HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啓文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心) 傅聖國 （北市萬福國小）
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第八卷 第十期 目錄（2005年10月）

把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？

香港中文大學課程與教學學系 黃毅英教授

把數學史引進數學教學的想法已提出了一段時間，在 1976 年在聯邦德國卡爾斯魯厄（Karlsruhe）召開的第三屆國際數學教育委員會（International Congress of Mathematics Education）更成立了歷史與數學教育關係工作小組（HPM: The International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics）。不過仍有不少老師感到引入數學史與「主流」數學教學格格不入。一些學者便歸結了以下常見的藉口：

(1) 「沒有這麼多上課時間！」
(2) 「這些並不是數學！」
(3) 「即使講了，怎樣考？」
(4) 「這不能改善學生成績！」
(5) 「學生不喜歡數學史！」
(6) 「學生認爲那是歷史，他們討厭歷史課！」
(7) 「學生覺得數學史和數學一樣沉悶！」
(8) 「學生缺乏一般的文化知識，難以真正欣賞數學史！」
(9) 「數學發展是要把五花八門的問題化爲系統處理的例行操作，爲何回到起初的混沌呢？」
(10) 「十分缺乏數學史的教學材料！」
(11) 「十分缺乏數學史的教師培訓 ！」
(12) 「我不是數學史專家，怎樣判斷聽來的材料是否可靠？」
(13) 「真正歷史發展過程往往迂迴曲折，依照着去敘述不只說不清楚，反而引起混亂！」
(14) 「閱讀原典十分困難，真的有幫助嗎？」
(15) 「會不會引發『文化沙文主義』（cultural chauvinism）和狹隘的『民粹主義』呢？」[1]

香港亦曾有研究顯示老師普遍出現「高評價，低運用」的現象[2]。

其實引入數學史的主要目的不一定只是要讓學生懂點數學史。在不少教學的情境，我們想提高學生的興趣，在數學加點「人味」，甚至我們想爲數學較佳的學生設計增潤活動，

想探討某些數學概念形成的來龍去脈，又或想設計一些專題活動、想豐富教學話題等，數學史均能提供尙佳的素材[3]，筆者認爲，教學除了主糧外，就是需要很多很多這類的「副食品」。雖然它是「副」，但沒有它佐膳，用餐顯然變得乏然無味[4]。

以下筆者嘗試提出一些切入點讓大家參考。

1. 何以 1 不是質數？這當然是定義問題，但也可考究定義背後理念的來源，例如畢達歌拉斯學派「一切均是數字」的想法。又，如果 1 是質數，合成數的質數分解又會變得怎樣？「質」在中文是什麼意思呢？[5]物理上又有所謂質子。質數又叫素數，素又是什麼意思呢？[6]

2. $1+1=2$，$\infty + \infty = \infty$，$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$，$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$，$A \cup \varnothing = A$, $\{1,3,3\}=\{1,3\}$, $(1,3)\neq(1,3,3)$, $\Delta ABC \cong \Delta BAC$？這些「＝」有分別嗎？我們可以探討歐幾里得《原本》的想法[7]、極限以至第二次數學危機出現的種種問題，也可看看第三次數學危機以後的設基理論（例如車美樂E. Zermelo, 1871-1953, 集合設基系統中的延展公理[8]）等不同時期，對不同數學物件「=」的微妙分別。也可談論「=」符號的創立[9]。

3. 我們可找到不少關於「0 = 1」的「證明」[10]，均能帶出有趣的討論，第二次數學危機時期更有不少涉及極限的。例如 $1 = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)\ldots\ldots = (1-1)+(1-1)+\cdots\cdots = 0$。G. Grandi (1671-1742) 更竟然說，「這表示上帝從無有中創造宇宙」[11]。

4. 新中學數學課程引入「數型」，中間有不少可以探討，例如「1, 6, 23, 58, 117, ?」。也可談到隙積術、招差術、高階等差級數及內插法等[12]。附加數學 1981 年和 1983 年便有相關的題目[13]純粹數學科也有關於內插法的題目[14]。其中亦可探到斐波那契[15]數列及他關於兔子繁殖的問題。純粹數學 1980 年卷 1 第 4 題主要便是要計算二項循環數列[16]，利用同樣的方法就可處理斐波那契數列[17]。當然高斯[18]小時候，「懶惰」老師給他「81297+81495+81693+…+100899」[19]的數學題也是常爲人所津津樂道的。

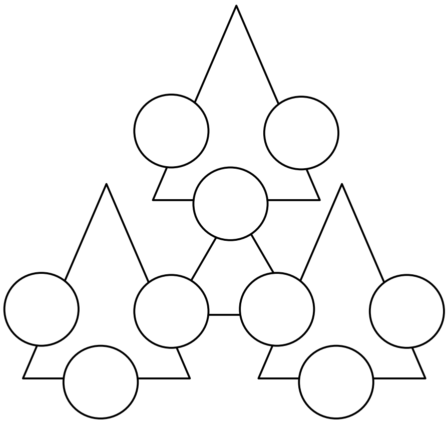
5. 三角關係應由直角三角形引入還是單位圓引入，詳見「黃毅英（2003）。其實「三角學」一課所講的是甚麼？《香港數理教育學會會刊》21 期 2 號，21-28。」一文。

