HPM通訊

第八卷 第五期 目錄(2005年5月)

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

論文摘要：《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》

台師大數學系博士 蘇意雯老師

在數學教學上輔以歷史取向，自從 1970 年代初創立的數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM），就是以此為首要目標。如何讓數學史可以在數學的「教學」和「學習」中，扮演更有效的角色，是有心從事 HPM 教學的教師相當關心的課題。本研究是以學校為中心，由同校教師組成實踐社群，讓學校不只是學生們的學習環境，同時也成為教師們在職教育的場所，並透過協同行動研究的方式，觀察參與教師在學習 HPM 教學中，如何調融數學史與數學知識，經由自我詮釋進行教學的轉變歷程。具體而言，我們企圖解答如下兩個問題：

1. 以學校為中心，甚麼是 **HPM** 為進路的教師專業發展之策略？
2. 以學校為中心，**HPM** 為進路的專業成長策略下，參與之數學教師有了什麼轉變？

在本研究進行過程中，參與教師 (連同研究者共有四位) 經歷了直觀期、面向擴張期、適性期三個階段。這其中所發展出的策略有：

- 廣泛閱讀數學史及數學教學相關書籍
- 利用認知三面向的學習工作單之設計，引動教師融入數學史於數學教學
- 藉由教學後實作心得促成反思
- 多方面參與和數學教育 / **HPM** 有關之座談與研討
- 定期專家諮詢
- 以學校為中心之實踐社群方式帶動共同成長

其中涵蓋邏輯、歷史、學生認知三面向的HPM學習工作單，連結了參與教師對於HPM理論的了解與實作。根據參與教師學習HPM的教學過程，研究者仿造詮釋學理論，提出「HPM教師專業發展模型」，從中顯示參與教師如何在HPM學習工作單的設計過程中，體會C_1(由教科書編者、課程標準與教科書內容所組成之循環)，以及C_2 (由古代數學家、數學物元、

數學理論所組成之循環) 之精神，經過自我詮釋之後進行教學。此外，我們也利用外顯的教學行爲觀察，將參與教師在數學課堂上對於HPM教學的概念化後的實作表現，刻劃成爲「分離」、「外加」、「引介」、「執行」、「和諧整合」、「決策」幾種狀態。最後，並提出「優選」狀態，作爲教師專業發展未來所努力的理想境界之一。

最後，本論文闡明上述所發展的策略可以促成參與教師如下的轉變：

- **HPM** 教學者身分的轉變
- 科普寫作的參與
- 反思、批判性能力增強
- 引動數學知識的統整
- 導向以學生爲主體的教學

有關本研究之結論如何推廣至在職教師訓練課程，以及對於有心想要自我充實或學習 HPM 教學的教師，研究者也提出具體建議，從而證成數學史融入數學教學的發展與實踐，可以成爲數學教師專業發展的進路之一。

關鍵詞：數學史、HPM 教師專業發展模型、反思、詮釋學。

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂**PDF**電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學)
英國劍橋：李佳嬅（李約瑟研究所）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）陳春廷（寶山國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）

《中國曆法與數學》自序

中國西北大學數學系 曲安京教授

一年多以前，就打算使自己在中國古代數理天文學領域的探索，儘快地進入收官的階段。既不是厭倦了，也不是無所事事，只是想嘗試一些新的東西。迄今爲止，我一直專心致志地駐守在這個領域，心無旁騖。作爲一個階段的總結，我想在本書的前面先剖白一下自己入道以來的心路歷程，希望這些文字能夠有助於師友們更好地理解我和我的一些想法。

1987 年底，在李繼閔與白尚恕先生的共同安排下，我到北師大進修天文學與天文學史。那個時候我已是數學史專業二年級的碩士生了，但是，對自己的專業前途仍然懵懂不清。

那一年的冬天，北京的大街上到處都流行著齊秦的“我是一匹來自北方的狼”，有時候一個人徜徉在夜幕下的校園裏，耳邊呼嘯著淒厲的北風，聯想到曠野中那匹茫然的狼，不免覺得前景有些慘澹。

但是，就在不遠的地方，分明有一處輝煌的所在，那裏聚集了太多精明的獵手，有些人在追逐新的目標，有些人在捕食受傷的獵物，還有些人在爭奪那些已經死亡的犧牲品，大家都忙得不亦樂乎。

當時，我非常崇拜自己的老師，我尾隨著他們發現的任何蛛絲馬跡，似乎都早已在他們的掌控之中。這個令人沮喪的事實教我明白，我既不如他們機敏，也遠沒有他們強壯。如果加入他們的會戰，頂多是參加了一場盛宴，但分到的不過是一杯殘羹剩汁罷了。更加糟糕的是，在我的感覺裏，自己遲到了一步，高潮即將過去，獵物正在減少，有些人甚至已經開始打掃戰場了。

我有些於心不甘。就像歌裏的那匹無知，而又野心勃勃的狼，“咬著冷冷的牙”，血液裏卻澎湃著一種年輕的、不可遏止的衝動。我並不害怕競爭，擔心的是最終會一無所獲。因此，只得遠遠地欣賞著老師們彼此間的競爭。那是一種短兵相接的混戰，有些人不斷地有所斬獲，成爲眾人矚目的明星，而更多的人跟我一樣，只能夠眼睜睜地作爲他們的看客。

人與人爲什麼會有這樣的不同？我原本以爲這是先天的差距，後天是無可奈何的。

但是，一場企業家的演講，改變了我的看法。那家企業有兩名同齡的年輕人，一位對上司交待的任務從來不打折扣，中規中矩，無可挑剔；另一位喜歡翹著二郎腿看天花板，常常別出心裁。幾年後，看天花板的成了公司的副總，而他的同事仍然在原地踏步。那位企業家解釋道，天花板並沒有什麼特別之處，但是厲害的人，卻能從中讀出名堂來。

我於是恍然大悟：對於大部分獵手來說，缺乏的不是獵物，而是捕捉獵物的眼光。許多情況下，困難不在於如何征服，而在於如何發現。一個成功的獵手，可以發現隱蔽得很深的獵物；而一個不成功者，即使獵物就在眼前，也會視而不見。這就是差別。

