HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啓文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心) 傅聖國 （北市萬福國小）
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第八卷 第十一期 目錄(2005年11月)

- 如何「萃取」才有意義呢？
- 《翠維索算術》簡介
- 《翰林數學》數學乙模擬試卷：一至四冊
- 新書介紹：***Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History***

如何『萃取』才有意義呢？

台師大學數學系 洪萬生教授

任何人不管喜歡數學與否，大概都同意我們的生活周遭蘊藏了豐富的數學知識，譬如自然界中就四處可見『斐波那契數列』與『黃金比例』等等。問題是：吾人究竟應該如何『萃取』，才是一個有意義的認知活動呢？

幾天前，筆者有幸聆聽洪雪芬展示了她的小學教學設計得獎作品－『超級明星臉：柱體與錐體』，發現她們團隊使用了『去雜化』與『萃取』這兩個動詞，頗能呼應『在生活情境中學習數學』之主張，非常值得我們分享這一項研發成果。

洪雪芬老師任教於高雄市博愛國小，上述這一件作品由她與林育君老師、林琬淇老師合作完成，後來參加了 94 年中小學教師數學教學設計競賽，榮獲優等獎（由台灣科學教育館舉辦)。在她們的設計理念中，洪雪芬等規劃了『去雜化』、『遊戲化』與『E 化』的互動教學情境，譬如說，她們運用電腦軟體的『去雜化』功能，從學校的建築物中，『萃取』柱子的『秘密』。然後，再布置一個遊戲活動，讓小朋友通過動手操作以體會柱體的性質。至於『E 化』，則是利用網路資源，讓學生熟悉柱面的分解或展開（圖)。根據她們的說法，整個教學設計的『訴求重點』在於：

1. 強調由建築物中萃取角錐、角柱以促進生活與數學之連結。
2. 強調善用網路資源教學以提升教學品質。
3. 強調透過動態幾何以促進三維實物與二維圖像之連結。
4. 強調善用網路分享自己的解題策略並欣賞他人的創意巧思。

相形之下，一般人指出生活中處處有數學，除了藉以讚嘆大自然的『美』或敬畏造物主的『善』之外，大都難以觸及『生活與數學之連結』的價值與意義，而平白浪費了生活環境中所蘊藏的這些珍貴的資源。

從認知觀點來看，這種從實物『萃取』概念（柱體）的可能性，顯然呼應了亞里斯多德的數理哲學主張。正因爲如此，概念發展之後的數學理論，才比較容易回饋到現實世界，

而這最終也促成了數學與自然科學的良性對話關係。不過，我們也不要忘記：『萃取』所得的概念有其抽象性，而這種抽象之必要，卻正如同柏拉圖所主張，可以保證我們在不受現實世界的表象所迷惑的情況之下，進行『純粹』數學知識的思考、論證與（內部）連結。我想，這應該也是古埃及的實用幾何發展為古希臘的歐幾里得幾何，所留給我們的最珍貴歷史見證。

因此，從認知來看也好，歷史發展來看也好，從現實世界『萃取』概念固然重要，然而，萃取之後的概念發展，顯然也一樣重要。譬如說吧，方、圓柱體的體積，與『尤拉公式』（亦即：對凸多面體而言，面數＋頂點數－稜數＝2）之探索，都可能在『遊戲階段』觸及。也就是說，『遊戲階段』或許是孩童概念發展的一個重要階段。在此一階段中，萃取的概念與其歸屬之實物之間的關係若即若離，也佐證了情境教學的不可或缺。因此，『萃取』之後，繼之以『遊戲』，應該是值得鼓勵的學習活動。吾人生活環境中誠然充斥著數學，只是如何面對，恐怕才是大學問呢。