6. 從「何以弧相等 <=> 弦相等 <=> 圓心角相等？」談到圓的定義[20]，也可談到圓座標方程的建立[21]。

7. 從一些常見數學智力題（圖一）談到幻方（縱橫圖）[22]及它在各地之傳播（圖二至五）。也可聯繫到其他學科及趣事。如「玄武門之變，玄武門是東門、南門、西門還是北門？蘇軾詩「此中西湖六月中，風光不與四時同，接天蓮葉無窮碧，映日荷花別樣紅，何以說六月風光既非春、亦非夏、秋、冬「四時」的景色呢？[23]

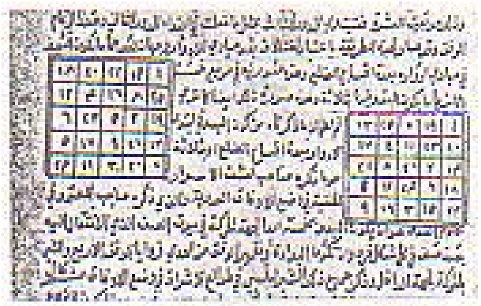
問：左下表中，直、橫、斜之總數均為 15，是魔術方陣中最具代表性的例子。現在，在右下圖的圓中，填入 1-9 的數字，使四個三角形內總數相同。

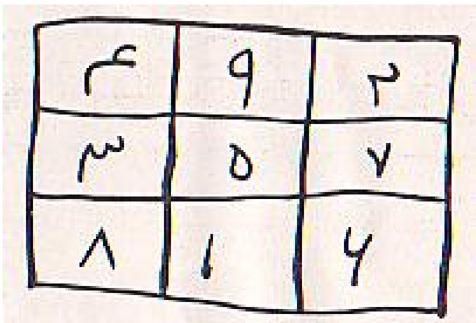
8	1	6
3	5	7
4	9	2



圖一：四個三角形的魔術方陣

圖二：Albrecht Dürer的“Melancholia”，角可見四階縱橫圖

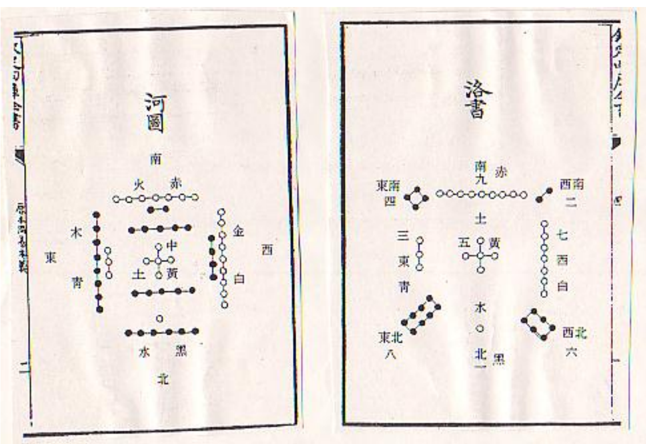




圖三：據云在阿拉伯國家，人們相　右上信縱橫圖能減輕分娩時痛楚[24]

圖四：西藏九宮八卦圖

圖五：西藏「風馬」(lung-ta)旗木刻版（Waddell[25]認為當中的「風馬」實為背馱「洛書」麒麟的變種）

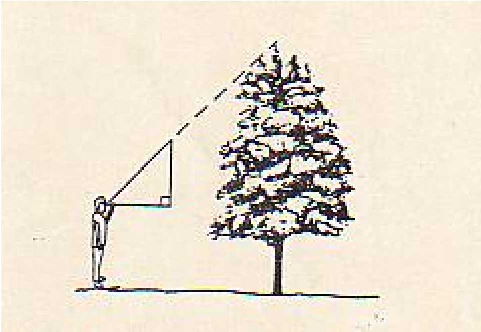


圖六：河圖洛書

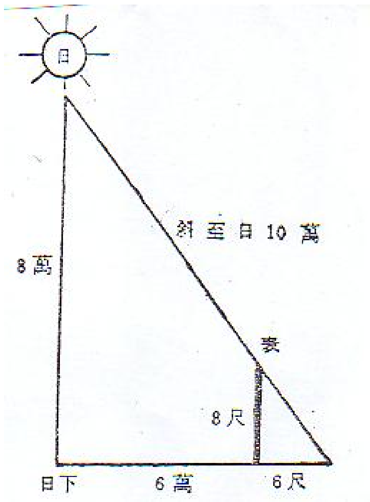
五行	木	火	土	金	水
時	春	夏	六月	秋	冬
天干	甲 乙	丙 丁	戊 己	庚 辛	壬 癸
地干(及相屬的生肖)	寅(虎) 卯(兔)	午(馬) 巳(蛇)	戌(狗) 丑(牛) 未(羊) 辰(龍)	酉(雞) 申(猴)	亥(豬) 子(鼠)
數	八 三	七 二	五 十	九 四	六 一
方	東	南	中	西	北
星	木星	火星	土星	金星	水星
味	酸	苦	甘	辛	鹹
臭	羶	焦	香	腥	朽
色	青	赤	黃	白	黑
藏	肝	心	脾	肺	腎
體	筋	脈	肉	毛皮	骨
官	眼	舌	口	鼻	耳
事	貌	視	思	言	聽
穀	麥	菽	稷	麻	黍
牲	羊	禽	牛	犬	豬

圖七：藏象學說[26]

