洛利克的方法當然與數學歸納法還有一定的差距，更何況，作者在說明的過程中是用 15 及 10 做為例子（這種方式在他的書中屢屢可見）。但是，與本熱爾松大不同的是，摩洛利克確實影響了後來數學歸納法概念的發展，例如巴斯卡就曾提及摩洛利克已經使用了某種型式的數學歸納法。

結語

從以上引述文本來看，其中所介紹的歸納法型式，與現今所謂的數學歸納法皆有所出入。若以嚴格的數學標準來看，這些數學家的方法都不能說是數學歸納法。儘管如此，筆者認為在教學上來說，這還是有其義意的。這是因為往往從數學史中，我們可對照到學生的概念發展。同時，從數學史的發展中或許可找出對學生迷思概念的解決方案，我們也可藉以增進教學者對數學歸納法義意的了解，這也是筆者撰寫本文的主要目的。

註解：

1. 相關討論見 Rashed (1994)，頁 62-63。
2. 本熱爾松在書中並未強調一定要使用歸納法，見 Katz (1998)，頁 304。
3. 同上，頁 306。

參考資料：

謝佳叡（2003）,〈數學雜談—從數學歸納法談起〉,《HPM 通訊》第六卷第八、九期合刊。

Katz, Victor (1998), *A History of Mathematics: An Introduction*, New York: HarperCollins College Publishers

Rashed, Roshdi (1994), *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Al-Samawal.html

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Al-Karaji.html

http://www.dm.unipi.it/pages/maurolic/edizioni/arithmet/ariduo/intro.htm

http://math-doc.ujf-grenoble.fr/LiNuM/TM/Gallica/S083056.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Infinity.html

歷史之於教學

教師對於學理，必須考其在歷史上發展之象跡，以覘人心認識之程序與限度，庶可因時制宜，善為說理，既不至使初學難以猝通，亦不至養成其謬見或誤解。歷史之於教學，不僅在名師大家之遺言軼事，足生後學高山仰止之思，收聞風興起之效。更可指示基本概念之有機發展情形，與夫心裡及邏輯程序，如何得以容和調劑，不至相背，反可相成，誠為教師最宜留意體會之一事也。

余介石 倪可權，《數之意義》(台灣商務，1966 台二版)，頁 17。

叫誰第一名？

台師大數學系助教　林倉億

「是誰發明(現)了……？」、「是誰第一個使用……？」、「是誰第一次提出……？」等這些「優先權」的問題，一直是許多數學教師很喜歡追究的問題，這或許是因為要應付學生提出這類的疑問，也或許「第一名」是一個在課堂上引入數學史的絕佳話題。筆者為釐清「誰是第一個使用數學歸納法的人？」這個「民之所欲」的問題，開始去翻閱資料並上網搜尋，不查還好，一查竟翻出數學史界的百年舊帳。

長久以來，巴斯卡 (Blaise Pascal，1623~1662)一直被許多人認為是第一個使用「數學歸納法」的人，但在上世紀初 (1909 年)，Georges Vacca反駁此一說法，提出摩洛利克(Francesco Maurolico，1494~1575)才是「第一名」。[1]不過，Hans Freudenthal及Kokiti Hara分別在 1953 年及 1962 年提出不同的看法，後者更宣稱巴斯卡才是第一個使用「數學歸納法」的人。到了 1970 年，Nahum L. Rabinovitch推翻前人的說法，提出比摩洛利克還早的本熱爾松 (Levi ben Jerson1288~1344)，才是最先使用「數學歸納法」並將之當作一個明確的數學程序的人。[2]