何以圓面積公式 $A=\frac{1}{2}CR$ 比 $A=\pi R^2$ 更為根本？

蕭文強教授針對此一主張，提供了一個非常精彩的說明。茲引述如下：

The formula $A=\frac{1}{2}CR$ in one respect better than $A=\pi R^2$, because it reveals a very fundamental and important fact, namely, the 2-dimenstional attribute of area is closely related to the 1-dimensional attribute of circumstance. More generally, it relates the area of a closed and bounded region to some quantity on its boundary. It reminds us of the beautiful relationship known as the Fundamental Theorem of Calculus. Indeed, the generalized version of the Fundamental Theorem of Calculus, known as Stokes' Theorem, becomes Green's Theorem when applied on the plane. It says that under suitable condition the line integral $\oint_C pdx+qdy$ on a simple closed curve C is equal to the double integral $\iint_A(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy$ over the region A bounded by C. Letting C be the circle given by $x^2+y^2=R^2$, and setting $p=-y, q=x$, we obtain the formula

$A=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\oint_C(-y,x)\cdot(-\frac{y}{R},\frac{x}{R})dl=\frac{R}{2}\oint_C dl=\frac{1}{2}CR$. This kind of discussion is heritage.

蕭文強在 Stoke 或 Green 定理的映照下，極具洞識地看清楚了圓面積與圓周長的深刻本質關連。可見，數學能力對於一位教師能否洞穿事物的本質至為重要。

《翠維索算術》簡介

樹林高中 王鼎勳老師

一、前言

今天的義大利地區，在十五世紀是商業蓬勃發展的區域，更是歐洲的貿易中心。例如威尼斯的出口貿易額一千萬ducats，進口也是一千萬ducats、當時碼頭工人的收入一年約 100 個ducat、貴族約有 1000 個ducat、有錢商人的收入約有一萬個ducat。基於鉅額的商業貿易，對快速、方便的商業數學 (commercial mathematics) 益發渴求。因此，利用印度－阿拉伯數碼作爲記帳、計算的工具，就廣受當時的義大利商人所採用。而這種採用印度─阿拉伯數碼的商業數學知識，在當時就被稱爲「實用算術」(practical arithmetic)。雖然在當時的大學裡，也有教授實用算術的課程，但其目的並非是爲了實際之應用，而是爲了學習今天所謂的數論。因此，在當時就有許多精通商業計算技巧的人，在一些商業發達的城市或者商旅據點上開設實用算術的「補習班」，以符合想要學習商用數學的學生之需求。雖然這種實用算術「補習班」在當時很盛行，[1]但只有少數文獻流傳至今以供窺視當時的教學情形及授課內容。其中，西元 1478 年出版的《翠維索算術》(*Treviso Arithmetic*)，不僅是一本關於當時實用算術的數學書，更是現存最早的印刷本數學著作。

《翠維索算術》原書未載明作者爲何人，[2]但由其內容，可確定它是第一本爲大眾需要所寫的實用算術書，這是因爲其所使用的文字是當時威尼斯一般民眾所使用的方言，而非貴族所使用的拉丁文。不過，若要一般人將它拿來作自修的課本，應該是不容易研讀，尤其書中有關貨幣的換算、重量單位的轉換等，讀起來一定相當的乏味，因此，它在當時應該是某位算術師傅的密笈（講義），用以教授向他學習實用算術的學生。做這樣的猜測其實是有道理的，因爲其正文一開始便點出：

> 常有一些可愛的年輕人問道於我，想學習商業的技巧，如何能學『計算之學』，爲了回應他們誠懇的想法，也因爲這門知識的確有價值，我不揣淺陋，願意貢獻所知，以其莘莘學子確有所得。因此以上帝之名，爰將所知整理臚列如下。[3]

本文將對《翠維索算術》的內容做概略的介紹，以饗對十五世紀商業數學有興趣的讀者。

二、《翠維索算術》內容簡介

《翠維索算術》全書的內容可分爲三個部分，分別是印度─阿拉伯數碼的介紹、運算方法部分及商用數學的應用部分。

一開始是印度─阿拉伯數碼的介紹。在數的分類上，《翠維索算術》認為數是一種度量，把幾個東西合起來才有「數」的出現，最少兩個，因此「2」是第一個數，也就是最小的數；任何數的本質上都是 1。在此，我們可清楚地看到古希臘數論的影響。[4]為了方便用手指來計算，《翠維索算術》中還將數分成「簡單數」 如 1、2、3 等不含 10 的數；「關節數」(article) 如 10、20、30 等可被 10 整除的數；「複合數」(composite number或 mixed number) 如 11、12、13 等超過 10 又不能被 10 整除的數。