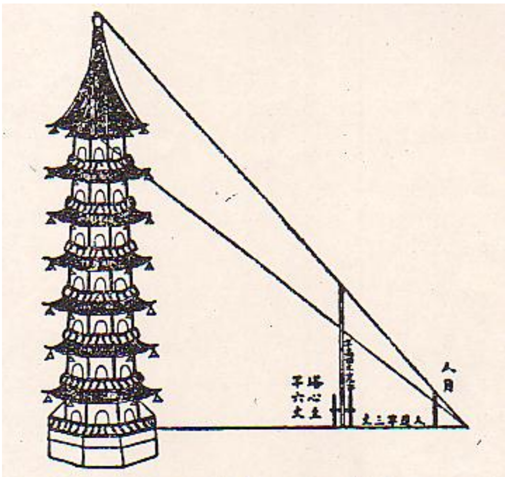
8. 數學專題研習，若苦無教材，可試參考Bolt的《101 個數學專題研習》[27]，其中有一題是測量難以接近的物體（圖八），這在中國有不少這方面的探討（如太陽的高度等等：圖九至十二）。



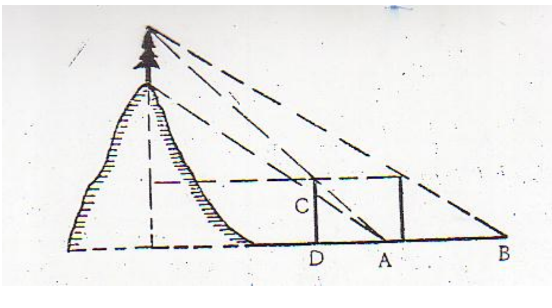
圖八：測量難以接近的物體[28]



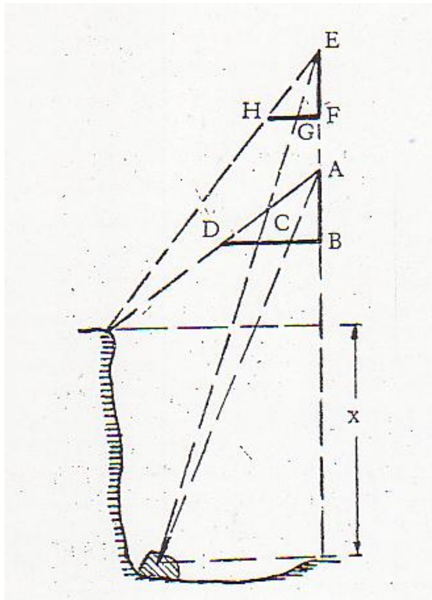
圖九：《周髀算經》立表見影圖[29]

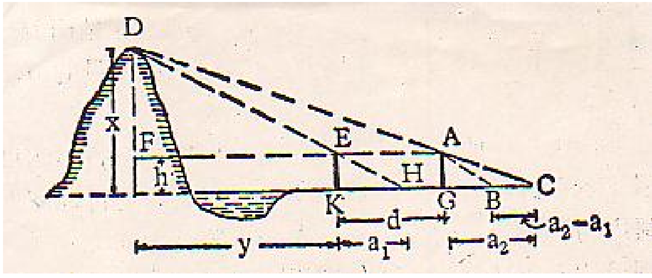


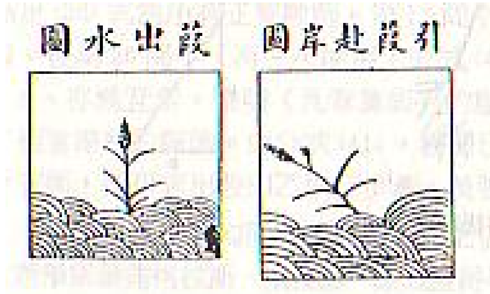
圖十：《算書九章》寶塔高度



圖十一：《海島算經》[30]







圖十二：《海島算經》[31]

圖十三：引葭赴岸圖

9. 勾股定理：這裏當然有很多很多歷史素材，包括《九章算經》的「引葭赴岸問題」(圖十三）及印度的蓮華問題[32]。亦可參考李學數(1978)。《數學和數學家的故事（1）》。香港：廣角鏡出版社。

10. 數學學會活動。摺紙是其中一項有趣的活動[33]，新中學數學課程中亦有相關內容。其中可談到正立方體（Platonic solid）、尤拉關係、何以只得五種正立方體等。甚至三大幾何問題（倍立方及祭壇的故事）。

11. 歷史名題與問題解決。不少歷史名題均有精巧的問題解決策略。以純數學 1980 年卷 1 第 5 題爲例，這其實是類似解三次方程的Cardano[34]-Tartaglia[35]辦法[36]，何以解了$x^3+px+q = 0$，即等於解了所有三次方程呢？這些都是值得討論的。

12. 開放題與大衍求一術。以下是一道有名的「開放題」(超過一個答案)：「李萍告訴她弟弟李俊她在數學課上所做的遊戲。李萍說：『李俊，今天我在數學課上用了積木方塊。當我把積木分成 2 個一組時，還多出 1 個積木方塊；當我把積木分成 3 個一組時，還是多出一個積木方塊；當我把積木分成 4 個一組時，仍然還是多出 1 個積木方塊。』李俊問：『你總共有多少積木方塊？』李萍給她弟弟的答案可能是甚麼呢？」[37]若每次的餘數並非都是 1，問題就不容易解決了。這就可以引到《孫子算經》「物不知其數」及程大位的歌訣，中間也可談到「孫子定理」(又稱「中國剩餘定理」Chinese remainder theorem）[38]及輾轉相除法[39]。