這個道理，老師們是教給過我的。一代又一代成功的前輩們都向他們的學生傳授過這樣的經驗。但是，真正體悟到這個道理的學生卻並不是很多。慶倖的是，我覺悟到了這一點，還不算太晚。競爭，其實並不可怕，可怕的是，把競爭僅僅寄託於爭奪並佔有那些瀕死的獵物，而不是去發現一些新的、鮮活的目標。

有了這個收穫墊底，我想，也許有一天，我也會像前輩們一樣出色，成爲一個好的獵手，開闢一片雖然不大，但是屬於自己的園子。這就是 17 年前的那個冬天，我的夢想。

17 年來，我一直按照這個目標經營著自己的夢想，始終沒有放棄。我體會到了狩獵的快樂，並且樂此不疲。雖然這些年來，偶爾也會受到一些專業的歧視、世俗的誘惑，有過挫折，甚至失敗。但是，一路走來，雖然艱辛，卻從未感覺到痛苦和乏味。

我並不奢望自己有什麼大的成就，也深知距離那些令人景仰的前輩們還差的不可以道里計，但是，我卻從不諱言學術研究帶給自己的滿足感。這種感覺令我的生活充實而快樂，同時又充滿了危機感，因此，總是不斷地提醒自己，下一步，我該做什麼？

這些追問促使我不停地思考：爲什麼要研究科學史？誰需要科學史？科學史究竟是幹什麼的？

雖然我並不悲觀，但也從不盲目樂觀。作爲一個職業的數學史家，數學史已然成爲了我生命的一部分。我試圖從前輩們在這 100 年來的風風雨雨中走過的歷程，尋找上述問題的答案，我把自己的思考寫了下來，作爲本書的第一章，請朋友們指正。

我覺得，一個有理想的學者，應該未雨綢繆，多一些憂患意識。道理很簡單，如果沒有了獵物，獵手就要下課。如果沒有了問題，學科就會死亡。與此同時，經驗又告訴我，找不到獵物，並不是獵物滅絕了，而是缺乏發現；提不出問題，也並不是問題沒有了，同樣是缺乏發現。因此，需要時刻保持清醒的問題意識，這樣才能夠延長自己的學術生命，甚至探索一些新的領域。

進入不惑之年以後，我盤算著出一本有關中國古代數理天文學的書，以便作爲自己學術生涯的第一個階段的總結，至少對於我來說，它們記錄了一段有趣的歷史。

原以爲，有以前的論文作爲毛坯，只需編輯加工一下就可以了。可是，動手之後，便發現按照開始的想法，不僅書的結構會比較紊亂，內容也非常龐雜。所以，就決定花些功夫，仔細地整理一下，這樣一來，原來設想中的那本書就被一分爲二了。

這本《中國曆法與數學》，全面闡述了中國古代天文常數系統的發現與應用、討論並復原了傳統數理天文學中之主要數學方法的構造原理、發掘了一批從未引起學術界注意的太乙術數中的曆法。由於從本質上講，曆法，不外乎天文常數的選擇以及各種推步演算法的建立，因此，本書的內容主要是在探討中國曆法的構造機理及其數學思想。

就關注問題的角度與解決問題的方法而言，本書都十分強烈地帶有過去 20 多年中國數學史界所流行的色彩：既重視對新史料的發現，更重視對原始演算法之數學思想的復原。這些內容，反映了一個成長於 1980 年代末期的青年數學史家眼中的中國古代數理天文學的某些基本問題。

如果說現在這本書討論的主要問題，是中國古代曆法中的常數與演算法是如何選擇與構造的，那麼，正在撰寫的第二部書稿，將會比較系統地闡述這些常數與演算法是如何應用的。在那裏，我們將仔細地討論包括日月食與行星運動理論在內的中國古代數理天文學的具體內容與方法。這兩本書作爲姊妹篇，構成了同一主題的兩個方面。

當然，感謝的話是永遠不會忘記的。借用一個有點庸俗的比喻，如果幸福的第一個數字是 1，那麼老師的引導、朋友的幫助、家人的關懷、學生的期待、領導的扶持、自己的壓力就是它後面不斷增加的 0，缺少了它們，所有的快樂都會迅速貶値的。心存感激，等

到第二本書完成的時候再一起說出來吧。

2004 年盛夏的西安出奇的溫和，讓我可以靜心地寫完計畫中的第一本書。在書稿完成的那一天，我問剛上初中的兒子，這本書取個什麼名字好。兒子聽了我的介紹後，不假思索地說：就叫《曆法的奧秘》吧。他說，這樣的書名，也許能夠吸引小朋友來購買。我告訴他，自己並不在意有多少人會買這本書，甚至可以肯定，不會有多少讀者讀這本書。兒子問，那你寫它的意義何在呢？

是啊，經常會有人問我類似的問題：你做的這些到底有什麼用呢？我總是心有戚戚地回答，沒什麼用。不過，看到對方狐疑的目光，有時候會接著說，如果你熟悉科學史，你就會明白，科學家很少是以有用爲目的來從事他們的研究的，對於科學家來說，科學的目的，就是爲了滿足人類的好奇心。那麼，對於一個數學史家來說，破解一些被歲月塵封的歷史之謎，就是滿足我自己最大的好奇心了。

給歷史留下一份檔案，這就是我的目的。

我想，這也是我們這套叢書的一點願望吧。

2004 年 10 月 13 日于英國劍橋李約瑟研究所

余介石、倪可權《數之意義》(台北：商務印書館，1966 年臺二版)：

歷史之於教學，不僅在名師大家之遺言軼事，足生後學高山仰止之思，收聞風興起之效。更可指示基本概念之有機發展情形，與夫心理及邏輯程序；如何得以融和調劑，不至相背，反可相成，誠為教師最宜留意體會之一事也。Klein 氏有言，『按生物進化 biogenetic 之基本原則，即人發展之程序與種族發展情形大體相同。……余思算學教育至少在一般情形下，必遵守此原則，一如其他事理然。教育之力，應使青年粗具之才能，漸導入高深事理，而終於抽象之形式；人類自簡陋原始狀態努力進達高深知識所取之途徑，皦今日所當循守者也。此項原則所以時時提出者，乃因常有近於煩瑣哲學派之人士，每自最普遍之觀念，為教學起點，迴護其法為“唯一之科學方法”。此理由實全無根據。科學之教育云者，乃能導人作科學方式之思考，而決非於開始時，即置冷酷之科學形式系統於其前也。此種極自然之真正科學教育，推行上有一主要障礙，即為歷史知識之缺乏，……余信已使君等必能瞭然一切算學觀念之如何逐漸完成；此等觀念之初現，大低皆類乎預言，必經長期之推展，始結晶成堅固之形態，如有系之敘述中所習見者。余切望歷史知識對君等教學之方式上，有不可磨滅之影響焉。』著者之期望我國中等算學教師者，亦猶是耳。

