

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台師大數學系）
 助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）
 王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南師院附中）
 英家銘（台師大數學系）謝佳勸（台師大數學系）
 蔡寶桂（新竹縣網路資源中心）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第八卷 第六期 目錄 2005年6月

- 我們還可以為 TJMT 做些甚麼？
- 漫談《算數書》(一): 從「醫」開始
- 三看《米諾篇》
- Mathematics in the Kingdom of Animals
- 讀書心得分享:《黃金比例》
- 《六位學生數學教師教學價值認同的個案研究》論文摘要
- Information: 《台灣數學教師(電子)期刊》

我們還可以為 TJMT 做些甚麼？

台師大學數學系 洪萬生教授

台灣數學教育學會終於出版電子期刊 (TJMT) 了。從數學(知識)社會學的角度來看,這表示我們台灣的數學教育研究又邁向『制度化』的另一大步,真是可喜可賀!凡事起頭難,對於一個主要是利用『虛擬』網絡而運作的學會來說,一份『真實』刊物之問世,的確標誌著台灣數學教育社群逐漸成熟,這當然歸功於本刊主編楊德清教授以及其他編輯委員同仁,請容許我在此向他(她)們致上十二萬分的敬意與謝意。

本刊創刊號刊登了四篇論文,主要都涉及第一線教師之教學實踐,然而,其中深刻的反思,也醞釀了理論建構的一個維度。假以時日,一個中小學教師的自主性之教學研究典範,一定會在我們這個社群出現。這將是我們本土的學術資產,也將是台灣經驗的另類表現。

現在,我們還可以為這個刊物做些甚麼呢?我想既然它是專屬於中小學教師之刊物,那麼,儘可能貼近他(她)們的經驗,絕對可以用來評斷它將來是否能成為台灣數學教育史的不可缺少篇章。為此,除了期待中小學教師繼續為本刊撰稿之外,我們也應該將本刊論文或其他討論文章之流傳,作為它是否成功的判準之一。換句話說,本刊的成功與否,『作者』與『讀者』應該同樣重要才是。因此,我們或許也可以歡迎中小學教師就他(她)們的教學現場所遭遇的 PCK 問題,撰寫精簡短文讓本刊披露,藉以引起討論並形成教學共識或研究議題,如此將同時惠及我們的數學教育之研究與教學,善莫大焉!

此外,這一刊物也應該儘可能提供有關數學教育研究成果方面的資訊,譬如國內同仁有哪些新的論述問世?有哪些(博、碩士)學位論文已經完成?有哪些新的課程開設了?又有哪些研討會即將或已經舉辦了?等等。這些資訊之呈現,將可證明我們社群的豐沛活力,同時,也是吸引數學教育同好的最佳代言。

謹陳如上,願與同仁共勉之!

漫談《筭數書》(一): 從「醫」開始

台師大數學系 林倉億助教

楔子：爲何要談《筭數書》？

在回答這個問題前，先讓筆者說個親身經歷。筆者曾經在某個科學史研討會上報告與《筭數書》相關的研究，報告完後的討論時間，出現了這麼一段妙問妙答。一位科學史的先進問了一個問題，大意是：「《筭數書》在世界數學史上的地位？」老實說，筆者當下還真不知道該如何回答，所幸洪萬生教授替筆者解危，洪教授的妙答是：「只要問〔現存的數學書中〕超過兩千年的數學書有幾本？…不超過五本！」由此可見，《筭數書》非但是人類文化的遺產，更是當中的「珍稀品」！至此，筆者不免世俗地好奇《筭數書》的身價，茲利用一份製作於公元十世紀的羊皮卷，來作為估計的基準。該羊皮卷特殊之處，在於上頭載有阿基米德已失傳的《方法》一書之內容，因此，在 1998 年紐約的一場拍賣會中，以 200 萬美金的高價成交！若依此估算，成書於西漢初年的《筭數書》，其年代（公元前 186 年）至少比該羊皮卷早了一千年，又是中國現存的最早數學原典，那麼，百萬美金的拍賣底價應是跑不掉的吧！

坐擁百萬美金的豪宅並非人人可得，但享受百萬美金書上的知識，卻是十分容易！「爲何要談《筭數書》？」這個問題，筆者就先以「百萬美金」這「俗又有力」的說詞做爲回答吧！

從「醫」開始

從上世紀末開始，愛滋病、狂牛病、SARS、禽流感等消息，一直佔據了新聞媒體的許多篇幅，市面上也隨處可見宣稱有神奇療效且要價不斐的藥品或食品，而最近台灣各界更是爲了健保費問題數度鬧上頭版頭條，可見，醫療已是現在生活中最重要的議題之一了。《筭數書》中正好有一題名爲「醫」，且本篇文章是「漫談《筭數書》」一系列文章中的第一篇，那就讓我們從「醫」開始吧！

《筭數書》由 190 根竹簡所組成，每根竹簡約寬 0.6~0.7 公分，長 29.6~30.4 公分。1984 年出土後，整理《筭數書》的小組成員，依據各竹簡的出土位置及內容，給予每一根竹簡一個編號，「醫」一題的內容，就記載在第 72 及 73 號竹簡上：¹

72：程曰：醫治病者得六十筭而負廿筭。有□程及弗……

73：得六十而負幾何？曰：負十七筭二百六十九分筭十一。其術曰：以今得筭爲法，令六十乘負筭爲實。²

上述文字中的□，表示竹簡上的文字模糊不可辨，一個□代表一字；至於「弗」字後的「……」，則代表看不出該處不可辨之字有幾個。這一題就是因爲尚有這些文字無法辨認，以致於至今我們仍無法確定它的題意及算法。不過，第 73 號竹簡上的文字不僅清楚可辨，意思也堪稱完整，因此，我們可以從此簡下手，來一場解謎遊戲。