13. 德育與公民教育。教統局便曾提出如何透過各科進行德育及公民教育[40]。不少數學家的不屈不撓精神都可以是與學生討論的材料。甚至高斯的老師，看似不負責任，但他察覺到高斯的天分後，如何馬上到城中買最好的代數書與高斯一起研究，也可說是高斯的其中一個「伯樂」。

14. 課程統整的其中一個形式是將不同課題聯繫起來（所謂「connection」)，而其實課題與課題間在歷史上顯然不是孤立的發展起來，個中之脈絡是最自然的聯繫。從中國數學史可談到開方、二次方程（增乘開方法)、「帶從開方法」到楊輝三角之間的聯繫[41]。

總而言之，若老師自身閒來多讀點數學史（或其他書籍：「工夫在數外」！[42]），他就不愁沒有數學話題（不只是生活上的話題)。數學時就能做到順手拈來的境界，這種真正的學科融合不是生硬的「課程統整」可比。我們在引入數學史是就不會只拘泥於「老是講中國數學比西方數學早多少年」的爭論[43]。學生自然會看到世界多姿多彩的一面。

附註：

1. Siu, M.K. (1998). The (in)complete quadrangle: Historians of mathematics, mathematicians, mathematics educators and teachers of mathematics. Plenary talk at the 10th ICMI Study Conference (on the role of history of mathematics in mathematics education) held at Luminy, 19-26, April.
2. 列志佳、黃毅英（1998）。本港中學教師對運用數學史於數學教育之調查研究。《課程論壇》8 期，50-65。
3. 見蕭文強（1992）。數學史和數學教育：個人的經驗和看法。《數學傳播》第 16 卷第 3 期，23-29。
4. 黃毅英（1999）。教師要副食品、蘿蔔還是皮鞭？《經濟日報》。13/11。
5. 《論語・雍也》:「質勝文則野，文勝質則史，文質彬彬，然後君子」。
6. 「樸素」、「素材」…
7. 公理 1：等於同量的量彼此相等，公理 2：等量加等量，其和仍相等，公理 3：等量減等量，其差仍相等。見蘭紀正、朱恩寬（1990）（譯）。《歐幾里得幾何原本》。西安：陝西科學技術出版社。頁 3。
8. Axiom of extension: A=B iff [($x \in A$ for all $x \in B$) and ($x \in B$ for all $x \in A$)].
9. R. Recorde (1510-1558) – "no two things are 'more equal' than 'a pair of parallels'" (「沒有兩件物件比『一對平行線』更相等的了」，亦可參考「孫興運（1998）。《數學符號史話》。濟南：山東教育出版社。」，又或經典的「Cajori, F. (1928/2993). *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications.」。
10. 如見「Wong, N.Y. (1993). *A-Level Pure Maths Volume I*. Hong Kong: Macmillan. 頁 66」及「Rhodes, F. (1971). 1-1+1-1+… = $\frac{1}{2}$. *The mathematical gazette, 55*, 298-305」等。
11. "God had created the universe from nothing".
12. 見黃毅英（1987）。內插法與高階等差級數的一點註記。《中學數學》6/1987
13. 1981 年卷 1 第 4 題和 1983 年卷 1 第 3 題
14. 1979 年卷 1 第 3 題
15. L. Fionacci (1175-1250)。可參考李學數(1978)。《數學和數學家的故事（1）》。香港：廣角鏡出版社。
16. two term recurrence sequence
17. 見黃毅英（1996）。評核、擬題與數學教育。《數學傳播》80 期，33-49。後載黃毅英（1997）。《邁向大眾數學的數學教育》頁 153-184。台北：九章出版社。
18. C.F. Gauss (1777-1855)
19. Bell, E.T. (1937). *Men of mathematics*. New York: Simon & Schuster. 及李學數(1978)。《數學和數學家的故事（1）》。香港：廣角鏡出版社。
20. 《墨經》:「圓，一中同長也。」
21. 見黃毅英（1998）。《數學教育實地觀察》。香港：香港數學教育學會。

22. 參考李學數(1978)。《數學和數學家的故事（1）》。香港：廣角鏡出版社。
23. 這中間都涉及五行與「藏象學說」，亦與幻方有關（見圖六、七）。
24. 上圖取自「李學數(1978)。《數學和數學家的故事（1）》。香港：廣角鏡出版社」；下圖取自「何丙旭、何冠彪（1983）。《中國科技史概論》。香港：中華書局。」
25. Waddell, L.A. (1895). *Tibetan Buddhism with its mystic cults, symbolism and mythology* (Dover edition: 1972). New York, US: Dover Publications. 又見「黃毅英（1985）。光被西藏的漢(筆名：善妙蓮華)。《故宮文物月刊》32 期，108-119。」
26. 取自上海市中醫學會（1974）。《藏象學說的理論與運用》。香港：醫藥衛生出版社。
27. Bolts, B. & Hobbs, D. (1989). *101 mathematical projects*. Cambridge: Cambridge University Press. 中譯：蔡信行(1996)。《數學樂園—觸類旁通》。台北：牛頓出版社。簡體字版：浙江科技出版社，1998。
28. 取自 Bolts & Hobbs (1989)，見上。
29. 取自李儼、杜石然 (1976)。《中國古代數學簡史》。香港：商務印書館。
30. 同上。
31. 同上。
32. "In a certain lake, swarming with red geese, a tip of a bud of a lotus was seen a span above surface of the water. Forced by the wind, it gradually advanced and was submerged at a distance of two cubits. Compute quickly, mathematician, the depth of the pond (2 span = 1 cubit)" (Bhāskara, 1114-1185?)
33. 見黃毅英（1982）。辦數學學會的一些經驗。《數學教學》4 期，頁 37。
34. G. Cardano (1501-1576)
35. N. Tartaglia (1506-1557)
36. 見黃毅英（1996）。評核、擬題與數學教育。《數學傳播》80 期，33-49。後載黃毅英（1997）。《邁向大眾數學的數學教育》頁 153-184。台北：九章出版社。
37. 見「Cai, J. (1995). *A Cognitive Analysis of U.S. and Chinese Students' Mathematical Performance on Tasks Involving Computation, Simple Problem Solving, and Complex Problem Solving: Monograph 7 of Journal of Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.」及「黃毅英（2002）。數學觀研究綜述。《數學教育學報》。11 卷 1 期，1-8。」
38. 參考李學數(1979)。《數學和數學家的故事（2）》。香港：廣角鏡出版社。
39. 華羅庚(2002) (「千禧版」)。《談談與蜂房結構有關的數學問題》。北京：科學出版社。
40. 1986 年教育署輔導視學組「Promoting civic education through the teaching of mathematics」研討會材料。後輯成 Mathematics Section, Advisory Inspectorate Division, Education Department, Hong Kong (1997). *Promoting civic education through the teaching of mathematics*. Hong Kong: Government Printer.
41. 可見 Fung, C.I., & Wong, N.Y. (1998). Connections through the development of mathematical ideas: The case of solution to high degree polynomial equations in medieval Chinese mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 6*, 71-88.