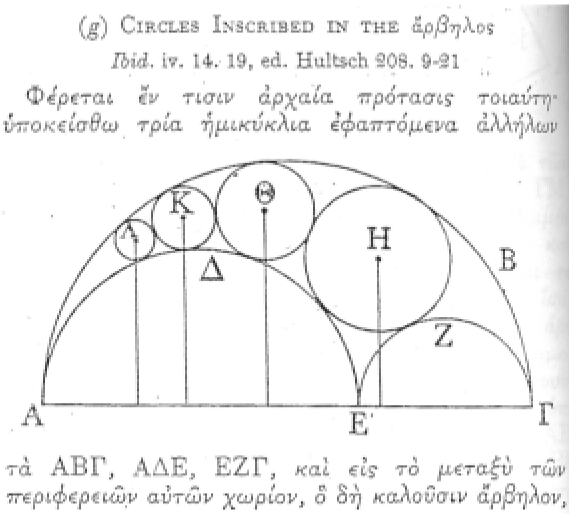
至此，數學史界似乎有了共識，越來越多人同意本熱爾松是第一個使用「數學歸納法」的數學家，但，隨著對中古世紀阿拉伯數學史的研究推展，本熱爾松的地位也日漸動搖。數學史家Roshdi Rashed就指出應該多留意阿拉伯數學家阿爾-凱拉吉(al-Karaji，953~約 1029)及其後繼者阿爾-薩毛艾勒 (al-Samaw'al，1125~1180)在「數學歸納法」方面的工作；另一位數學史家Victor J. Katz在其著*A History of Mathematics*第八章後的習題中，便要讀者去比較本熱爾松與阿爾-凱拉吉兩人的方法，同為數學史家的Judith Grabiner就曾實際要求他的學生去作這樣的比較，並得到了很好的效果。[3]雖然阿爾-凱拉吉在「數學歸納法」上的工作逐漸受到重視，但「優先權」的爭議並沒有平息，Hussein Tahir在 1995 年提出，早在公元四世紀的帕布斯(Pappus of Alexandria)就已了解「數學歸納法」中的本質想法(essential ideas)，一口氣將「數學歸納法」的起源年代向前推了好幾百年。更甚者，Jean Itard在 1961 年就宣稱歐幾里得(Euclid，約公元前三世紀)的《幾何原本》中已使用到「數學歸納法」。從帕布斯到歐幾里得，時光又提前了六百多年！

從巴斯卡、摩洛利克、本熱爾松及阿爾-凱拉吉等人，一直到帕布斯、歐幾里得，究竟要叫誰第一名，這並不是拍賣會場上的喊價比賽，而是要有真憑實據才算數。關於巴斯卡、摩洛利克、本熱爾松及阿爾-凱拉吉等人的工作，蘇惠玉及黃清揚在本期《HPM 通訊》之文章中已有說明，筆者在此略去不提，以下筆者將介紹帕布斯及歐幾里得的「數學歸納法」。

帕布斯在其著作《數學匯編》(*Collection*)的第四冊中探討「皮革匠(或製鞋匠)刀內的內切圓」問題，如圖一。所謂的「皮革匠的刀」就是指圖一中三個相切半圓所組成的形狀，在此形狀中依序嵌入圓 H、圓Θ、圓 K、圓Λ……，其中圓 H 與三個半圓相切；圓Θ與半圓 AE、半圓 AΓ 及圓 H 相切；圓 K 與半圓 AE、半圓 AΓ 及圓Θ相切；圓Λ與半圓 AE、半圓 AΓ 及圓 K 相切，……。也就是第二個以後嵌入圓，皆與半圓 AE、半圓 AΓ 及前一個嵌入的圓相切。然後 Pappus 寫道：

證明：圓心 H 到 AΓ 的垂線等於圓 H 之直徑；圓心Θ到 AΓ 的垂線等於 2 倍圓Θ之直徑；圓心 K 到 AΓ 的垂線等於 3 倍圓 K 之直徑；依序得到之垂線與其對應直徑的倍數關係，是根據對應圓在此序列中的次序，而這種嵌入的圓可以無限制地增加下去。

用今天的符號表示，嵌入的第n個圓C_n，直徑長爲d_n，圓心到線段AΓ的距離爲p_n，則$p_n = nd_n$。由於證明過程頗爲冗長，筆者在此不詳述，有興趣的讀者不妨參閱Thomas Heath的*A History of Greek Mathematics*。帕布斯的證明過程是在證明n＝1、2、3 皆成立後，就說這可以無止境地下去。[4]這證明過程，就是Tahir宣稱的帕布斯已了解「數學歸納法」本質想法的依據。