Units	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Tens	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0
Hundreds	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0
Thousand s	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 0 0 0
Tens of thousands	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 0 0
Hundreds of thousands	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 0
Millions	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0
Tens of millions	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0
Hundreds of millions	i 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Thousands of million s	i 2 3 4 5 6 7 8 9

圖一

第二部分是處理數的「方法」包含了五種基本運算法則，分別是記數法 (numeration)、加法 (addition)、減法 (subtraction)、乘法 (multiplication) 和除法 (division)。[5]我們依序來介紹這幾種方法。

首先是「記數法」，就是將數字用記號記述下來，可以用十個字母也可以用十個數字。在這十個數字中，*i*不是數而叫做「數源 (source of number)」，第十個數 0 叫做零 (cipher) 或無 (nulla)，因不代表任何東西，本身沒有值，看起來有點像今日定義每一位數的值為何，[6]如個位數（以 1 為單位）、十位數（以 10 為單位）、百位數（以 100 為單位）…如圖一，每一個數目字都可以乘以位值 (place value)，而《翠維索算術》將現今數字的每一位數值都看成一種運算，也是一種古今有別的地方。

再來看看第二種運算「方法」－加法，是把幾個數（至少兩個）加以合在一起，以構成一個新數的運算。《翠維索算術》的作者提到，在運算時，習慣上會把小的數加到大的數，如果反著做，答案一樣，但前者比較順手。[7]它在操作的時候，與現今的直式加法無異，還是需要將個位數字與個位數字對齊，十位數字與十位數字對齊…，然後永遠從最低位往上加，如圖二所示之例子，可見一斑。特別有趣的是，作者提供了一種有趣的驗證法─「9 去法」，其原理，便是今日的除以 9 的餘數運算規則（同餘的概念），不過作者在書中並未解釋其原理。以圖二「453*i*8 加上 2732」的例子來說，從位值大的數 4 和 5 開始，和是 9（去掉），3 和 1 得 4 再加 8 得 12 去掉 9 得 3，3 和 2 得 5，5 和 7 是 12 去掉 9 得 3，

	4	5	3	*i*	8	
		2	7	3	2	
The sum	4	8	0	5	0	
	4	5	3	*i*	8	
		2	7	3	2	
The sum	4	8	0	5	0	|8

圖二

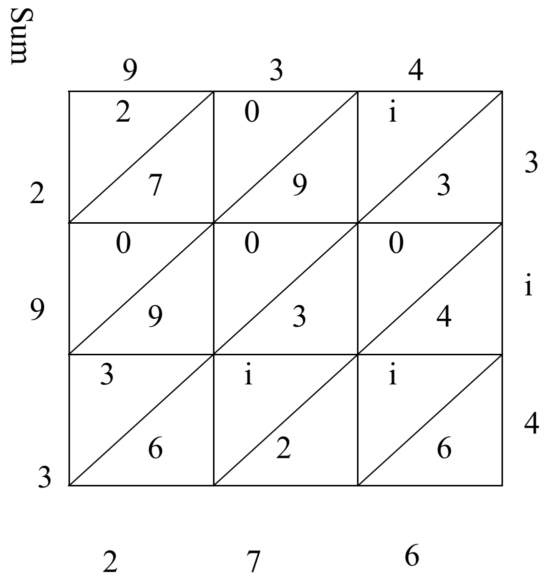
3 和 3 得 6，6 和 2 得 8，將 8 寫在和的旁邊等待驗算。再來看看和，4 和 8 得 12 去掉 9 得 3，3 和 5 得 8，與先前求得之數一致，所以結果正確。在介紹加法以後，不免要拉回商業教育意義，作者便舉了一些貨幣加法的例子。