從正焦弦看圓錐曲線

西松高中 蘇惠玉老師

現行高中數學在「圓錐曲線」的單元教材方面，在「南一版」的教科書中，以平面與圓錐的截痕引入拋物線、橢圓、雙曲線的名稱，再各別以作圖方式先畫出曲線，想以不同於截痕的方式來作出曲線，再給出「定義」，然後藉由坐標系導出方程式，從方程式中看出或驗證出相配合的幾何性質。而「龍騰版」的教科書，則是從過去的生活或學習經驗中找出這樣的曲線，再給出定義，至於平面與圓錐的截痕則是安排在最後。不管是「南一版」或「龍騰版」，我想「讀者」或學生一定會有這樣的疑惑：圓錐截痕真是課本所定義的拋物線、橢圓或是雙曲線嗎？圓錐截痕與課本的定義到底有何關係？圓錐曲線的正焦弦到底有何用處？本文的重點在於我想要在圓錐截痕與課本的焦點定義方式間，做一座橋樑來連結，讓「圓錐截痕」的幾何思維方式，與課本的解析幾何式的代數思維有一個較好的聯結，這一個連結點就是阿波羅尼斯的正焦弦。

在現行高中教材中，對圓錐曲線的定義以焦點來著手，拋物線為「到焦點與到準線的距離相等」，橢圓為「到兩焦點距離和等於一定值」，雙曲線為「到兩焦點的距離差等於一定值」，利用這樣的定義方式，能夠很容易導出這三個圓錐曲線的代數方程式。在教學過程中，老師也常常會以例子提供另一種定義方式，以到準線與到焦點的距離為主，即 $d(P,\ F)=e\cdot d(P,\ L)$，當 e＝1 時為拋物線，當 e<1 時為橢圓線，當 e>1 時為雙曲線，e 稱為離心率；在橢圓與雙曲線中，e 亦可定義為兩焦點之距離與長（貫）軸的比值。

若我們從定義方式所得到的代數式來看，無論是焦點定義或是離心率的定義方式，得到的拋物線方程式為 $y^2=4cx$，橢圓為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，雙曲線為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。從代數方程式的表徵來看，方程式與幾何圖形之間，甚至是與「圓錐曲線」名稱的關連，都讓人感覺無從著手，一片茫然。從「圓錐截痕」的角度來看，一平面與一圓錐相交時，若平面稍微傾斜不與對稱軸垂直，截痕為橢圓；若平面與圓錐的一條母線平行，截痕稱為拋物線；平面的傾斜度再加大，與圓錐的兩錐面都相交，截痕為雙曲線。教科書中的定義方式，或其得到的代數方程式，都與圓錐截痕沒有直接的關係。我們若要將「圓錐截痕」與「焦點定義方式」做一等價連結，大部分都是利用 A. Quetelet 與 G. Dandelin 於 19 世紀中所給出的一個定理：橢圓（截痕）即是平面上到兩固定點距離和為定值的點所成的軌跡。證明在平面與圓錐的截痕（此為橢圓）上下各塞一個球，其與平面相切的地方即為橢圓的焦點，再證明橢圓截痕上的任一點到此兩切點（即為焦點）的距離和為一定值即可。

若我們從史料的觀點來看「圓錐截痕」，一般認為古希臘數學家對圓錐曲線的興趣來自於「三大作圖題」中的「倍立方」問題，倍立方問題即為如何一個正立方體的體積加倍，而且維持同樣為正立方體；換句話說，即是將一個邊長為 a 的正立方體體積加倍，要作出一新的正立方體之邊長 x，滿足 $x^3=2a^3$。在只能利用尺規作圖的限制下，這個問題當然沒有辦法解決；若沒有這個限制，這個問題被希波克拉提斯歸結為作出兩線段長 a 與 2a 的兩個連續比例中項。也就是說，要作出兩線段 x, y 滿足

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

x 即為所要求的新正立方體的邊長。

希波克拉提斯的發現並沒有解決倍立方的問題，只是將問題轉換成另一形式而已。但是如何作出兩個比例中項 x 與 y 呢？Menaechmus(約 350B.C.)引入新的曲線，即圓錐曲線來解決這個問題：

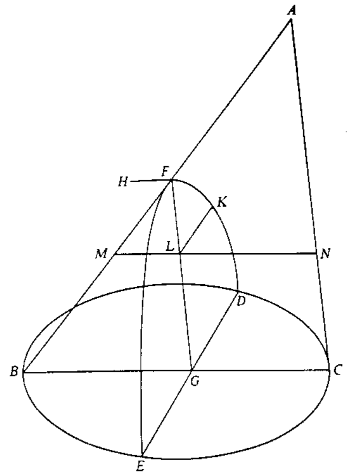
將連比例式拆成兩個等式：$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$ 及 $\frac{a}{x}=\frac{y}{2a}$，從此，可得方程式 $x^2=ay$（或是 $y=\frac{1}{a}x^2$），及 $y^2=2ax$（或是 $x=\frac{1}{2a}y^2$）。從這裡，我們可以看出拋物線的正焦弦所代表的一個幾何意義，即是拋物線上一點的 y 座標（或 x 座標）為 x 座標（或 y 座標）與正焦弦的等比中項(幾何平均數)，但是，同樣是圓錐截痕的橢圓與雙曲線的正焦弦呢？正焦弦在圓錐截痕與方程式中的地位到底為何？阿波羅尼斯在他的《錐線論(*Conics*)》中給了我們清楚且完整的正焦弦的意涵。

阿波羅尼斯 (Apollonius of Perga, 約 262B. C. ~ 約 190B. C.) 的《錐線論》共八卷，其中第七卷已失傳。前四卷為基礎部分，後四卷為拓廣的內容。第一卷為這三個曲線的一般性質；第二卷為直徑(diameters)、軸和漸近線的性質；第三卷中含有現今所知的焦點性質。阿波羅尼斯在第一卷中，即先定義何謂「圓錐」，以及「直徑」：