圖一

至於歐幾里得的「數學歸納法」，依 Itard 的說法，可在《幾何原本》卷七的命題 3、27、36，卷八的命題 2、4、13 及卷九的命題 8、9 中看到，現舉卷七的命題 27 爲例。該題主旨是：

a、b兩數*互質*，則a^2與b^2、a^3與b^3、……、a^n與b^n、……皆*互質*。

想必每一位讀者都會同意數學歸納法可以是證明此命題的可行途徑之一，然實際上，歐幾里得卻只證明了 n＝2 和 3 的情形後就「Q.E.D.」了！以現今數學歸納法的標準來看，只能說歐幾里得還差得遠咧！

事實上，不僅是歐幾里得與帕布斯的「數學歸納法」，連同巴斯卡、摩洛利克、本熱爾松及阿爾-凱拉吉等人的「數學歸納法」，以今日數學歸納法的內涵來看，統統「不及格」！那如此說來，數學史界近百年來的爭論豈不是鬧劇一場？從純粹數學知識內容的眼光來看，沒錯，上述這些人都應該從「優先權」的競賽中淘汰掉，在皮亞諾 (Giuseppe Peano，1858~1932)提出關於自然數的第五個公設之前，沒有人有資格競逐「數學歸納法第一人」的頭銜，但，此一看法將導致視數學爲永恆不變的真理，而抹殺皮亞諾之前的數學知識活動價值；也就是說，若斷然否定皮亞諾之前的「數學歸納法」，那巴斯卡等人利用此一「不合法」手段所從事的智識活動及所獲得的知識價值，都將被大打折扣。我們應該用更寬廣的角度來看待皮亞諾之前的「數學歸納法」，將它們當作特定時空、文化下的智識活動來看待，進而去欣賞它們在當時所具有之意義及對後世數學發展的影響。此一豐富的面向，筆者就留給讀者自行去查閱、領會，以免此文變得「既臭又長」！

經歷了一段時光之旅後，現將焦點從西元前三世紀的歐幾里得拉回二十一世紀的高中數學課，楊凱琳 (2005)、蘇俊鴻 (2005)、謝佳叡 (2005)等人皆提到，現今學生對數學歸納法多僅是停留在程序性（機械性、儀式性）的操作，而非概念性的理解，這不也呼應了「數學歸納法」的發展歷程。人類文明花了兩千年才認識到「從 n＝k 時命題成立，證明 n＝k＋1 時命題成立」此一步驟的重要性，要每位學生在短短的幾堂課內對數學歸納法有

著概念性的理解，這確實是強「師」所難。課堂上該如何取捨、衡量，還有待每位老師的智慧了！

上下縱橫數千年後，終究是要回到本文的題目，也就是到底要「叫誰第一名呢？」我想，這個問題已不是用一個人名可以回答的了。數學史家 Rashed 就建議在看待數學歸納法的發展史時，找一個「起始點」，例如從阿爾-凱拉吉開始到巴斯卡，或從巴斯卡開始到皮亞諾。下次若有學生問起這個問題時，不妨試試 Rashed 的建議，挑一個時期，然後帶領學生去欣賞該時期內人類利用「數學歸納法」所作的貢獻，以體會數學發展之趣。

註解：

1. 巴斯卡曾在自己的信中將該方法歸功於摩洛利克，參閱 Kline (1972)，p. 272。
2. 參閱 Rashed (1994)，pp. 62~63。
3. 應是選修 Grabiner 之數學史相關課程的大學部以上學生，參閱 Grabiner (1999)。
4. Heath 在此是用拉丁文 “*ad infinitum*”表示，參閱 Heath (1981)，p. 376。

參考資料：

Grabiner, Judith. (1999), http://mathforum.org/epigone/historia_matematica/chysnermgou/Pine.GSO.3.96.990305111051.12553A-100000@calvin.pitzer.eduT

Heath, Thomas L. (1956), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications.

Heath, Thomas L. (1981), *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications.

Katz, Victor J. (1993), *A History of Mathematics*. New York: HarperCollins College Publishers.

Kline, Morris (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Rashed, Roshdi (1994), *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tahir, Hussein (1995), “Pappus and Mathematical Induction”, *The Gazette of the Australian Mathematical Society* 22 (4): 166-167.