首先，第 73 號竹簡前兩句清楚地告訴我們，本題所求是「得六十筭」時的「負十七筭二百六十九分筭十一」，而其算法是「以今得筭為法，令六十乘負筭為實」，由此可知在第 72 簡後所漏之文字，必定包含了「今得筭」以及「負筭」之值，我們不妨分別以 x 、 y 代表之。因此，整題的算法就是以 x 為除數，以 $60y$ 為被除數， $60y/x$ 即為本題之答案，也就是「十七筭二百六十九分筭十一」。藉助今日符號之便，我們可以將之改寫成一比例式：

$$x : y = 60 : 17 \frac{11}{269} = 1345 : 382$$

上述的推理解謎，並未運用到什麼高深的數學，只用比例概念及乘、除而已，想必每位讀者都無疑義才是。但眼尖的數學老師必定會修改上面之算式，在 $17 \frac{11}{269}$ 與 382 之前各加一個負號，以符合題目所謂之「負筭」。不過，事情並非如此簡單，好戲還在後頭！

喜歡偵探或尋寶冒險故事的讀者，都知曉故事的作者一定會安排陷阱來考驗書中的主角，而這正是此類故事的精彩之處，因為一旦主角通過了考驗，整個情節又是柳暗花明又一村了。此處正是如此，筆者認為「醫」題中之「負」，並非今日「正、負數」之「負」，而該另作它解。至於該作何解呢，請容許筆者先賣個關子，讓我們來看看第 72 簡中的「程曰」二字。

「程」字有規定、度量之意，因此，「程曰」後面之文字，即代表對某事或某物的計量規定。例如在《筭數書》的「程竹」、「程禾」二題中的「程曰」皆是此種用法。「醫」題中之「醫治病者得六十筭而負廿筭」，則應該是為對醫治病者的一種規定。至於此規定之實質內容為何，則又必需考察「筭」字之意義。筆者在此並非故弄玄虛，而是此題就如同九連環一般，一環緊扣一環，想解開它，非得一環一環來不可。

「筭」字在漢朝之中，可以是稅賦的單位。例如，在西漢初，一個年滿十五歲之人一年的人口稅為「一算」，商人、奴婢為「二算」，年屆三十五而未嫁之女子，其人口稅為「五算」，而當時之「一算」等於一百二十錢；又如漢代政府對商賈以外之百姓徵收的財產稅稱為「訾算」，此處「一算」相當於一萬錢，其稅率為一萬分之一百二十七。³從此我們可清楚地看出，「算」確可當作一種單位，而且是與稅收有關的單位。⁴至於「一算」之值為何，則依年代及稅目而不同。再者，史書中確有提到對醫者的課稅，《漢書·食貨志》中記載：

工匠醫巫卜祝及它方技商販賈人坐肆列里區謁舍，皆各自占所為于其在所之縣官，除其本，計其利，十一分之，而以其一為貢。⁵

雖然筆者此處所舉皆是漢代的例子，但秦漢史學家高敏認為早在秦國就有向百姓徵收人口稅及財產稅，因此，無論「醫」一題形成的年代是秦或漢，「筭」字當作一種與金錢有關的單位解，應該說得通。在此脈絡之下，「負筭」之「負」，並非一定要解作「正、負數」之「負」，還可解釋為「所背負之筭」，例如《後漢書·左雄傳》中記載這麼一段：

鄉部親民之吏，皆用儒生清白任從政者，寬其負筭，增其秩祿，吏職滿歲，宰府州郡乃得辟舉。⁶

當中之「寬其負筭」意謂寬免其所背負之口筭之錢，也就是人口稅。至此，我們可將「醫」這一題中的「程曰：醫治病者得六十筭而負廿筭」，解讀為醫治病者的規定負稅比率是 60 比 20。如此一來，第 72 簡後所殘缺之字，則必定與一個醫治病者的收入（即「今得筭」）與所上繳之稅（「負筭」）有關。由於實際收入並不見得是六十筭，因此，為了檢核所繳之稅是否符合官府之規定，「醫」題中所提供的作法，便是將實際收入與所上繳之稅按比例化成得筭六十時，其所繳之稅為幾何。若所求得之數目小於 20，則代表所上繳之稅不足；若大於 20，則表示該名醫治病者成了「冤大頭」了！

「筭」字除了當作稅賦的單位外，還可作為考核的單位。于振波先生在〈漢簡“得筭”、“負筭”考〉中，從文字的詮釋、出土的漢簡以及傳世的文獻考察中，指出：

漢簡中的“得筭”、“負筭”是對官吏政績進行評價時所用的術語，與獎金、罰款沒有必然聯繫。漢代的“算（筭）”除用於指算賦外，也指計數的籌碼，必須視不同的場合加以區別，不能一概而論。⁷

所以，《筭數書》中「醫」一題也可能是對醫治病者的考核。《周禮》一書中記載著對醫官的考核方式為「歲終則稽其醫事，以制其食。十全為上，十失一次之，十失二次之，十失三次之，十失四為下」，⁸以醫治的成功與否作為考核的標準，在中國諸朝的歷史中亦可見相關的記載。⁹因此，若以此觀點來解讀「醫」題的話，那麼對醫治病者的考核標準儼然就是成功與失敗之比率為 60 比 20，而接下來的解讀方式，則與上述的第一種解讀方式相同，筆者就留給各位讀者自己解讀了。