> Of any curved line which is in one plane I call that straight line the diameter which, drawn from the curved line, bisects all straight lines drawn to this curved line parallel to some straight line; ……

亦即，直徑為過一組平行弦中點的線段，其端點在曲線上。

阿波羅尼斯在卷一的第 11、12、13 命題，引入何謂拋物線、雙曲線與橢圓。他從過圓錐中心軸的縱切面來討論（即下面各圖中的三角形 ABC，BC 圓為底圓）：



> **設有一圓錐，頂點為A，底為圓BC。令其被過軸的平面所截成的三角形為ABC [I. 3]。又圓錐被另一與底交於直線DE的平面所截，DE與線段BC垂直。設這樣在圓錐表面形成的截痕為DFE，其直徑為FG [I. 7 and def. 4]，平行於軸三角形的一邊AC。<u>又設過F點作直線FH垂直於直線FG，並且使它按比例：正方形BC： 矩形BA, AC:: FH : FA作出。</u>**
>
> **在截線上任取點 K，過 K 作直線 KL 平行 DE。**
>
> **我認為正方形KL＝矩形HF, FL。[1]**

這樣的截痕 DFE，阿波羅尼斯稱為「拋物線」：**And let such a section be called a parabola**。

此命題的結論，若以直角座標系的角度來看，任一點 K 的縱座標（y 座標）為 KL，橫座標（x 座標）為 LF，即可得方程式 $y^2=px$，此處 p＝HF，即一般所稱的「參量」(parameter)

或是「正焦弦」(*latus rectum*)。

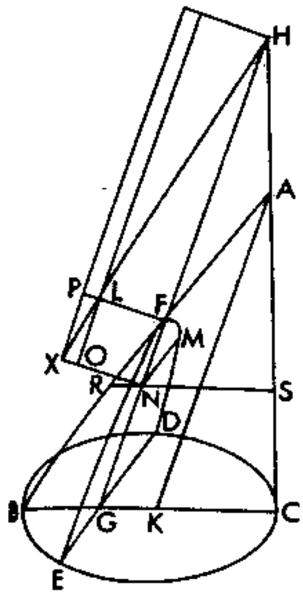
他在命題 12 中引入何謂雙曲線：

設有一圓錐，頂點爲A，底爲圓BC。令其被過軸的平面所截成的三角形爲ABC [I. 3]。又圓錐被另一與底交於直線DE的平面所截，DE與線段BC垂直。設這樣在圓錐表面形成的截痕爲DFE，其直徑爲FG [I. 7 and def. 4]，延長FG與AC，交於圓錐頂點外一點H。直線AK爲過A點平行直徑FG，交BC於K點。從F作FG的垂直線FL，使得

正方形KA：矩形BK, KC : : FH : FL

在截線上任取點 **M**，過 **M** 作直線 **MN** 平行 **DE**。過 **N** 作直線 **NOX** 平行 **FL**，連接 **HL**，延長至 **X**，連直線 **LO**，**XP** 平行 **FN**。

我認爲正方形**MN**＝平行四邊行**FX**，其正方形貼合 **(applied to)** 到**FL**，以**FN**爲寬度，並超過一個圖形**LX**，相似於矩形**HF, FL**。[2]



他稱這樣的截痕 DFE 爲「雙曲線」: **And let such a section be call an hyperbola**。

此命題的結論，若以直角座標系的角度來看，任一點 M 的縱座標（y 座標）爲 MN，橫座標（x 座標）爲 FN，即可得方程式 $y^2 = px + \frac{p}{2a}x \cdot x$ ，此處 p＝FL，同樣爲「正焦弦」(*latus rectum*)，2a=HF，爲貫軸長。

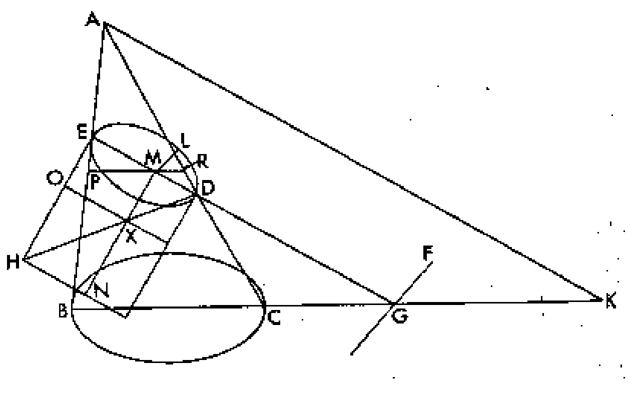
在命題 13 中：

設有一圓錐，頂點爲A，底爲圓BC。令其被過軸的平面所截成的三角形爲ABC。又圓錐被另一平面所截，此平面一方面與軸三角形交於兩邊，另一方面，延長後既不平行圓錐的底也不相反 (subcontrariwise)，DE爲此平面與軸三角形在圓錐表面的交點。截平面與圓錐的底所在之平面的交線爲FG，垂直線段BC，ED爲截痕的直徑 [I. 7 and Def. 4]。過E作直線EH垂直ED，過A作直線AK平行ED，滿足

正方形AK：矩形BK, KC : : DE：EH

在截線上任取點 **L**，過 **L** 作直線 **LM** 平行 **FG**。

我認爲正方形**LM**等於某一面積，其貼合 **(applied to)** 到**EH**，以**EM**爲寬度，並缺乏一個圖形，相似於矩形**DE, EH**。[3]



他稱這樣的截痕爲「橢圓」：**And let such a section be call an ellipse**。

此命題的結論，若以直角座標系的角度來看，任一點 L 的縱座標（y 座標）爲 LM，

橫座標（x 座標）爲 EM，即可得方程式 $y^2 = px - \frac{p}{2a}x \cdot x$，此處 p＝EH，同樣爲「正焦弦」(*latus rectum*)，2a=ED，爲長軸長。

阿波羅尼斯在命題 11 證明完畢之後，寫道：

> And let such a section be called a parabola, and let HF be called the straight line to which the straight lines drawn ordinatewise to the diameter FG are applied in square and let it also be called the upright side (óρθíα).