Thomas, Ivor (1994), *Greek Mathematics Works II: From Aristarchus to Pappus*. London: William Heinemann LTD.

楊凱琳 (2005),〈數學歸納法是什麼玩意兒〉,《HPM 通訊》8(2/3)：。

蘇俊鴻 (2005),〈數學歸納法的分析〉,《HPM 通訊》8(2/3)：。

謝佳叡 (2005),〈「數學歸納法」教與學的認知與常見謬誤〉,《HPM 通訊》8(2/3)：。

黃清揚 (2005),〈歷史上的「數學歸納法」：以阿爾-凱拉吉、阿爾-薩毛艾勒、本熱爾松、摩洛利克爲例〉,《HPM 通訊》8(4)：。

蘇惠玉 (2005).〈數學歸納法的證明形式之完成〉,《HPM 通訊》8(4)：。

如何製作 HPM 學習工作單－以數學歸納法單元為例

成功高中 蘇意雯老師

在數學教學上輔以歷史取向，自從 1970 年代初創立的數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM），就是以此為首要目標。如何讓數學史可以在數學的「教學」和「學習」中，扮演更有效的角色，是有心從事 HPM 教學的教師相當關心的課題。那麼對於一位想要嘗試融入數學史於數學教學的教師，究竟必須從何著手呢？在筆者所進行之以 HPM 為進路，探討數學教師專業發展的研究，結果顯示「**利用製作 HPM 的學習工作單，引動教師融入數學史於數學教學**」，是相當重要的一個策略。因為涵蓋數學知識的邏輯、歷史、學生認知三面向的 HPM 學習工作單，連結了參與教師對於 HPM 理論的了解與實作，而藉由學習工作單的實施，也獲得學生對於教學正面的回饋。因此，在本文中，筆者將先介紹 HPM 學習工作單之意含及製作方式，接著再以在高中任教的洪誌陽老師所製作之數學歸納法學習工作單為範例，加以說明。

在製作 HPM 學習工作單之初，教師必須謹記在心的是，HPM 的精神是在於幫助教師「教數學」，而不是數學史。因此，我們認為在學習工作單上要考量數學知識的邏輯、歷史以及學生認知三個面向。所謂的邏輯面向，代表課程單元的教學目標，以及此單元在教科書中的編排方式，和教師手冊中相關的說明。有關歷史的面向上，就是包含數學史的範疇：(A)數學家傳記：例如高斯傳。(B) 數學思想上的重要發展：例如複數系的產生。(C) 著名定理的來源剖析：例如費馬最後定理。(D) 證明與解題的思維。(E) 文本的呈現。(F) 科普書籍介紹等等，不管是原始典籍，或第二手文獻等等，都列入此一範疇。

至於對於學生認知的面向，則是從數學教育研究論文中，搜尋有關學生的認知發展方面的成果，以及此單元學習障礙的具體案例，或從教師本身的教學經驗及同儕間的交流討論去發掘學生的問題，也從國內或國外 HPM 方面的相關研究著手。在針對這三個面向設計學習工作單的過程中，教師首先體會教科書編者、課程標準與教科書內容，以及古代數學家、數學物元、數學理論之精神，再經過自我詮釋之後，考量學生的學習需求，然後從事學習工作單的編製，最後再進行課堂實作。接下來，我們以數學歸納法為例，看看對於此單元如何設計出 HPM 學習工作單。

首先我們先探討洪誌陽的“數學歸納法的工作單”（洪誌陽, 2001)。該篇文章設計了 6 張工作單，第一張工作單以「數字 68 就是佛法大意」為張本例，「張本例」通常也被譯成「啓蒙例」。數學教育中的啓蒙例教學，就是指教學時，當學習抽象數學概念時，用具體例子以引動學習。啓蒙例教學概念可包含有「代表性」，就是能正確表達欲教的數學概念，以及「發展性」，就是能接續在相關概念的學習時所用，還有「易學性」，即能讓學生容易操作，最後是「樂學性」，就是能引起學生的學習動機等四個屬性（鄭英豪, 2000）。這張工作單相當有新意，頗值得推介給各位教師採用。第 2 張工作單內容是以 John Wallis(1616-1703)處理級數和的問題，還原論證過程，這是歷史的面向，也可以利用此機會幫學生再複習 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 以及 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 的公式。第 3 張工作單是歸納法與數學歸納法的討論。文