以上筆者指出了《筭數書》「醫」題的兩種可能解讀方向，至於何種較佳或較為正確，至今尚無定論，¹⁰也就是說這個解謎活動，至今仍在進行中，所以，各位讀者不妨一起來解謎。不過，筆者個人現今傾向第二種說法，這是考量《筭數書》中的算題形式，若是依第一種之說，則「醫」題應當包括求出題中所舉例的該治病者最終所需繳負之稅額，而不應該只止於判斷該人所繳之金額是否符合規定而已。當然了，這不過是筆者的臆測，僅供各位讀者參考。筆者接下來還會陸續介紹《筭數書》中的其他算題，屆時各位讀者就可以「考核」筆者的說法了。

注解：

1. 《張家山漢墓竹簡》一書中有《筭數書》竹簡之圖版（黑白照片），有興趣的讀者可以親自核對之。
2. 第 72 號竹簡中之「而負」、「有」和「及」字，依何有祖先生之見補入。另外，標點符號為今人所加，竹簡上並沒有。
3. 參閱高敏 (2002)，頁 70~78、103~106。
4. 引自馬怡、唐宗瑜 (1990)，頁 145。
5. 中國古代，「筭」、「算」二字互通。
6. 引自馬怡、唐宗瑜 (1990)，頁 116。

7. 引自于振波 (1996), 頁 330。
8. 引自清·紀昀 (1989), 頁 673。
9. 如《舊唐書·職官志》中載:「凡醫師、醫生、醫工療人疾病,以其痊多少而書之,以爲考課。」《宋史·職官志》中亦有累似之記載:「太常寺太醫局,有丞、有教授、有九科學生,額三百人,歲終則會其全失而定賞罰。」
10. 參閱郭書春 (2003), 頁 19; 鄒大海 (2001), 頁 204。

參考文獻:

- Stein, Sherman K. (1999), *Archimedes: what did he do beside cry eureka?* Washington, D.C.: Mathematical Association of America
- 于振波 (1996), 〈漢簡“得算”、“負算”考〉, 載《簡帛研究第二輯》(北京:法律出版社), 頁 324~331。
- 何有祖 (2004), 〈張家山漢簡釋文與注釋商補〉, 簡帛研究:
<http://www.jianbo.org/admin3/html/heyouzhu07.htm>
- 高敏 (2002), 《秦漢史論稿》, 台北:五南圖書出版股份有限公司。
- 高樹藩編纂 (1974), 《正中形音義綜合大字典》, 台北:正中書局。
- 馬怡、唐宗瑜 (1990), 《秦漢賦役資料輯錄》, 太原:山西出版社。
- 張家山漢墓竹簡整理小組 (2001), 《張家山漢墓竹簡〔二四七號墓〕》, 北京:文物出版社。
- 郭書春 (2003), 〈《算數書》初探〉, 《國學研究》, 2003 年第 11 卷, 頁 307~349。
- 清·紀昀 (1989), 《歷代職官表》, 上海:上海古籍出版社。
- 彭浩 (2001), 《張家山漢簡《算數書》註釋》, 北京:科學出版社。
- 鄒大海 (2001), 〈出土《算數書》初探〉, 《自然科學史研究》, 2001 年 3 期, 頁 193~205。
- 蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉等 (2000), 〈《算數書》校勘〉, 臺灣師大《HPM 通訊》第三卷第十一期, 2000 年。

香港大學數學系蕭文強教授榮休頌詞

二十世紀香港數學在地特殊, 可是, 因為『文強』, 所以『留輝』(劉徽)!

Twentieth-century Hong Kong mathematics earns a special status on its own. However, it is all because of Man Keung's endeavor, among others, that she deserves a place in the international community in general and in the Chinese community in particular.

三看《米諾篇》¹

台師大數學系四年級 趙國亨

柏拉圖的《米諾篇》是數學教育史的一段經典對話，在過去幾年筆者學習數學教育的過程中，與這篇文章有過幾次的對話，在不同的能力階段與環境背景中，有著截然不同的想法與感觸，也在請教洪萬生老師的時候，受到鼓勵而寫下這些想法。

幾年前，第一次接觸到《米諾篇》的時候，建構式數學正大張旗鼓，米諾篇所表現出來，「在對話中讓孩子們自己發現數學結果」，這樣的教學方式簡直太符合建構式數學的想法了！於是，屢屢趁著家教的機會，嘗試這樣的教學方式，希望由學生的口中說出數學概念的關鍵敘述，藉此讓他們能留下深刻的印象，可是卻很難得成功，當時總認為是自己的經驗不足，沒有完全發揮這種產婆式教學法……

幾年後，建構式數學受到嚴厲的批判，當時筆者仍未脫離學生的身份，所以在某個課堂上，我們整理並報告了張玉成的《思考技巧與教學》中的〈發問技巧與思考啟發教學〉那一章，當時筆者所負責的部分恰好是蘇格拉底式的發問技巧，恰好就是以《米諾篇》作為範例。我們將這樣的發問技巧分解成三個部分：

初步假設（自我認知）→ 產生懷疑 → 承認錯誤

再回到第一個部分，直到學生建立了正確的假定。在這個過程中，非常重要的一點是，學生並非無中生有地構造了一個數學概念，而是如同矇著眼睛般被引導著，最後觸碰到終點。不過，此時不表示他已經解下了矇著眼睛的布條，也不見得有能力再走一遍，所以，講得誇張一點，蘇格拉底的對話式教學，是讓學生覺得自己找到答案，只是，筆者當時並沒有發現作為一個範例時，《米諾篇》其實有著致命性的缺陷。