在將阿波羅尼斯所使用的文字翻譯成英文時，所使用的「參量」(parameter)，例如卷一命題 11 中的 FH，命題 12 中的 FL 以及命題 13 中的 EH，原是 “the straight lines drawn ordinatewise to the diameter are applied in square”，亦即「沿直徑的縱座標所做的直線，都以正方形貼合到其上的直線」。在《錐線論》這本書的後段，這一段話翻譯簡化成「the parameter of the ordinatewise to the diameter」。如拋物線 (parabola) 時，KL 上的正方形面積等於以 FL 爲一邊，貼合到 HF 上的長方形面積(貼合意即矩形的另一邊與 HF 重合)。雙曲線 (hyperbola) 時，MN 上的正方形面積等於以 FN 爲一邊，貼合到 FL（正焦弦）上的長方形再超出一個長方形的面積。橢圓 (ellipse)時，LM 上的正方形面積，等於以 EM（正焦弦）爲一邊，貼合到 EH 的長方形再缺少一個長方形的面積。

在阿波羅尼斯命名 parabola., hyperbola, ellipse 時，即是利用圓錐截痕上一正方形與正焦弦爲一邊的長方形面積作比較，相等、大於或是小於來命名。事實上，這種「面積貼合」的方式，來自於畢達哥拉斯學派的「application of areas」的方法，畢達哥拉斯或其學派的人，將二次方程式的解（一個幾何量的解）與一已知線段的長度作比較時，以下三種情形有一種會發生：短於 (fall short)、超過 (exceed) 或是當好 (fit)；這三種情況被命名爲 *elleipsis*, “defect”；*hyperbole*, “excess”；*parabole*, “a placing beside”。

阿波羅尼斯在卷一的命題 11 寫到這個線段（參量），也叫做 óρθíα（原文中的英譯爲 upright side，即豎直邊），拉丁文翻譯時譯作 *latus rectum*，也成爲一個英文名詞，即是「正焦弦」之意。當一個平面跟圓錐相截時，在這個截痕的圖形中，它的「正焦弦」這一段長度即已經固定，阿波羅尼斯利用「比例（a : b :: c: d）」，並以垂直於「直徑」的方式作出這一段線段。在古希臘人比例式中，「::」意指「類比 *analogia*」，史家 M. Fried 認爲阿波羅尼斯所用的「類比」，不只是比例式的抽象操弄而已，更是「類比」於它所代表的幾何意義。他認爲，圓錐截痕中的「直徑」與「正焦弦」合成一個圓錐截痕的「圖象」(figure)，經由這個圖像，可以「類比」出這個圓錐截痕的特性。所以，阿波羅尼斯將正焦弦稱爲 “upright side”，即是意指這個矩形的一邊，再者阿波羅尼斯以這個矩形來表徵圓錐截痕，我們可以輕易的將這種方式改成直角座標系中的方程式表徵形式：$y = px \pm \frac{p}{2a}x^2$。

從這個方程式 $y = px \pm \frac{p}{2a}x^2$，我們可以看到圓錐曲線的幾何面向與代數面向作一個比較好的結合，正焦弦這一段長度也不再只是需要背誦的數字而已。在圓錐曲線的各式各樣定義方式中，如果從拋物線（相等）、橢圓（小於）、雙曲線（大於）的原始意義當成起點，再以正焦弦作融會貫通的黏和劑，圓錐曲線的學習就不再是瑣碎、無聊的代數式操弄；拋

物線、橢圓、雙曲線也不再各自爲政，而是真正融合一體的「圓錐曲線」，也才能達到真正的「數形合一」的教學目標。

註解：

1. 命題 11 在此段文字前面的原文爲：

   如果一圓錐被過其軸的一個平面所截，同時又被另一與圓錐的底交於一直線的平面所截，其交線垂直於軸三角形的底邊。進而，如果截痕的直徑平行於軸三角形的一邊，那麼任一連接圓錐截痕和其直徑的直線，且平行於截平面與圓錐底之交線，其平方將等於兩線段所包含的矩形，其中一線段是從截痕的頂點開始，到上述直線在直徑上截取的部分 **(the straight line cut off by it on the diameter beginning from the section's vertex)**；另一線段則滿足這樣的比例：它比上圓錐頂點與截痕頂點之間的線段，等於軸三角形底邊上的正方形比上軸三角形其餘兩邊所包含的矩形 **(another straight line which has the ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section that the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of the triangle.)**。這樣的截痕叫做拋物線 **(And let such a section be called a parabola.)**。
2. 命題 12 在此段文字前面的原文爲：

   如果一圓錐被過其軸的平面所截，同時又被另一與圓錐的底交於一直線的平面所截，其交線垂直於軸三角形的底邊。又如果截痕的直徑延長後與軸三角形的一邊交於圓錐頂點之外，那麼任一連接圓錐截痕和其直徑，且平行於截平面與圓錐底之交線的直線，其平方將等於某一面積，此面積貼合 **(applied to)** 到一直線上，此直線滿足這樣的比例：沿著直徑增加到其與軸三角形一邊之交點的直線長 **(the straight line added along the diameter of the section and subtending the exterior angle of the triangle)** 比上此直線，等於從圓錐頂點連到三角形底並平行直徑的直線上的正方形，比上剛剛的直線在三角形底上交點所成兩線段所作之矩形。這個面積的寬度是截痕與直線的連線，在直徑上截取的從截痕頂點開始的一段，並超出一個圖形，這個圖形相似於，並且在位置上也相似一個矩形，爲以包含直徑延長至軸三角形外之那個交點的直線與這個參量 **(the parameter)**（見附錄 **2**）所成的矩形。將這樣的截痕稱作雙曲線 **(And let such a section be call an hyperbola)**。
3. 命題 13 在此段文字前面的原文爲：

   如果一圓錐被過其軸的平面所截，同時又被另一平面所截，此平面一方面交軸三角形的兩邊，另一方面與底既不平行也不相反 **(subcontrariwise)**。又如果圓錐的底所在的平面，與此截平面交於垂直於軸三角形的底邊或其延長線的一直線，那麼從圓錐截痕上任一點作向此截痕的直徑，且平行於截平面與圓錐底所在之平面之交線的直線，其平方將等於某一面積，此面積貼合 **(applied to)** 到一直線上，此直線滿足這樣的比例：此截痕的直徑比上此直線，等於從圓錐頂點連到三角形底邊並平行直徑的直線上的正方形，比上這直線所截得的從三角形兩邊開始的線段所包含的矩形。這個面積的寬度是截痕與直徑的連線在直徑上所截取的從截線頂點開始的線段，並缺少一個圖

形，這個圖形相似於，並且在位置上也相似一個矩形，爲以直徑與這個參量 **(the parameter)**所成的矩形。將這樣的截痕稱作橢圓 **(And let such a section be call an ellipse)**。

參考文獻

Apollonius (1952), *Conics* (tr. R. C. Taliaferro), in G*reat Books of the Western World*, Encyclopaedia Britannica.