第三種運算「方法」是減法，書中所謂的減法，是在兩數之間，找出小者比大者差多少。減法的要求與現在做減法的的方式，本質上是一樣的，但在做法上稍有不同。舉例來說，如圖三，當個位數字比小數的個位數字小的時候，先取6 之 10 的補數 4，[8]4 加 2 得 6 寫在 6 的底下。進 1 加 1 得 2，3 減 2 得 1，寫在 1 的底下。取 8 之 10 的補數 2，2 加 7 得 9，寫在 8 的底下。最後進位 1 到空位去，2 減 1 得 1 寫在空位底下。答案是 1916。證明它正確的方法還是可以利用「9 去法」，如圖四。當學完加法與減法的運算「方法」後，作者也體貼的將加法與減法做連結，「**最先的加法等於可用兩個減法驗算其正確；而目前的減法其實也可以加法驗算。**」[9]如同前一節的加法，在介紹減法完後，作者會舉一些貨幣減法的例子。

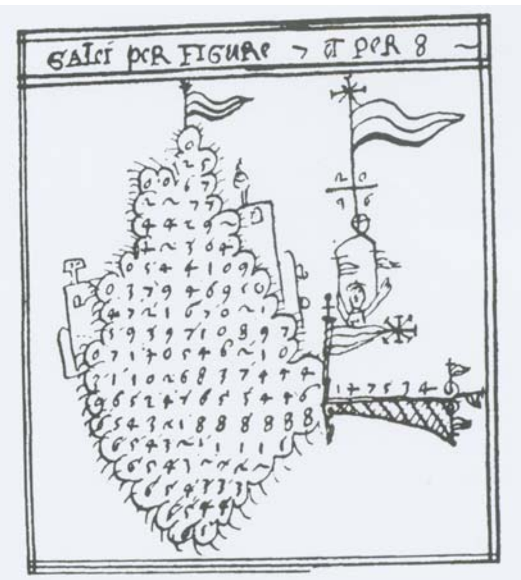
2	7	3	2		5
	8	1	6		$6 \Rightarrow 5+9-6=$
1	9	1	6		8

圖三　　　　圖四

第四個運算「方法」是乘法。在學習乘法前，《翠維索算術》作者希望學習者能熟記「乘法表」[10]（有點像今日的九九乘法表，但加入了一些貨幣換算的乘法表）。由此看來，在學習初等算術乘法技能的時候，似乎古今在這個地方是有共識的。有了基本技能後，作者介紹了三種乘法的種類，分別是表式（□□□□×□）、交叉式（□□×□□）及棋盤式（□□□×□□□）。其中共有五種棋盤式乘法，第一種的操作與今日的乘法的作法並無相異，也相對地直觀，筆者相信這是被流傳下來的主因。另外，筆者覺得甚爲有趣的棋盤式第五種方法，如圖五「314 乘 934」之例。驗證它是否正確的方法，還是可以利用「9 去法」。筆者覺得這五種棋盤式乘法，基本上都是從程序性的知識出發，希望學習者經過一連串的訓練後，能得到乘法的概念性知識。



圖五


圖六

第五個運算「方法」是除法，就是由兩個數找出第三個數，使得第三個數表示另外兩數中，較大的數是較小是的多少倍（整除時）。舉例來說，用 16 除以 2；16 爲 2 的 8 倍，因此就說 8 就是商。《翠維索算術》中介紹了兩種除法的運算方法，一爲表式除法 (The method of dividing by the table，就是現今除式爲個位數的除法)，一爲船式除法（如圖六，有點像現今的直式除法，允許有餘數），兩種演算法都可利用「9 去法」（利用乘法反推）證明它正確。舉例來說，9875