又過了一段時間，在另外一個課堂上，聽到教授諄諄告誡我們，不要在教學時提 yes/no 型的問句，那不是一種『形成性評量』！於是，筆者猛然想起一件事情，「《米諾篇》幾乎都是 yes/no 問句呀！」當初我們在報告時，還曾經戲稱扮演奴隸的同學，只需要上台，然後一直點頭或搖頭就好了。既然如此，《米諾篇》根本不能作為一個教學範例！尤其是畫出對角線的人，不是學習的奴隸男孩，而是問話的蘇格拉底。

從現代的觀點來看，對比數學教育，《米諾篇》表現在數學哲學的價值更為突出，畢竟，蘇格拉底（其實應該是柏拉圖）只是想藉由這番對話，說明自己對於學習的見解，更進一步引出有關知識的哲學觀，「教學並不存在，只有記憶的追溯……」當事人都已經這麼說，我們又怎能將這番對話當作是一種教學法呢？

不過，對於數學教育而言，《米諾篇》還是有一定的價值，如同灌籃高手這部漫畫中，安西教練所言，「一個人要進步，必須先明白自己的愚蠢。」很多時候學生無法學習，並非教師的教學有瑕疵，而是因為困在錯誤的基模之中，不但無法掙脫，還排斥外來的協助，此時，適當的對話自然能夠協助學生承認錯誤 — 當然，對話也僅是其中一種方法。

註釋

1. 為何『三看』呢，請容我細細道來。『初看』《米諾篇》是在倉億學長帶領的讀書會中看的，之於我，有著別人帶著看的新鮮感，以及一點隨性的感覺。『二看』《米諾篇》是爲了上課報告而去看的，之於我，有著爲了完成某件事情而不得不去看的壓力，以及再度造訪好朋友的親切感。『三看』《米諾篇》是爲了解答自己的困惑而想看的，之於我，有著爲了要看米諾篇而去看的的心情，以及相識一笑一切盡在不言中的感觸。詞人說：「眾裡尋他千百度，驀然回首，伊人卻在燈火闌珊處。」就是這種心情，因爲答案就在對話之中。

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校聯絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京工業大學）

英國劍橋：李佳燁（李約瑟研究所）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文
（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）

台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商） 陳春廷（寶山國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）

台南縣：李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）

金門：楊玉星（金城中學）

馬祖：王連發（馬祖高中）

Mathematics in the Kingdom of Animals

Chokri Cherif

Department of Mathematics

Borough of Manhattan Community College, CUNY

In almost all pre-calculus books a rational function is defined in the classical sense as the ratio of two polynomial functions, i.e. one polynomial divided by another polynomial. Also, pre-calculus books do not make the connection between a) the graph of a **rational function** and b) the graph of **only its numerator**, which is just the graph of a **polynomial**. In my pre-calculus class, instead of defining a rational function in the classical sense, I define it as the product of a polynomial and the **reciprocal** of another polynomial. For example, instead of saying **two over three** we can say **two times one third**. By calling the polynomial a **snake** and the reciprocal of the other polynomial a **crocodile**, the rational function is the result of the snake **being bitten** by the crocodile. In mathematical terms, the snake being bitten by the crocodile is equivalent to the polynomial being multiplied by the reciprocal of the other polynomial. The rationale behind calling the polynomial a snake is the fact that the graph of a polynomial is a smooth continuous curve that can be **visualized** as a snake, in particular, if it has more than one turning point. The choice of the crocodile as one of the animals is related to the **location of the denominator** since the crocodile hides **under the water**. What happens to a snake if a crocodile **bites it**? The snake will be **cut into many separate pieces**, which is akin to the graph of a rational function. The **teeth** of the crocodile are the exact **poles** (those values that make the denominator of the rational function zero) of the reciprocal of the polynomial. The **angry crocodile** cuts the **poor snake** with its teeth at exactly the **vertical asymptotes** (those values where the denominator is zero and the numerator is not zero). The **aftermath** of the crocodile's bite is determined by the **thickness** of its teeth (i.e. the multiplicity and the parity [even or odd] of the poles). If the crocodile has **no sharp teeth** (i.e. only pure complex poles) in the **zoo of real numbers**, then it **won't be able** to cut the snake into pieces. However, the crocodile will **deform** the snake by **twisting** it into a different shape, causing serious damage. Even though it's a **very challenging** task, a student who uses this analogy of a crocodile bitten snake to create the graph of a rational function can **reassemble** the snake into one piece after a detailed **investigation** of the crocodile's teeth.

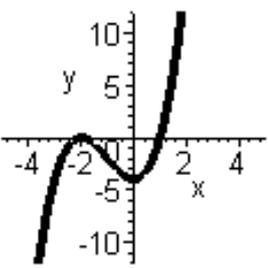
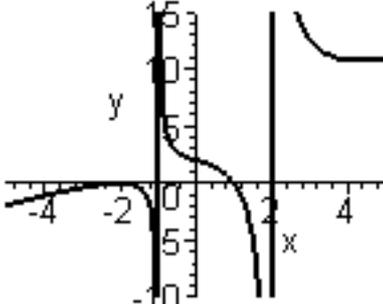
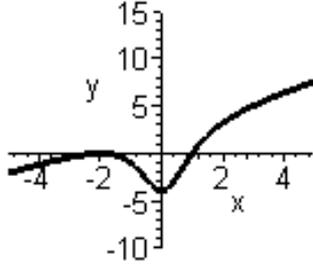
| | | |
|--|---|--|
|  |  |  |
| <p>The Snake before the bite (Fig. A) $p(x) = (x-1)(x+2)^2$</p> | <p>The Snake cut in pieces (Fig. B) $R(x) = (x-1)(x+2)^2 \frac{1}{(x+1)(x-2)}$</p> | <p>The Snake being twisted (Fig. C) $r(x) = (x-1)(x+2)^2 \frac{1}{(x^2+1)}$</p> |

Figure A illustrates a polynomial function $p(x)$. Figure B illustrates a rational function $R(x)$ for which the crocodile has **two teeth**, and Figure C illustrates a rational function $r(x)$ for which the crocodile has **no sharp teeth** in the zoo of real numbers.