Bunt, L. N. H. *et al* (1988), *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover.

Eves, H. (1976), *An Introduction to the History of Mathematics*, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Fauvel, J and J. Gray ed.(1987), *The History of Mathematics: A Reader*. London: The Open University.

Fried, M. (2003), The Use of Analogy in Book VII of Apollonius' *Conica*, in *Science in Context* 16(3).

Isoda, Masami (2000), The Use of Technology in Teaching Mathematics with History--Teaching with modern technology inspired by the history of mathematics, in *Proceedings of the HPM 2ooo Conference*. Taipei: Department of Mathematics NTNU.

Lui, K.W. (2003), *Study of Conic Sections and Prime Numbers in China: Cultural Influence on The Development*, *Application and Transmission of Mathematical Ideas*, The University of Hong Kong.

Van Maanen, Jan A (1995), "Alluvial Deposits, Conic Sections, and Improper Glasses, or History of Mathematics Applied in the Classroom", in F. Swetz *et al* eds., *Learn From The Masters!*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kline, M. (1983), 《數學史—數學思想的發展》，林炎全、洪萬生、楊康景松譯，台北：九章出版社。

李文林主編 (2000)，《數學珍寶》，台北：九章出版社。

梁宗巨 (1995)，《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

科普書評：《數學的故事》

台師大數學系碩士班研究生　歐士福

書名：數學的故事 (譯自：The History of Mathematics)
作者：理查・曼奇維茲 (Richard Mankiewicz)
譯者：蔡信行
出版：世潮出版有限公司
出版日期：初版一刷 2004 年 2 月
頁數：253 頁
定價：450 元
ISBN：957-776-588-2

從事數學教育工作的人，我想大部分都被學生問過這樣的問題：「學那麼多數學要幹嘛？以後又用不到！」當然，這是因為對數學的不了解，而產生的疑問。誠如數學家伊安・史都華 (Ian Stewart) 在本書序中所言：『我終於領會到自己大半生所作的，都是試圖去拆解人們想法裡的一小段迴路。這一小段迴路若用一個方程式來概括，那就是數學=學校。』可見不論中外，數學教育都很難與生活產生有效的連結。的確，在操弄那些醜陋又奇怪的符號的過程中，大部分學生是無法感受到數學的實用性及其美感，再加上考試所附加的壓力，學生自然認為，只要離開了教室，數學這惡魔也會消失。或許，在學習壓力下得到『恐數症』(Mathophobia) 的機會，會比在生活壓力下得到憂鬱症還來得更高。

近年來科普書籍的普遍發行，或多或少可以幫助數學以一個較可愛的面貌呈現給社會大眾。當然，寫作的手法以及內容，也關係著讀者是否會受到『二次傷害』，對數學更是敬而遠之。然而本書中，作者試圖呈現一本『很容易理解的數學歷史書，而不是只是帶讀者讀一系列的「大定理」。』而且作者也『挑選故事發展的最精彩片段，一些大大改變世界文明命運的事件。』來凸顯數學觀念的發展對人類文明所產生的影響。我們不難想像，數學發展的起源，肯定與人類活動密切相關，『舉凡交易、農作、宗教、打仗—每一樣都受到數學的影響，這些也反過來影響數學的思考。』因此，在我們力求數學應該生活化的同時，不妨也回到歷史的脈絡中，看看古人是如何將『生活數學化』？

在本書中，作者也如同一般數學史書籍，大致依照歷史的進路來鋪陳其故事情節。全書共分成 24 個單元，從作者所謂數學發展「第零年」的上古時代開始講起，跨越了中世紀和文藝復興時期，一直到近現代各種高等數學的發展，最後以各種應用數學，以及與迷人的碎形幾何學相關的「混沌與複雜」作結。不過，最令人興奮的是，本書在每個單元中，都附加了大量的彩色照片與圖片，讓讀者不致於憑空想像，而能夠藉由圖片的輔助，更貼近其故事情節。以下筆者將粗略地把本書內容分為三部分，並加以簡述，其依次為：「古老時期」、「中世紀和文藝復興時期」、「近現代時期」。[1]

一、古老時期：

這個時期的內容，大致包含了書中第一到第五單元，分別是「第零年」、「觀測天象」、

「畢達哥拉斯定理」、「幾何原本」以及「中國的十部算經」。作者從目前發現最早的記數工具談起，亦即在史瓦濟蘭挖掘到，大約是西元 35000 年前的狒狒腓骨，上面刻有 29 個凹槽，根據推測是用以記錄時間的過往。而巴比倫的數學文化，我們可以從大量發現的泥板中一窺究竟，其中當然包括了他們所使用的六十進位制，以及現今大家所熟知的畢氏數。埃及數學中，當然也免不了必須提到他們使用分數時最大的特點，就是只允許使用單位分數 (1/2、1/3、…) 來表示所有的分數 (除了 2/3 以外)。

當然，除了交易與農業發展出來的數學問題之外，也有許多由於觀測天象而發展出的曆算學。除了巴比倫和埃及之外，中美洲的馬雅文化也發展出相當有趣的曆法，據說馬雅的曆法共有三種，而三種曆法分別都有不同的用途。而古希臘時期的天文學，歷經柏拉圖與亞里斯多德等人的各種觀點，直到托勒密的學說出現後，整個天體運行的理論才算有了初步完整的結構。當然，某些理論 (例如地心說) 在我們現代人眼裡看來，是與事實不符的，但其在人類歷史的發展中，卻著實地影響了 1400 年之久，直至十六世紀才被推翻。