章作者希望透過討論方式，讓學生釐清數學歸納法與歸納法的不同，對數學歸納法的掌握更有感覺。第 4 張工作單是探討圖形數和組合數的相關問題，這張工作單由於牽涉到高二的課程內容，筆者並不建議於高一使用。第 5 張工作單則是想對數學歸納法做「後設性」的討論，因此安排了皮亞諾公設(Peano axiom)的說明，這張工作單可以當成進階的教材，或讓同學於課後自行研究。第 6 張學習工作單安排在學習數學歸納法中學生常犯的錯誤，藉由認知衝突，讓學生再度反思工作單上的論證所呈現的問題。上述 6 張學習工作單難易不同，但整體而言，涵蓋了 HPM 的三個面向。由於數學歸納法單元在各版本教科書中，都是安排於高一上學期，因此若教師想利用這份工作單進行數學教學，則不妨依照 1, 3, 2, 6 的順序，也就是先以張本例引起學生興趣，再講解數學歸納法的意含，最後藉由例題的安排，加強學生對數學歸納法的認知。至於第 4 和第 6 張工作單，則可列爲補充教材，教師視學生的程度和授課時間自行決定採用。

採用現成的學習工作單固然容易，但是相信大家一定會想爲自己任教的學生量身打造適合的 HPM 學習工作單。因此，最後筆者建議有心想要自我充實，學習 HPM 教學的教師，不妨找幾個志同道合的夥伴，以學校爲中心進行。每週利用一段固定的時間，最好是兩個小時以上，因爲這樣較有足夠的時間分享每個人的作品。在固定的地方，例如數學科研究室，進行討論。如此，教師可以較從容的利用「閱讀」和「實作」的模式，在共同學習夥伴關係的驅動下，完成製作整合三面向的 HPM 學習工作單，使用於教學。「閱讀」的重要在於從閱讀中，教師不但充實了數學史素養，也能體會在教學素材中，融入 HPM 三面向的意含。此處的「閱讀」包括：

- 參考現有 HPM 實作資料庫中的資訊。例如《古代數學文本在課堂上的使用》計畫中所完成的 29 篇教案，或《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》裡收錄的 8 篇實作心得，以及《HPM 通訊》裡的文章等等。
- 數學文本，其中包括原始典籍或二手文獻。
- 數學普及讀物。
- 與數學學習與教學相關之文章。

至於實作部分則包括了：

- 學習工作單的編製。
- 教學後實作心得的撰寫。

在實際的操作上，此「閱讀」和「實作」的模式，是雙向並行的。從閱讀中教師汲取有關 HPM 的素材，經過自我詮釋後，編製成學習工作單。接著，教師在課堂的教學實施，獲得學生回饋之後，如果能撰寫實作心得加以反思，繼續再從文本中尋找適合的史料，如此才能讓下一單元呈現出更精緻的 HPM 教學。除此之外，向專家諮詢，例如台灣師大的洪萬生教授，或者是尋求 HPM 同好的協助，例如《HPM 通訊》中的編輯小組，這些都是向外可以獲得的資源。有了上述的資訊參考，透過不斷的閱讀和實作，相信大家都能設計出合用的 HPM 學習工作單。親愛的讀者，您是不是也躍躍欲試了呢？

參考文獻：

洪萬生 (2001).〈古代數學文本在課堂上的使用〉，國科會補助專題研究計畫成果報告, (編號 NSC 89-2511-S-003-031-; NSC 89-3511-S-003-121)。

洪萬生 (2002).〈中算史中的「張本例」〉,《HPM 通訊》5(12)：1-3。

洪誌陽 (2001).〈數學歸納法的工作單〉，載於洪萬生，〈古代數學文本在課堂上的使用〉，頁 239-253。

英家銘 (2003).〈中東古文明數學巡禮系列之三：巴比倫數學舉隅及其「張本例」〉,《HPM 通訊》6(2/3)：

鄭英豪 (2000).《學生教師數學教學概念的學習：以「概念啓蒙例」的教學概念爲例》，台北市：國立台灣師範大學博士論文(未出版)。

蘇意雯 (2004).《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》，台北市：國立台灣師範大學博士論文(未出版)。