『注』是甚麼意思：

根據高樹藩編纂《正中形音義綜合大字典》（台北：正中書局），在甲骨文、金文中缺『注』字。小篆注：從水、主聲，其本義根據許慎《說文解字》作『灌』解，乃自彼輸水適此之意，故從水。又以主在古代為元首之略稱，乃臣屬殊途同趨以朝者；諸細流之注湖澤江海，亦係殊途而同歸之，故注從主聲。漢唐宋時，解釋經史子集曰注，明人始改『注』為『註』！

讀書心得分享

北一女中學生 洪宜文/北一女中 蘇俊鴻

前言

各位看倌在《HPM 通訊》上看過不少科普書籍的讀書心得分享(這一直是這份刊物關注的焦點之一)，恐怕很少看到還會穿插著前言的吧！事實上，作者洪宜文是我任教班級的學生，而這篇心得是我在閱讀學生心得報告中，讓我為之一亮的文章，也因之對原書產生閱讀的興趣，所以興起推薦的念頭，請各位先進法眼鑑定一番。

大體上說來，宜文忠實地呈現書中內容的風貌。由這篇文章中，可以讓人獲致黃金比例相關的知識。但值得注意的是，文中她描述自己與書中內容產生共鳴，與之對話的心得分享。同時，大家不妨也換個角度，看看學生是如何閱讀科普書籍，交織出何種火花？

一、書名

《黃金比例》—1.61803……的秘密

二、出版社及出版日期

遠流出版事業股份有限公司/2004年8月1日

三、作者簡介

Mario Livio，哈柏太空望遠鏡科學研究所科學部門負責人，研究主體廣泛，集中於宇宙學和天文物理學領域。目前定居美國巴爾的摩市。

四、譯者簡介

丘宏義，美國康乃爾大學物理博士，NASA 哥達德太空飛行中心太空科學家及天文物理學家。退休後專事寫作與翻譯。

五、內容簡介

兔子的生育、玫瑰花瓣、鸚鵡螺的外殼、鳳梨的外皮鱗片、到巨大星系、著名畫作和現在流行的美體雕塑之間究竟有何關聯？答案是：1.6180339887……，也就是「黃金比例」這個數字。

黃金比例的趣味或許在於它跳脫了最原始的幾何意義，從數學延伸至繪畫、建築、音樂乃至發展成為對完美人體身形比例的終極追求，搖身一變成定奪感官之美或和諧之美的最高裁判官，相較於多數人可以朗朗上口的 π 值3.1416，黃金比例顯然與我們日常生活的關係更為密切。也因此，我們容易「眼見為憑」，將許多充滿視覺驚嘆之美的結構，誤判為是依據黃金比例而設計，譬如神祕的古埃及金字塔與雅典充滿簡約風格的帕特農神廟等等，許多黃金數字的狂熱崇拜者全都將之記在黃金比例的豐功偉績裡，但果真如此嗎？本書作者不僅是一位稱職的嚮導，用平實的語言引領讀者展開這趟黃金比例的深度考古之旅，追本溯源，沿途也發揮科學家的偵探精神，抽絲剝繭，為讀者撥開層層迷霧，直達真相。

六、研讀心得

初乍見此本書的名字《黃金比例》時，就讓我迫不及待的想要翻開這本書一探究竟。我對黃金比例的認識，是來自於有次我看了一篇有趣的文章。文中提到：「女人喜歡穿高跟鞋是有科學根據的，由統計結果顯示，如果 $t = \text{軀幹長} \div \text{身高(公分)}$ ，軀幹長是指肚臍

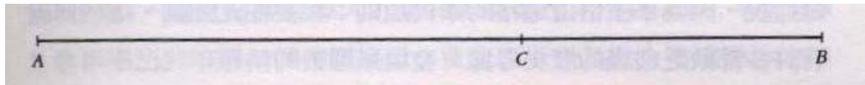


到腳底的距離，且 $t = 1/(1+t)$ 時，人的外表比例是最美的。那麼 t 值是多少呢？因為 $t = 1/(1+t)$ ，所以 $1/t = 1+t$ ， $1 = t+t^2$ ， $t^2+t-1=0$ ， $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \dots$ 也就是黃金比例！」也因此我對黃金比例充滿了好奇，所以這次的數學閱讀心得報告我就選了《黃金比例》這本書。

一開始作者是這麼說的：「你知道令人心神愉悅的玫瑰花瓣的排列方式、達利的名畫《最後的晚餐聖餐》，或是軟體動物華麗的螺旋形貝殼，和兔子的繁殖之間有什麼共同的特色嗎？這些看似毫無共通性的現象竟然擁有一個數字，一個幾何比例。十九世紀時，人們稱這個數字為『黃金數字』、『黃金比例』或『黃金分割』甚至有人稱之為『神的比例』，他就是 $\phi = 1.6180339887 \dots$ 這個無窮小數充滿了無盡的奧秘。」作者一語道盡了「黃金比例」的神奇之處，也說明了它為何令許多人著迷不已。