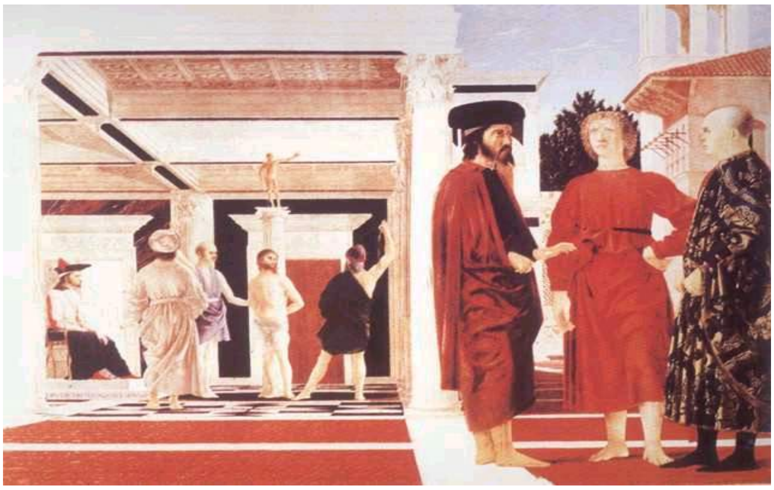
至於偉大的畢氏定理，作者先以巴比倫的數學泥板中發現的畢氏數談起，再分別述及印度吠陀時期 (Vedic period) 的《吠陀經》(Vedas)，以及中國的《周髀算經》中所談到有關直角三角形的性質。當然，還是得回歸到此定理的名稱，亦即畢達哥拉斯本人的生平。作者雖然也『依照慣例』地談起畢氏學派的神秘色彩，然而可惜的是，雖然提及畢氏學派「萬物皆數」的教條，卻未提醒讀者這裡所指的其實是正整數；而且對於畢氏學派因信奉此教條，而產生與「不可公度量」之間的衝突，作者也未加以詳細著墨，這對讀者而言，就像是錯過了一場精彩好戲！

關於「幾何原本」一章，作者也依序為《幾何原本》的內容加以簡略描述，然而或許是因為翻譯的難度，造成某些地方語意不清、難以理解。例如：『……而在《提茂斯》(*Timaeus*) 中我們發現一種改裝的畢達哥拉斯法，柏拉圖立體以四個元素和十二面體作為整個宇宙的象徵。』事實上柏拉圖多面體即五種正多面體，其中分別代表風、土、水、火及宇宙(即正十二面體)。至於譯者所謂「畢達哥拉斯法」，按原作書中此處應為「畢達哥拉斯主義」(Pythagoreanism) 才是。而為何以「改裝的畢達哥拉斯主義」稱之？作者本身似乎也未加以解釋，甚是可惜！[2]另外也有一處翻譯上的脫誤，在談到《幾何原本》第六冊的內容時，『……如果我們改用直角三角形每一邊作為*半徑*畫半圓，那麼……』，按原作所提為直徑 (diameter)，而非半徑 (radius)。

至於第五個單元「中國的十部算經」，雖名為『十部算經』，但作者在文中只提到了《算經十書》中的《周髀算經》與《九章算術》而已，對於其它八本算書卻隻字未提，這令筆者感到相當困惑。而且本單元大部分的篇幅，都將重心放在《九章》，甚至最後還提及秦九韶的《數書九章》一書，這顯然都與《九章算術》本身的地位有關。但在篇名與內容稍有不符的情況下，有可能讓讀者誤會《數書九章》屬於《算經十書》，而在插圖書中呈現《算法統宗》、楊輝的《詳解九章算法》與朱世傑的《四元玉鑑》，也多多少少會讓讀者產生與《算經十書》不恰當的相關聯想。[3]最後，在翻譯問題上也出現脫誤，譯者將朱世傑的「世」字，翻成了「西」字，顯然是完全依照英文譯音而來。

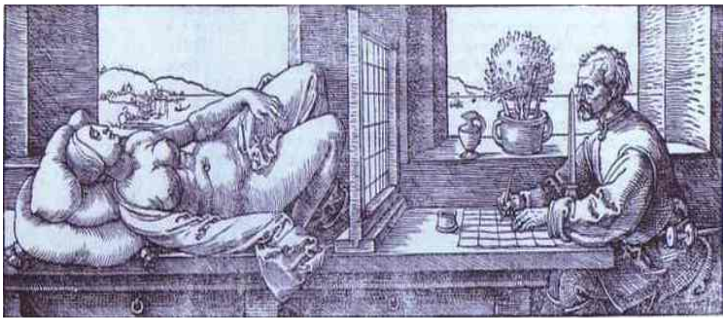
二、中世紀和文藝復興時期

此時期的範圍較廣，約從西元五世紀到十七世紀初，而在書中的分佈，大致上是從第六單元的「數學經典」，到第十二單元的「規律的宇宙」。在第六與第七單元中，作者簡單介紹了印度和阿拉伯的數學，其中當然包括了阿爾花拉子模(al-Khwarizmi) 的代數學著作，以及阿爾卡拉吉 (al-Karaji) 與奧瑪．開陽 (Omar Khayyam)等人，對於代數學上的貢獻。至於中世紀時期數學書籍的大量翻譯與傳播，則可以在第八單元中見到。而第九單元「文藝復興時期的透視畫法」，則可以看到結合數學與藝術而產生的新繪畫風格，其代表性人物當推法蘭契斯卡 (Piero della Francesca)。在書中作者也很夠意思地呈現多幅法蘭契斯卡的畫作，讓讀者們有更深的體會，右圖即為其畫作《基督受鞭圖》。



另外一位文藝復興時期著名的數學家兼藝術家杜勒 (Albrecht Durer)，也成功地結合了數學與藝術。在他的著作中，很多都是關於平面和立體幾何的，包括了構圖的方法和透視，他的著作對於建築師和工程師來說都很實用。下圖即是從他的《圓規、直尺的量測法》論文中挑選出，圖中顯示了畫家可以透過格子紗窗來透視影像。當然，這些透視觀念的成熟，也漸漸引出後來射影幾何學的產生。

至於在接下來的十到十二單元，大部分介紹了十六、十七世紀時期較出名的哲學家、數學家與天文學家，其中不乏納皮爾 (John Napier)、培根 (Francis Bacon)、卡丹諾 (Girolamo Cardano)、笛卡兒 (Rene Descartes)、哥白尼(Nicolas Copernicus) 與克卜勒(Johannes Kepler) 等人。不過，作者在此僅描述了這些偉人們的生平事蹟與重要貢獻，而忽略了這一時期西方科學哲學與宗教之間的互動關係，實在有點可惜。只是牽扯到哲學問題，有可能就會違背了作者所謂的：『很容易理解的數學歷史書』，至於作者本身是不是有此顧慮，則不得而知了。