附錄：

Workcard 3　數學歸納法(3)

自然科學中常用的“歸納法”，是從特殊事件中獲得一般結論的過程。它所得到的結論，不管是直接透過相同程序的實驗，或是間接由其他定律的一些邏輯性的推論來檢查，都必須依賴真實世界中相同或其他觀察者所作的實驗所驗證。但是在數學中，常常可以藉由嚴格的邏輯程序來檢查我們的歸納結果。“數學歸納法”就是其中一種很重要的方法。

我們若從歷史的發展來看，數學歸納法的內涵，不少數學家 [1] 都已經掌握了，但是開始時，大都只使用這個方法，而沒有給出特別的名稱。在英國，Wallis 最先在《無窮算術》中使用“歸納法”(iinduction)這個名詞，在 Jakob Bernoulii 強調從 n 遞推到 $n+1$ 的程序後，“歸納法”有時被特別用來指稱這個遞推的過程，但大多數的數學家還是很少給這個方法一個名稱。一直到十九世紀，Peacock 在他的《代數論》(*Treatise on Algebra*)才稱呼它為“論證式的歸納法”(demonstrative induction)。De Morgan 在 1838 年的文章《(數學的)歸納法》(Induction (mathematics))最後，第一次使用“數學歸納法”這個名詞。後來經過其他數學家的介紹、使用而廣為流傳。在歐陸，德國使用較廣的名稱是“完全歸納法”(vollstandige induktion)，美國則在 1874 年開始使用“數學歸納法”這個名詞。

問題與討論：

1. 已知 $n \in N, f(n)=n^2-n+41$，試求 f(1)=？f(2)=？f(3)=？這些值有什麼特徵？能不能找出一個 n 值代入卻使 f(n)不為質數？如果不能，可以歸納說：不管 n 是多少的正整數都使 f(n) 為質數嗎？
2. 一個常見的恒等式：$(x-1)^2=x^2-2x+1$，若我們用 x=1、2、3 代入檢驗後，能不能肯定這個恒等式是對的？如果只代 10 進去檢查，能不能肯定這個恒等式是對的？
3. 設 n 為自然數, 試比較 2^n、3^n 與 $n!$ 之大小，請說明你的理由。你能找出 $n!$ 下界中，k^n 這種形式的最佳值嗎？
4. 請分組查閱 note1 中所提到的人名與數學歸納法的的關連。

3. 你能簡明的解釋為什麼 100000000 是佛法大意嗎？(記得不要用 … 這種說明方式。)
4. 你能指出哪些數字是佛法大意，哪些不是嗎？請說出你的理由。
5. 從上面的討論裡，你學到了什麼推論的原則？

Workcard 4　數學歸納法(4)

雖然很多人都已經有數學歸納法的想法，但他們的論證形式與現在所使用的都不大相同。Maurolycusy 在 1575 所出版的書中，用數學歸納法證明一些定理時，例如：

命題 11：每個三角數加上前面的三角數等於其旁邊的正方形數。(即 $T_n+T_{n-1}=S_n$)

清楚的使用了與近代幾乎一樣的論述。

很多人認為， Pascal 是清楚的使用現代數學歸納法形式而且認識其價值的第一人 [1]。在他的名著《論算術三角》(*Treatise on the Arithmetic Triangle*)，他也清楚的使用了數學歸納法證明某些命題。例如：

推論 12：從 n 個物件中取出 k 個的組合數與從 n 個物件中取出 $k+1$ 個的組合數之比跟 $k+1$ 與 $n-k$ 之比相同。(即 $C_k^n:C_{k+1}^n=(k+1):(n-k)$)