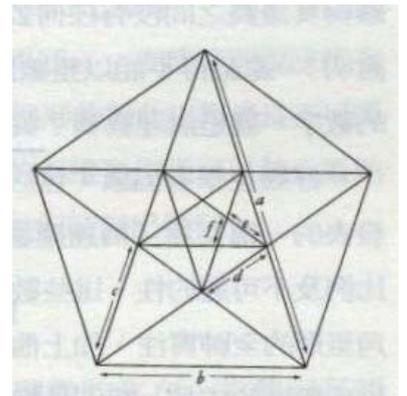
歐幾里德在約西元前三百年左右，為黃金比例下了第一個清楚的定義：

一直線按中末比分割的意思是說，該直線的全長和分割後較長線段之比等於長線段和短線段之比。

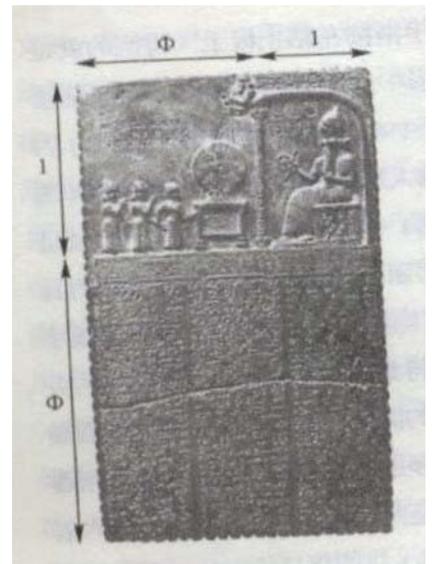


在圖中，若 AC 和 CB 的長度比等於 AB 和 AC 之比，那麼我們可以說 AB 已按照黃金比例來分割。

現在就讓我來介紹些令我印象深刻的部分。第一個是畢氏學派的五角星形（如右圖）。五角星形和正五邊形之間有密切的關係。只要把五邊形的頂點以對角線相互連結，就能得到一個五角星形，小五邊形的對角線又形成了一個更小的五角星形，可以無盡延伸下去。而圖中的 a、b、c、d、e、f，每一線段都比前一線段要小上一個剛好完全和黃金比例相等的因子 ϕ ，而且更可看出五邊形的對角線與其邊長之間不可通約。黃金比例是一個無理數因此獲得證明。



另外一個有趣的問題是關於許多古建築是否曾經使用過這個「神的比例」？例如在《建構宇宙的新手指南》這本書中指出，在某些巴比倫的石柱碑上，含有「許多黃金比例關係」（如右圖）。其他像是西元前九世紀的亞述有翅半神浮雕、出土自尼尼微的巴比倫作品《死亡中的母獅子》等，也被認為其中擁有黃金比例。但作者指出其中含有兩大缺陷，第一：他們牽涉到玩弄數字的把戲；第二：他們忽略了量度的不準確性。任何時候你想量度某個相對的複雜結構時，總有一整套長度任你挑選。因此我很興奮的拿著尺到處東量量、西量量，希望能發現家中有沒有什麼地方有黃金比例。例如一個隨意的盒子，它的長、寬為 14 和 8.75，而他們的比值則是 $14/8.75 = 1.6$ ，而這是否意味這盒子的製造商當初在設計時是根據黃金比例？顯然不是。而黃金比例的狂熱者當然更不會放過偉大的古建築—金字塔，但是在現在看來都沒有很明確的記載能夠指出當時的埃及人或巴比倫人已經發現、了解黃金

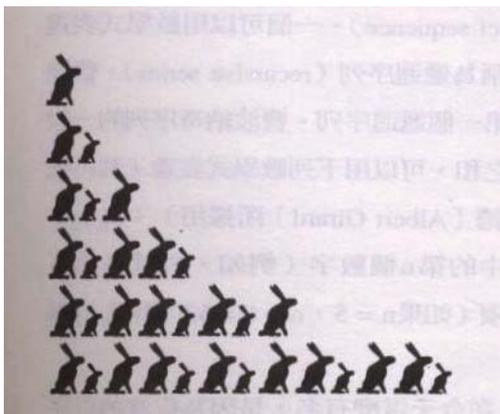


比例及其屬性。

再來是提到著名的費布納西數列。費布納西當時出了個題目：

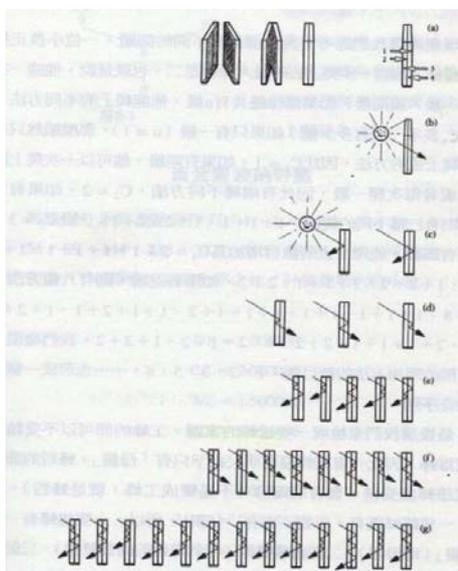
某人放了一對兔子在一個四面被牆包圍的地方。假設每個月每一對兔子會生出一對兔子，而新生的兔子一個月後又能再生一對兔子，那麼一年當中，會生出多少兔子？

較大的兔子代表一對成兔
較小的兔子代表一對嬰兔



而得出了數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233……。在自然界中，處處充滿費布納西數列。