另外，在第十單元中介紹費伯納契時，也出現一些翻譯上的小小問題。茲引書中所言：

> 1202 年，達皮薩(Leonardo de Pisa, c. 1180-c.1256, 今日人們一般稱他作斐波納契 (Fibonacci) 出版了《算盤書》(*Liber abbaci* 或 *Book of the abbacus*)，……《算盤書》的名字很容易使人產生誤解，「abbacus」這個字有兩個 b，是指利用新數字符號(即阿拉伯數字)的計算方法，其實與計算用具的算盤(abacus)一點關係也沒有。……

首先，“Leonardo de Pisa”應意指在 Pisa 出生的 Leonardo，而“de”字在義大利文的意思

中，相當於英文中的“fromf”，有「來自於」之意。然而，譯者顯然不知此一用法，而誤將“達皮薩”當成一個名字了！再者，依據原作者的說法，“a**bb**acus”會與英文中的“a**b**acus” (算盤) 產生誤解，於是，他在此將“a**bb**acus”與“a**b**acus”加以區分。但在翻成中文後，顯然並不會產生所謂“bb”與“b”的困擾才是，因此，筆者建議“*Liber abbaci*”的中文翻譯，應該是《計算書》才對，這也是現今較廣爲使用的翻譯，翻成《算盤書》反而會對中文讀者造成不必要的誤解。

三、 近現代時期

接下來從第十三單元的「運動的數學」，一直到第二十四單元的「混沌與複雜」，筆者將之歸類爲近現代時期的數學，這裡面除了近代高等數學的發展外，還包括許多應用數學的例子。其中在「運動的數學」中，可以看到作者用了許多篇幅描繪微積分的發展，以及牛頓和萊布尼茲的故事。不過，在這個單元開頭，作者嚐試介紹了阿基米得求面積的方法，作爲介紹整個微積分發展的引子。只是，當作者在提到阿基米得證明的圓面積公式時，出現如下的說法：

> 阿基米得證明兩個重要的結果，第一個是圓的面積等於直角三角形的面積，其底為圓周，其高為圓的半徑，就等於我們的公式πr^2……

在這裡作者將類似於「半周乘半徑」圓面積的公式，與πr^2劃上等號，這點是令筆者相當質疑的。

至於「五次方程式」、「新幾何學」、「代數的方言」與「探索無窮的概念」等單元中，我們可以看到許多近代數學的發展，其中當然包括了代數基本定理，非歐幾何的出現，以及集合論的產生。至於這個時期相關的數學家，如阿貝爾、伽羅瓦、高斯、柯西、羅巴契夫斯基、康托爾……等人，自然是不能被遺忘的。不過仍有幾處翻譯上的問題，筆者須加以提醒。例如，第十五單元「五次方程式」中：『像在歐幾里得的《完整介紹代數》』，事實上此處的“歐幾里得”(Euclid)，比照原作書中應爲“尤拉”(Euler) 才是，這顯然是譯者的筆誤。而後在 156 頁：『1929 年三月伽羅瓦出版了他第一篇有關連分數的論文』，此處明顯是年代上的筆誤，應爲“1829”年才對。

另外，還有一點是在一般科普書籍中常見的錯誤。「新幾何學」的單元中，在介紹非歐幾何學之前，不免也必須將歐幾里得的第五設準拿來討論一番，原作者很忠實地呈現了歐幾里得的說法 (根據 Thomas L. Heath 版)，然而，譯者在此卻將之翻譯如下：

> 如果一直線橫跨兩直線上，使同邊的內角小於兩直角，這兩條直線，如果無限延伸，會在角度小於兩直角的那邊相交。

譯者在此用了『無限』一詞，顯然是忽略了希臘當時對於無窮概念的態度，因爲在古希臘對於『無窮』(infinity) 可以說是避之唯恐不及，怎可能在《幾何原本》中如此大膽呈現？事實上，在 Thomas L. Heath 版的《幾何原本》中，其第五設準原文如下：

> *That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced* ***indefinitely****, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.*

可見，歐幾里得在此巧妙地用了『任意地』(indefinitely) 一詞，來避開『無窮』(infinity) 的

說法，然而現代人卻又將『無窮』二字加諸在歐氏身上，我想歐幾里得在九泉之下也難以安穩長眠吧！

整體來說，本書雖然大致上尋著數學史的軌跡完成，事實上，在每個小單元中，仍然有其獨立的特性。例如在「運動的數學」中，作者將微積分的發展過程從最早的求面積問題開始講起，這可以幫助讀者對整個微積分的發展有更縱深統整性的理解。另外，除了書中有大量的彩色圖片增加了本書的『可看性』之外，在許多的單元結尾，作者也附上多位數學家著作中的『名句』，或是節錄短篇文章，可供讀者細心體會。至於本書最後關於高等數學與應用數學的篇幅中，其內容或許對於一般讀者而言，仍然算是難以理解的。即使作者想要呈現一本『很容易理解的數學歷史書』，我想礙於數學知識本身的難度，作者頂多只能說說故事，點到為止，而讀者們根本也談不上真正的『理解』吧！

註解：

1. 此為筆者因寫作方便而自行分類，仍有部分章節未必依歷史發展順序安排，或者章節本身內容涵蓋的年代太過廣泛 (例如:「中國的十部算經」一章)，如造成讀者們的困擾，還請多多包涵。
2. 柏拉圖學派的某些思想上，是繼承了畢氏學派的觀點，但在柏拉圖的觀點中，數已超越了萬物，而非早期畢氏學派強調的『萬物皆數』。有關這些哲學面向的討論，有興趣的讀者可以參閱 Morris Kline 著（趙學信、翁秉仁中譯），《數學：確定性的失落》，台灣商務印書館，2004。
3. 《算經十書》本包含《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《張丘建算經》、《綴術》、《五曹算經》、《五經算術》、《緝古算經》十部算書。但《綴術》與《夏侯陽算經》已亡佚，清中葉後補入《數術記遺》及贗本《夏侯陽算經》。關於《算經十書》之詳細內容，讀者可參閱郭書春、劉鈍點校，《算經十書》，九章出版社，2001。