除以 94 的運算過程（如圖七）都是由高位數往低位數做運算，原理是一樣的，在某種程度上是有便捷性的，雖然在計算的過程中必須很小心（當數字很大時，容易計算錯誤），

$$\begin{array}{cccc|} & & & \\ 9 & 8 & 7 & 5 \\ 9 & 4 & & \\ & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|l} & 4 & & & \\ \cancel{9} & \cancel{8} & 7 & 5 & i \\ \cancel{9} & \cancel{4} & & & \\ & & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|l} & 4 & & & \\ \cancel{9} & \cancel{8} & 7 & 5 & i\,0 \\ \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{4} & & \\ & \cancel{9} & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|l} & \cancel{4} & 2 & & \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} & 5 & i\,05 \\ \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{4} & 4 & \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|l} & \cancel{4} & \cancel{2} & & \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} & 5 & i\,05 \\ \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & & \end{array}$$

圖七

學完除法後，《翠維索算術》作者也貼心地交代了乘法與除法是可互相驗證的。

三、商用算術範本

看完記數法、加、減、乘、除五種表示與運算的基本規則後，在文本後半部帶出來的訓練，則是商業應用的方法，主要是四則計算與貨幣換算及重量換算的能力加強訓練。事實上，《翠維索算術》牽涉的內容都是爲了解決實際商業問題，其內容幾乎涵蓋了當時學商的學子們想學得的實用解題技巧，而這些技巧又可分幾個基本方向。

首先是「三率法」(Rule of Three) 之應用：「原事物」(Argument)，「果實」(Fruit) 和「需求」(Requisition) 爲三個項的名字，第一個和最後一個意義上很類似。其作法就是以「需求」乘上「果實」，再除以「原事物」即是答案，這其實就是現在的比例式，用今日之符號表式就是 $a:b=c:x \Rightarrow x=\dfrac{b\times c}{a}$。《翠維索算術》作者很體貼地安排了十五個由簡而難的例子，從整數到帶分數、從沒有單位的到帶有單位的，在手法上雖然比不上今日的方法簡潔有力，但在當時應該是主流的方法。這十五題中也不乏相當棘手的分數，如 $\dfrac{3345332}{4320864}$，相信這是在測試學生的計算的能力。另外，在遇到除數是 100 或 1000 時，《翠維索算術》作者也教導了如何取捷徑，也就是只要將被除數的十進位移動即可。[11]總而言之，「三率法」的使用，幾乎貫穿了《翠維索算術》的後半部。

第二個應用是「皮重 (tare) 和添重 (tred)」，這個題目在當時應該是一個相當流行的商業問題，《翠維索算術》所用之詞，是一種減價或折扣，通常換算成錢，用來補貼給買方貨物在運送過程中所發生的損耗、受損或價值降低。至於操作的方法還是利用「三率法」來揭露獲利的情形。

第三個應用是「合夥」問題。商業與貿易活動在人類歷史上大概可分爲三個階段，「一人貿易」、「合夥」(partnership) 及「公司」(corporation)，[12]從跑單幫、到一起出錢出力，到你出錢我出力，其實是有其時代背景的，而文藝復興時期，商業組織上最普遍的形式是合夥制，要合夥融洽，利潤一定要分配的公平，因此合夥的計算便成爲商業生活中不可或缺的一環。大多數中世紀的算術書作者都把合夥制當作書中重要的環節，《翠維索算術》也不例外。《翠維索算術》作者提出的合夥問題的作法，其中考慮到投入資金與投入時間

的算法（資金×投入時間：資金×投入時間），有點像今日在求加權平均數的比例再行分配之，是一個算是針對分配利益考慮周延的一個方法。

第四個應用是「以物易物」。到文藝復興時期，由於缺乏孚眾信的國際貨幣，所以，仍有部分交易是採以物易物的方式進行。以物易物，不僅僅是拿東西換東西，而是建立一種制度，使雙方的貨品還原成一種度量，例如換成同一種貨幣，像lire或ducat等等，所以當時的一本書的概略的定義成「**以物易物：避免自己受騙上當；也避免去騙別人。**」[13]相較於當時的算術書都花不少篇幅來討論「以物易物」這個主題，《翠維索算術》卻只用了三個例題。筆者認為，這或許是《翠維索算術》的作者認為在熟悉了三率法後，三個例題應該就足以應付這一個主題了。