42. 蕭文強（1996）。功夫在數外。《信報‧教育眼》1 月 8 日。後載黃毅英（1999）（編）。《數學內外：數學教育文集》頁 3-4。香港：天地圖書。
43. 張奠宙（1995）。數學教育爭鳴十題。《數學教育學報》5 卷 2 期，頁 1-7。後載張奠宙（1995）（編）。《數學教育經緯》頁 136-147。南京：江蘇教育出版社。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學)
英國劍橋：李佳嬅（李約瑟研究所）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

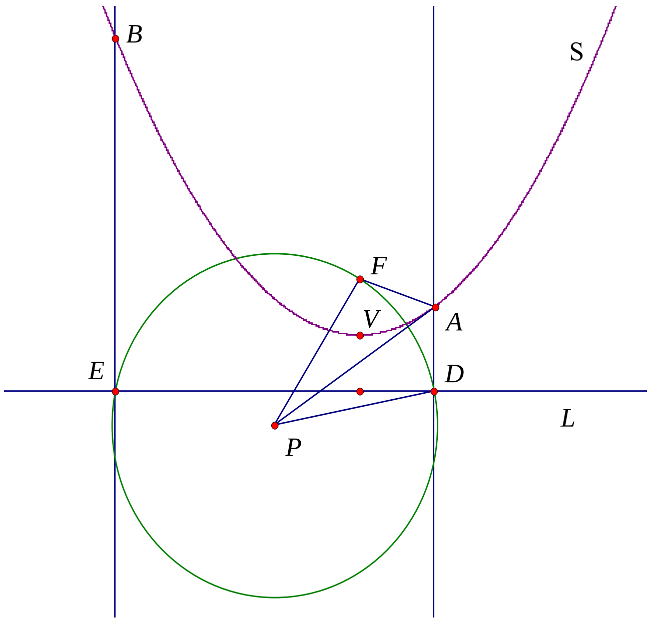
Reader's FeedBack

94 年大學入學指定考科數學甲多選題第 9 題參考解法之迴響

建國中學 郭慶章老師

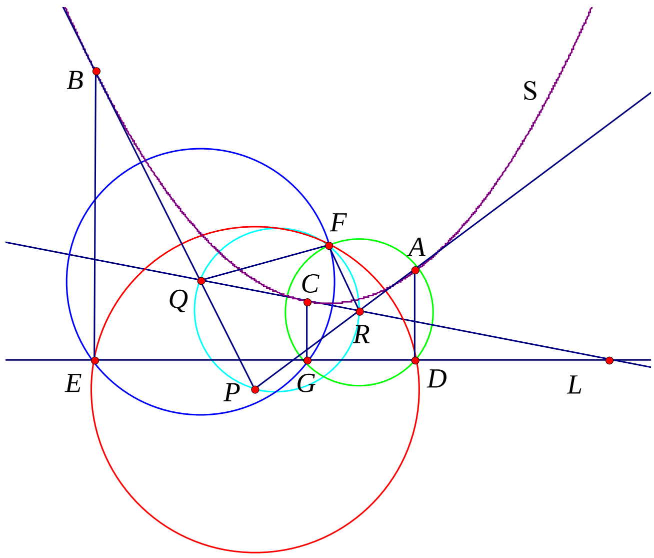
數學甲多選題第九題：「有一條拋物線位於座標平面上方(即其 y 座標≧0)，並與 x 軸、直線 $y = x-1$、直線 $y = -x-1$ 相切。下列敘述何者正確：
(1)此拋物線的對稱軸必為 y 軸。
(2)若此拋物線對稱軸為 y 軸，則其焦距為 1。
(3)此拋物線的頂點必在 x 軸上。
(4)有不只一條拋物線滿足此條件。