在證明中，一開始 Pascal 即說：“雖然這個定理有無限多種情況，我將簡短的用兩個步驟來證明”，他所指的，就是數學歸納法的兩個基本的部分。

問題與討論：

1.請用數學歸納法證明命題 11。

2.請用數學歸納法證明推論 12。

3.請用數學歸納法證明：

若兩個玩家 A、B 玩某種賭博遊戲的技巧一樣，但是他們在遊戲結束前因某種原因而停止比賽。他們當時的比賽成績，A 缺 α 場勝利而 B 缺 β 場即贏得比賽。若 $\alpha+\beta=n$，則賭金的分配應依下列比例：

$$B:A=(C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+C_2^{n-1}+\cdots+C_{\alpha-1}^{n-1}):(C_\alpha^{n-1}+C_{\alpha+1}^{n-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1})$$

問題與討論：

1. Wallis 的論證過程中，有沒有值得商榷的地方？為什麼？
2. $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=$？你猜答案多少？你怎麼求和？那麼 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$?
3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=$？你猜答案多少？你怎麼求和？那麼 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=$?
4. Wallis 在作式子(1)與(2)的結論時，使用了他所謂的“induction”，這為他同時帶來了讚美與責難。你能彌補他被責難的地方嗎？

Workcard 5　數學歸納法(5)

在十九世紀中所興起的分析算術化運動中，它的終點就是所謂的"皮亞諾公設"(Peano' axioms)，它是由義大利數學家 Peano 在 1891 年所提出的。Peano 從不加定義的"集合"、"自然數"、"後繼元素"和"屬於"等概念出發，給出了關於自然數的五條公設：

(1) 0 是一個自然數。

(2) 0 不是任何其他自然數的後繼元素。

(3) 每一個自然數 a 都有一個後繼元素。

(4) 如果 a 與 b 的後繼元素相等，則 $a=b$。

(5) 若一個由自然數所組成的集合 S 包含 0，並且當 S 包含某一自然數 a 時，它一定也含有 a 的後繼元素，則 S 就包含有全體自然數。

很明顯的，公設(5)就是所謂的數學歸納法原理。

Poincare 在《科學與假說》中寫著：

> 對我們來說，為什麼此項判斷(數學歸納法原理)必須作為無法爭辯的自明之理，而強制我們服從呢？那只是對一個作用只要一次承認其可能，據此便可以使該作用作無窮次反覆思考，對此理智能力的肯定罷了。……它不外乎是對理智本身一種性質的肯定。

你覺得呢？

問題與討論：

1.請利用書籍或網路，查閱與數學歸納法原理等價的敘述。

2.最小自然數原理：任意自然數集合必包含最小的自然數。請說明，數學歸納法原理與最小自然數原理是等價的。

3.請利用數學歸納法證明算幾不等式：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\qquad a_i\geq 0\quad \forall i=1,2,\cdots,n$$

並指出等號成立於 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 時。

Workcard 6　數學歸納法(6)

有人在證明下列結果時，用了下面的論證：

$\boxed{\text{case 1}}$：證明 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$

檢證：$n=1$ 時　$1=1^2$

論證：假設 $n=k$ 時成立，即 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

$n=k+1$ 時

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=\frac{1+(2k+1)}{2}\cdot(k+1)=(k+1)^2 \text{ 亦成立}$$

所以由數學歸納法可得證　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\quad\forall n\in N$

$\boxed{\text{case 2}}$：證明 $0.99999\cdots<1$

檢證：$n=1$ 時　$0.9<1$

論證：假設 $n=k$ 時 $0.\underbrace{999\cdots9}_{k}<1$ 成立

$n=k+1$ 時，因為 $0.\underbrace{999\cdots9}_{k+1}=0.\underbrace{999\cdots9}_{k}+0.\underbrace{000\cdots0}_{k}9<1$　亦成立

所以由數學歸納法可得證　$0.99999\cdots<1$

問題與討論：

1. $\boxed{\text{Case1}}$ 中之論證有沒有問題？請說明你的結論與理由。

2. $\boxed{\text{Case2}}$ 中之論證有沒有問題？請說明你的結論與理由。

3.另一個誤用數學歸納法的例子：

證明你永遠吃不飽!

(1)n=1,你吃一粒米飯,吃不飽

(2)若你吃 k 粒米飯吃不飽,則你多吃一粒也不會飽

由數學歸納法,你永遠吃不飽,得證!

你的意見如何呢？

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學)
英國劍橋：李佳嬅（李約瑟研究所）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）陳春廷（寶山國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）