第五個應用是「造幣合金」（混合法）。這個算法之所以會被重視，跟當時的冶金術有關，因為通商的發達，用計量的方法確定合金的成色的工作（如此才能決定貨幣的價值），也從以前煉金術士的手裡變成算術老師的工作。《翠維索算術》中混合法都在討論貴重金屬的處理。在當時城邦式的國家都可以造自己的錢幣，由於缺乏統一的機制，所以各個國家的錢幣內涵貴重金屬成色便不近相同，所以了解貨幣成色比的這門學問對商人也相形重要，《翠維索算術》中提及混合法只是重覆使用「三率法」而已。[14]

第六個應用「二事法 (the rule of two things)」：把兩數相乘的乘積除以兩數之和。舉例來說，「教皇遣使致信從羅馬到威尼斯，命令信差必須於七天內到威尼斯。而威尼斯這位最有名的紳士剛好也遣信差到羅馬來，信差必須於九天到。從羅馬到威尼斯 250 哩。在主子的驅使下，兩個信差剛好同時出發，問多少天後兩人相逢，各走了多少哩？」[15]其原理是：

從羅馬到威尼斯去的信差旅行速率是 $\frac{250}{7}$ 哩/天

從威尼斯到羅馬去的信差旅行速率是 $\frac{250}{9}$ 哩/天

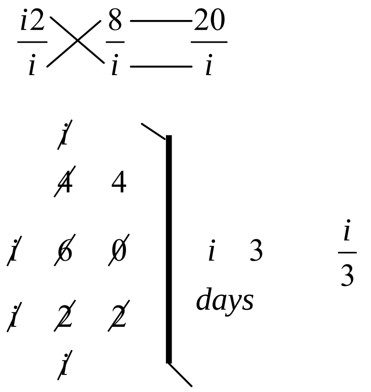
假設他們是 d 天後相會，則 $\frac{250}{7}d+\frac{259}{9}d=250$

$\Rightarrow d=\frac{9\times 7}{9+7}$，這就是《翠維索算術》作者提出的答案。

信差的問題許多古老的數學書都有提出，有趣的是，大多數的信差問題都是以羅馬為起點或終點，這或許透露出兩件事：(1)義大利就是這類問題的起源地。(2)在當時羅馬是歐洲政治和宗教的中心。[16]

第七個應用是「工程問題」。說穿了其實就是用「三率法」來處理今日的倒數方程式的問題，利用純計算的方法，在方法上雖然不像今日直接假設未知數列方程式來得直觀，但相信在當時這些算術老師在其運算的本質上，應該有掌握到其內概念性的意義才對。來看看這個例子，「一個木匠準備 20 天建一個房子，他雇了一個幫手說：如果我們倆一起幹

活，房子 8 天就可造好。問如果只是幫手單獨建屋需花上多少天？」[17]



答案是：第二個人可獨力花 13 又$\frac{1}{3}$天建好此屋。

最後一個應用是「黃金數字和滿月」的問題。以今日的角度來看，一本算術書討論復活節與月亮的盈虧時間有點奇怪，但占星術在中世紀和文藝復興早期是屬於顯學，而數學是占星術這們學問作推算的必備的技能，無怪乎《翠維索算術》還是將它編入教材中。換個角度想，商人們整天東奔西走的四處冒險，對運氣之事難免格外相信，所以，《翠維索算術》也不免俗的將之收錄進來。更實際的原因則可能是：第一，市場和買賣是有季節性的；第二，什麼時候是一般節日，什麼時候是教會節日，休不休息，這牽涉到人力和資金的調配。[18]由此觀之，《翠維索算術》的作者在書中引介如何推算曆法，似乎也就合情合理了。