這個問題可由「過一給予點作拋物線的切線」談起，尺規作圖。若給予點在拋物線上，很容易，在此只談談給予點在拋物線外之情形。



右圖中，L 為拋物線 S 之準線，F 為焦點，P 在 S 外，若要過 P 作 S 之切線，就是要在 S 上找到一點 A，作 AD 垂直 L 於 D，使 AP 為 $\angle FAD$ 之角平分線。由 $AD = AF$，易知只要 $PF = PD$，則 PA 為所求。

由以上分析，可知對 S 而言，若焦點及準線都已知，則過 S 外 P 點作 S 之切線只要三個步驟，第一：以 P 為圓心，PF 為半徑作圓交 L 於 D；第二：過 D 作 DA 垂直 L 交 S 於 A；第三：連結 PA，即得所求切線。當然，由於以 P 為圓心，PA 為半徑之圓與 L 有二交點，故所求切線有二解，PA 與 PB。



因此，(1)△PAF 與△BPF 相似；(2)焦點關於切線之對稱點在準線上，這兩個性質再加以推演，均可有右圖中 P、Q、F、R 共圓之結論，是即蘭伯特定理。陳敏皓老師恰當地使用蘭伯特定理尋找側拋型拋物線，解法的確精彩！不過也正如其他老師所說，要講解給高中學生理解仍有距離，因為蘭伯特定理學生可能陌生。

相較蘭伯特定理，上述性質(2)與以下之性質學生應較為熟悉：「自拋物線 S 外一點 P 作 S 之切線，二切點若為 A 與 B，則 PA 垂直 PB 之充要條件為 P 在準線上或線段 AB 為焦弦。」

其證明略述如下：

因為所有的拋物線都是相似形，不失一般性，可設

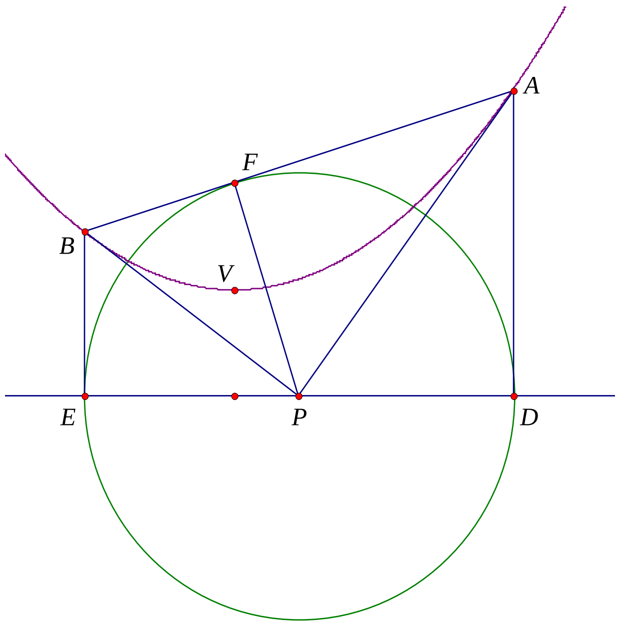
S：$y=x^2$，$A(a\,,a^2)$，$B(b\,,b^2)$，準線 $y=-\dfrac{1}{4}$，焦點$(0,\dfrac{1}{4})$，則

直線PA為：$2ax-y=a^2$；直線PB為：$2bx-y=b^2$，P點坐標為$(\dfrac{a+b}{2},ab)$，

直線 AB 為：$(a+b)\,x-y=ab$，

由直線 PA 垂直 PB $\Leftrightarrow ab=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$ P 點在準線上且焦點在直線 AB 上。得證。

其實，以上之證明可用右圖取代。圖說一體，不證自明。



直接使用「焦點關於切線之對稱點在準線上」以解題，不談蘭伯特定理是可以考慮的選擇。參考解法如下：

設$F(p,q)$為焦點坐標，則F關於三切線x軸、直線$y=x-1$、直線$y=-x-1$之對稱點分別是$(p,-q)$、$(q+1,p-1)$、$(-q-1,-p-1)$皆在準線上，$(0,-1)$也在準線上，故$p^2+q^2=1$，此即利用蘭伯特定理直接可得之結論，以下解法參考陳敏皓老師文章。

回到數學甲多選題第九題。就問題本身而言，這個題目並不難，它是一個觀念問題，除第二選項需要稍為計算一下，其餘只要綜合高中數學中的一些觀念即可正確判斷，並未逸出範圍。

本題之值得討論，應是在於如何確知「不只一條拋物線滿足此條件。」我想如果把問題改成：「已知一拋物線，求作三切線，使此三切線圍成一等腰直角三角形，有不只一種作法。」這一選項正確否？顯然可知！而此一問題與原題比較，其實一體。

已知一拋物線(因為拋物線都是相似形，所以已知者為何皆不影響)，在準線上任取一點作二切線，(有無限多種取法自然形成原題之無限多種解)，此二切線必垂直，(不知此一性質亦無妨，可任意作一切線，再作一垂直切線)，根據已有二垂直線之斜率，易找出與此二線皆夾 45 度角之直線斜率，已知斜率求作切線是基礎問題。作圖完成。求作三圍成一等腰直角三角形之切線可有無限多種解很容易想像。

最後還有一個問題，就是原題中之切線位置與所圍成等腰直角三角形之大小都有限制，這個限制只要搬出平移與旋轉觀念就可輕易解決。

考題並沒有要求找出側拋型解，如果一定要找出一個來，利用上述方法亦可做到，當然數據方面難期漂亮，過程也很複雜。同學若有興趣，不妨依樣畫葫蘆一番。此時，敏皓方法之漂亮即可突顯。