像是光線的光學

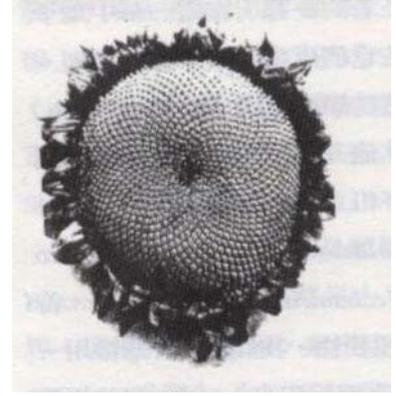


但費布納西數列怎樣和黃金比例扯上關係？看看相鄰費布納西數字之比：

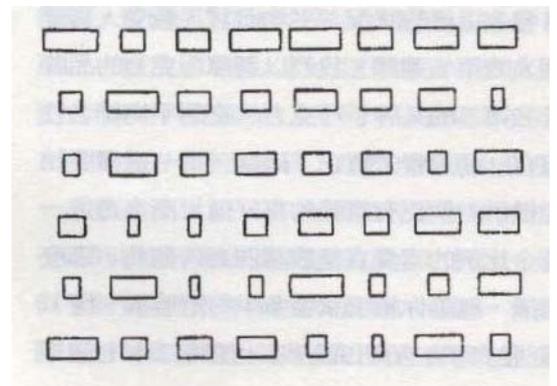
- 1/1=1.000000
- 2/1=2.000000
- 3/2=1.500000
- 5/3=1.666666
- 8/5=1.600000
- 13/8=1.625000
- 21/13=1.619047
- 34/21=1.619047
- 55/34=1.617647
- 89/55=1.618181
- 144/89=1.617977
- 233/144=1.618055
- 377/233=1.618025
- 610/377=1.618037
- 987/610=1.618033

看看最後一個比值！當我們繼續擴增費布納西數列，這些相鄰的費布納西數字之比將

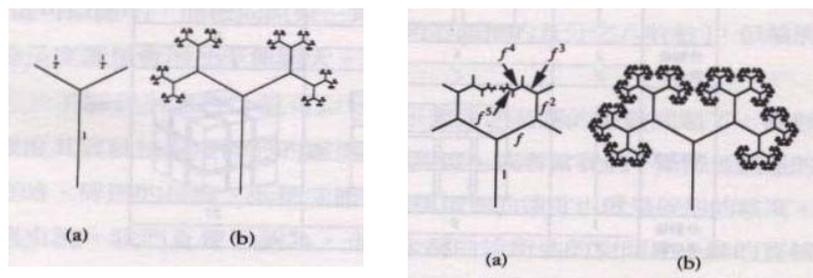
越來越趨進黃金比例。讓我不禁驚嘆：「難道造物者是數學家？」再舉些自然界中的費布那西數列：松樹毬果殼的鱗片、鳳梨的葉序、向日葵的小花排列等等。特別是向日葵的小花排列(如右圖)，分別形成了順時鐘及逆時鐘方向的螺線，這些小花為何以此方式排列？因為可以最有效益的共享水平空間。最常見的是在一個方向有三十條螺線，而另一方向有五十五條。其他的費布納西數字也有出現。但所有皆為相鄰的費布納西數字中的數字。他們的比也就是黃金比例。真是神奇！還有鸚鵡螺、公羊的角、大象的象牙、葉子生長位置的排列、含有數十億顆恆星的星系結構等……。你會發現黃金比例活生生的充斥在大自然中，巧合的令人感到不可思議！在這裡你可以感受到大自然充滿了神奇的力量，也充滿了智慧的寶藏等待我們去挖掘。在此我用愛因斯坦所珍視的一種感受來說明，即「全然的驚訝」！



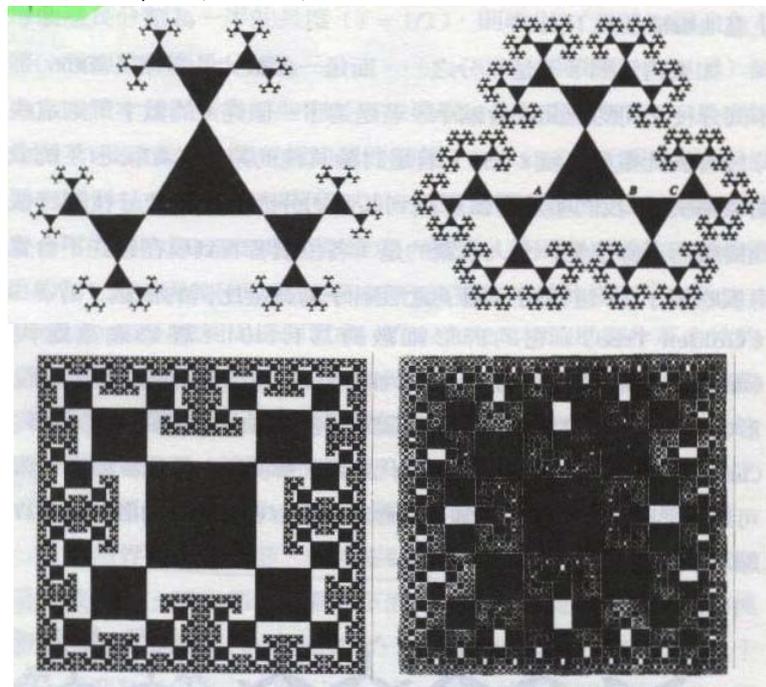
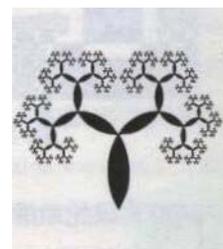
接下來，談談藝術的方面。是否有任何文藝復興時期或在這之前的畫家，真的根據黃金矩形來安排他們作品中的藝術元素？其中很大的部分當然又是黃金比例的狂熱者的牽強說法。但後來確實有許多畫家或雕塑者曾嘗試著使用黃金比例於其畫作中。另外有些人甚至嘗試做了些實驗來驗證黃金矩形是否真的是最令人心神愉悅的圖形。費區那設計了一個實驗：將十個矩形放在一位受試者的前面，請他選出最喜歡及最不喜歡的矩形。雖然結果似乎支持了這個說法，但這實驗還是有許多的漏洞。你可以用右邊這個圖測試你自己最喜愛的矩形是哪一個。你自己是否第一次就選擇了黃金矩形？(它在第四列，從左數來第五個)(我選擇了第三列，從左數來第四個……怎麼覺得好像不太準說~)另外就音樂方面來說也有許多的部分與黃金比例有關，像是史特拉瓦第小提琴、鋼琴、最悅耳的音程等等……。