星期三洪老師給我陳敏皓老師的文章，對陳老師誇獎有加。昨天拜讀之後，原想就寫點回應，但睡著了。現在利用課餘回應，想起陳老師暑期曾來電，事忙未應，請諒。現在才回，但願莫怪。更願能有助於對此問題的思考。主要是陳啓文老師說的接近學生的講法。開始原想寫成一篇正式的文章，時間關係暫且擱筆。

《九章算術》勾股章第六題：引葭赴岸

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊，

問水深、葭長各幾何？

印度巴斯卡拉(**Bhaskara, 1114~1185?**）荷花問題：

平平湖水清可鑒，荷花半尺出水面。

忽來一陣狂風急，吹到荷花水中偃。

湖面之上不複見，入秋漁翁始發現。

殘花離根二尺遠，試問水深尺若干？

引自《趣味歌詞古體算題選》，潘有發著，九章出版社

Reader's FeedBack

94 年大學入學指定考科數學甲多選題第 9 題參考解法之迴響

成功高中 游經祥 杜雲華 老師

看過許多 94 年大學入學指考數甲多選題第 9 題的解法後，發現其解法不一 ，且未能完整解決，深覺此題有其難解之處。尤其補教大師也公佈出與大考中心不同的答案。近日在 HPM 第八卷第七、八期中拜讀好友國立蘭陽女中準博士陳敏皓老師的解法，才知道需要應用蘭伯特 (J.H.Lambert,1728-1777) 的大定理，頗為好奇，於是我們一齊討論此題之解法。

游老師提及林礽堂老師(建中退休老師)曾介紹關於拋物線的幾何作圖求拋物線上的點，對解決此題有相當正面的效應，請見 93 年版康熙數學課本第四冊 P.24 隨堂練習多有著墨。在這題隨堂練習中提及：由焦點、切線找出準線的幾何特性。杜老師也提出拋物線的幾何作圖中點 P 要先建構出來的重要性，於是我們便依林老師的想法提出另一解法,於工作坊(每週二)介紹給成功團隊。(感謝洪萬生老師的號召凝聚,至今團隊依舊運作未停。)在討論過程中，杜老師發現解法的舉例中有兩個拋物線只與直線 $y = x - 1$ 及 $y = -x - 1$ 相切，而不與 x 軸相切，這與題意不合;於是我們再進一步討論，最後終於找到焦點 $F(u, v)$ 須再加一條件 $u^2 + v^2 = 1$，即蘭伯特定理的要求。因為，過三直線 $y = x - 1$ 及 $y = -x - 1$ 及 x 軸三交點的外接圓就是 $x^2 + y^2 = 1$。而與此三直線相切的拋物線的焦點必座落在此單位圓上。我們團員認為應介紹給昔日同修老師,於是由我們將此解法簡介於下,尚請不吝指教!

試題如下：

有一條拋物線,位於座標平面之上半面(即其 y 座標≥0),並與 x-軸,直線 $y = x - 1$,直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確?

(1)此拋物線的對稱軸必為 y 軸。

(2)若此拋物線的對稱軸為 y 軸,則其焦距為 1。

(3)此拋物線的頂點必在 x 軸上。

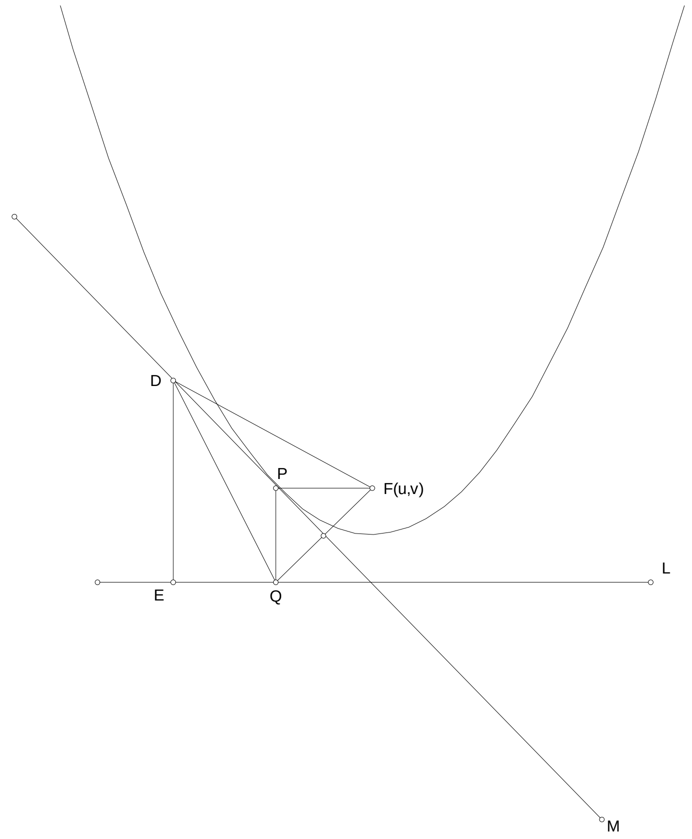
(4)有不只一條拋物線滿足此條件。(94 年指考數甲)

答案:(2)(4)。

解析:1、利用拋物線的幾何作圖原理。

2、利用點對直線的對稱點求法。

3、利用拋物線方程式的定義求方程式。



精解：

(a) 設一直線爲L,及L外一定點F,在直線L上取任意點Q,作$\overline{QF}$的中垂線 M，且過點Q作直線L的垂線交$\overline{QF}$的中垂線M於點P，則點P即爲以L爲準線，F爲焦點的拋物線γ上的一點，這就是拋物線上點的幾何作圖。