另外一個有趣的部分是「碎形」的介紹。從以前我對碎形便感到很有興趣，因為碎形的圖都很漂亮，但當時我完全不知道其原理，現在在文章裡有提到，讓我能好好了解一番。簡單的來說，碎形即是利用一組數碼代入一方程式後經過不停的疊代運算，經由這樣的運算來重覆他自己的圖形，最後即呈現我們所見到的碎形圖形。在不停疊代的運算過程中，因為前一次的結果要代入原式子，求得下一次的結果，所以只要一點的改變，如參數的一點小變化，即能在數次疊代後，造成碎形圖形與原圖形有極大的差異，且經由這樣不停的疊代運算，能產生極大的圖形，而且將圖形放大來觀看也不會有失真的現像。而自然界中有許多碎形，從大樹到晶體的成長，最主要的特徵便是分枝現象。那碎形和黃金比例之間又有什麼關係呢？假設從長度為一單位的莖枝開始，先長出兩個分支，夾角一百二十度、長度為二分之一(如下圖左)。每一段分枝再以同樣的方式，



無止盡的繼續生長下去。若分子非二分之一，而是一個大一點的數字，不同分枝間的空間就會縮小，若選了一個夠大的數字，則這些分枝會彼此重疊(如上圖右)。而有沒有某個約分因子可使分枝剛好彼此接觸而不會重疊？這個約分因子就是黃金比例的倒數， $1/\varphi=0.618\cdots$ 。這種分枝方式稱為「黃金樹」(Golden Tree)(如右圖)。不只是線段，碎形也可由簡單的平面圖形如三角形或正方形產生。而何時這些不同部分的分枝會開始接觸？想必你已猜到答案，就是 $1/\varphi$ 。(如下圖)



這本書以黃金比例為主線，談的雖然是數學，卻又包含了各個方面的學問。從遠古的數學史開始談起，在講述黃金比例的部分時，順帶地介紹了人類數字的起源、畢氏學派、埃及以及古巴比倫等的數學、偉大的數學家、許多古老的偉大建築，再談到藝術的方面像是音樂、繪畫，還有生物世界中的數學。數學中有沒有「美」的成分在？誠如富勒所言：「當我處理一個問題時，我從來不去思考美的問題。我只想到如何解決眼前的問題。可是一旦完成後如果我求出的解答一點都不美，那我就知道我錯了。」是什麼東西使數學有這麼大的威力，而且處處皆數學？又是什麼原因使得數學以及黃金比例這類的數學長在許多領域裡都扮演著關鍵性角色？是否宇宙的本質就是數學性的？看完了這本書之後讓我不僅僅是對數學充滿了興趣及好奇、對數學家充滿了敬佩、更對數學、整個世界、甚至是宇宙升起一股敬畏之心！

(附註：報告中之圖片，皆取自《黃金比例》一書中)

《六位學生數學教師教學價值認同的個案研究》論文摘要

台師大數學系研究所碩士班 張繼元

本研究先以問卷調查和因子分析法，自台灣師大數學系一班大三「教材教法」課的 46 位修讀學生中，篩選出六名具代表性的個案；再透過個案研究法，追蹤此六位學生數學教師在開始學習教數學的第一年中，數學教學價值認同的取向與內涵，並探討影響其價值認同的主要因素。研究分成「價值想像」和「價值實驗」兩個階段，其間配合問卷調查、個案晤談、和教室觀察，蒐集、分析、與詮釋個案所呈現的各類資料及其呈顯的意義。藉由「實務社群」(Community of Practice) 學習理論(Wenger, 1998)，作者詮釋六位個案在一年的培育教學活動中，價值認同和教學身份發展的情形。

研究的結果顯示，六位學生教師各自具有不同的教學身分內涵，但是，可能因為對教材內容的認知不夠、教學功力的不足、和價值察覺的模糊，使得部分個案的兩階段認同出現不一致的情形。若進一步檢視「察覺」和「意願」兩面向的特質，他們的教學身分呈現出，具體的教學身分、模糊的教學身分、和具體與模糊兼具的三種狀態；而且，愈深刻的價值察覺會使得個案愈有意願實踐某些價值。同時，也進一步發現，透過分析資深數學教師的教學活動樣式、師培者與學生教師之間的教學省思、以及學生教師同儕之間的小組社會互動，似乎有助於提升個案對某些價值的自我察覺與實踐意願。

最後，本研究的結果應有助於數學師資培育者，掌握學生數學教師階段性的初始教學身分內涵與狀態；據此，可設計相關的師資培育活動或課程，以促使他(她)們進一步察覺自己的教學認同、瞭解教學價值的意義與內涵、和價值教學的重要性及可能的實施方式；希望更有助於，提升教學身分狀態的位階，進而引動其數學教學專業的發展。

關鍵詞：教學價值、價值認同、實務社群、教學身分、教師專業發展

Information

【期刊出版資訊】

《台灣數學教師（電子）期刊》(Taiwan Journal of Mathematics Teachers) 第一期創刊號（2005 年 3 月）已經出版了，請參考網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>。本刊由台灣數學教育學會 (TAME) 出版，其發行宗旨如下：

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