接上述拋物線的幾何作圖(如前圖)得知:$\overline{QF}$的中垂線M爲拋物線γ的一條切線。

(因爲，設D爲$\overline{QF}$中垂線M上異於P的任意點，且D在準線上的投影點E，得ΔDEQ爲直角三角形，故得$\overline{DQ} > \overline{DE}$,又$\overline{DQ} = \overline{DF}$，因此$\overline{DE} < \overline{DF}$。由此關係得：$\overline{QF}$的中垂線落在拋物線所分割平面成兩部分的同一部分之中，且拋物線與中垂線M只交於一點P，故知直線M爲拋物線的一切線。)由此性質得到F關於切線的對稱Q必會座落在準線上。

(b) 設焦點$F(u,v)$,則F對直線$y = x - 1, y = -x - 1$的對稱點分別爲

$A(v+1, u-1), B(-v-1, -u-1)$而直線$\overleftrightarrow{AB}$爲此拋物線的準線;故得準線$\overleftrightarrow{AB}$:

$ux-(v+1)y=v+1$ (此準線恆過點(0,-1),即已知二切線的交點座標)。

(c) 又拋物線與 x 軸亦相切,故準線 $\overleftrightarrow{AB}$ 要通過 $F(u,v)$ 對 x 軸的對稱點,即

$F'(u,-v)$;將 $F'(u,-v)$ 代入準線 $ux-(v+1)y=v+1$ 得: $u^2+v^2=1$,故焦點 F 必須在圓心爲原點的單位圓上。(與蘭伯特定理相呼應)

(d) 由拋物線定義得: $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}=\dfrac{|ux-(v+1)y-(v+1)|}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}}$ $\Rightarrow$

$$[(v+1)x+uy-(2uv+u)]^2=2[u^2-(v+1)^2]\left[ux-(v+1)y-\frac{u^2-v^2+1}{2}\right],$$

(其中 $v>0,u^2+v^2=1$)此爲拋物線之通式解。

若拋物線的對稱軸爲 y 軸,則可設所求拋物線爲 $x^2=4cy$;又它與 $y=x-1$ 相切,得 $x^2=4c(x-1)$ 有重根,即 $x^2-4cx+4c=0$ 的判別式 $(-4c)^2-16c=0$ 得 $c=1,0$(不合), 故得 $x^2=4y$,且焦距 $c=1$,而 $x^2=4y$ 即爲(d)中取 $(u,v)=(0,1)$ 所得的方程式。故知選項(2)正確。

(e) 取 $F(u,v)=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 時,代入(d)中得拋物線方程式: γ_1:

$$\left[(\frac{3}{5}+1)x-\frac{4}{5}y-(2\cdot(\frac{-4}{5})\cdot\frac{3}{5}-\frac{4}{5})\right]^2=2\left[(-\frac{4}{5})^2-(\frac{3}{5}+1)^2\right]\times\left[-\frac{4}{5}x-(\frac{3}{5}+1)y-\frac{\frac{16}{25}-\frac{9}{25}+1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{44}{25}\right]^2=2\left[-\frac{48}{25}\right]\left[-\frac{4}{5}x-\frac{8}{5}y-\frac{16}{25}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{16}{25}\left(2x-y+\frac{11}{5}\right)^2=\frac{96}{125}\left(4x+8y+\frac{16}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 4x^2-4xy+y^2+4x-14y+1=0$$

可以直線驗算 γ_1 分別切直線 $y=0,y=x-1,y=-x-1$ 於 $(-\frac{1}{2},0),(4,3),(-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$

這是一個斜拋物線。可知選項(1)(3)錯誤。

(f) 取 $F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ 時,代入(d)中方程式得 γ_2:

$$\left[(\frac{1}{2}+1)x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})\right]^2=2\left[(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2}+1)^2\right]\times$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x-(\frac{1}{2}+1)y-\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+1}{2}\right]$$經整理得：

$\gamma_2 : 3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-2\sqrt{3}x-10y+1=0$

(1) 將直線 $y=0$ 代入 γ_2 得: $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0 \Rightarrow (\sqrt{3}x-1)^2=0$ 故 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

得拋物線 γ_2 切 x 軸於 $(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$ 。

(2) 將 $y=x-1$ 代入 γ_2 得: $3x^2+2\sqrt{3}x(x-1)+(x-1)^2-2\sqrt{3}x-10(x-1)+1=0$

$\Rightarrow (4+2\sqrt{3})x^2-(4\sqrt{3}+12)x+12=0 \Rightarrow \left[(\sqrt{3}+1)x-2\sqrt{3}\right]^2=0$

得 $x=3-\sqrt{3}$,即 $y=x-1$ 與 γ_2 切於點 $(3-\sqrt{3},2-\sqrt{3})$ 。

(3) 將 $y=-x-1$ 代入 γ_2 得: $3x^2+2\sqrt{3}x(-x-1)+(-x-1)^2-2\sqrt{3}x-10(-x-1)+1=0$

$\Rightarrow (4-2\sqrt{3})x^2-(4\sqrt{3}-12)x+12=0$

$\Rightarrow \left[(\sqrt{3}-1)x+2\sqrt{3}\right]^2=0$ 得 $x=-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=-3-\sqrt{3}$,即 $y=-x-1$ 與

γ_2 切於點 $(-3-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ 。

由(e)(f)(g)可知選項(4)正確。