四、結語

在中世紀的歐洲，大部分地區，算盤及羅馬數字系統仍然十分流行，因此，這一部書的問世，頗能幫助我們透視十五世紀後期新數學發展的實況，包含來自正面的響應甚至負面的阻撓。[19]《翠維索算術》這本書總共大概才印了一版，傳世的很少，在當時早期文藝復興印書的標準而言算是一本小書，這也說明原來只作一般用途的，極有可能只是用來教授自己的學生。在看完《翠維索算術》之後，我們對於十五世紀末如何教算術這件事有些概念了。其實，大多數與今日無異，從程序性出發慢慢到概念性知識的形成，更是呼應了階段性的教學活動。[20]另一方面，《翠維索算術》之所以會成書，主要歸功於義大利活躍的商業活動。當時商人子弟爲學習實用數學，而求助於私人補習班。不過，本書會不會是補習班的講義，則不得而知。

看看過去的教材，想想今日的教學活動（教材），有許多的地方是值得今日繼續採用的，當然也有許多方法則需要再改良了。就 HPM 的觀點來看，看看過去前輩的教材教法，再想想今日的自己如何教相同的概念，經過反思後愈會清楚自己的教材教法之優缺點。筆者常跟學生講一句話：「歷史，不只能找到借鏡，有更多的時候是可以參考的」，願共勉之。

五、後記

本書《翠維索算術*Treviso Arithmetic*》是由 David Smith 所翻譯，譯稿一直收藏於紐約哥大圖書館善本書室，經 Frank J. Swetz 整理後出版。另有中文翻譯版《資本主義與算

術》，由彭廣愷翻譯，對照原文後，我們覺得中譯本的數學素養略嫌不足，建議讀者若能接受原文書的話，不妨以原文書為主較為理想。

文末，附上當時的貨幣與重量單位的換算規則。[21]

參考文獻

Swetz, Frank J. 1987). *Capitalism and Arithmetic*: *The New Math of the 15th Century*. La Salle: Open Court.

彭廣愷譯 (2003)《資本主義與算術》，台北：河中文化實業有限公司。

藍紀正，朱思寬譯（1992）.《歐幾里得幾何原本》，臺北：九章出版社

丑田俊二 (2005).《愛上數學的第一本書》，台北：商周出版社。

註解

1. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, pp. 15-18。
2. Manzolo (印刷業者，1476 到 1481 在翠維索開業) 於 1478 年印行的。
3. 引自彭廣愷譯《翠維索算術》，頁 35-36。
4. 參閱歐幾里德《幾何原本》第五卷。
5. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 41。
6. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, pp. 41-42。
7. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 45。
8. 若$a+b=10$則 a、b 互為補數。
9. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*,.pp. 60-61。
10. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*,.pp. 68-71。
11. 只要除數有 0，不管含幾個 0，那就從被除數把幾位截去，剩下才拿來除以除數。
12. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 234。
13. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 238 “Bartering is nothing but giving away one piece of merchandise for another in hope of coming out in a better position.”
14. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 241。
15. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 243。
16. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, p. 245。
17. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, pp. 162-163。
18. 參閱彭廣愷譯《資本主義與算術》，頁 199。
19. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, pp. xv-xvi。正面：從六十進位簡化到十進位，負面：大多數的歐洲國家依然採用六十進位。
20. 參閱 Frank J. Swetz (1987), *Capitalism and Arithmetic*, pp. 22-23。
21. Money：

    1 lire（里拉） = 10 ducats

    1 ducat = 2 soldo

1 lire = 20 soldi

1 soldo = 12 grossi

1 grosso = 32 pizoli

	lire	ducat	soldo	grosso	Pizoli
Lire	1				
Ducats	10	1			
soldi	20	2	1		
grossi	240	24	12	1	
pizoli	7680	768	384	32	1

Weight：

1 pound = 12 ounce

1 mark = 8 ounce

翰林數學高三乙模擬試卷

命題教師：國立蘭陽女中數學教師　陳敏皓

範圍：第一冊至第四冊。

第壹部分、選擇題（占 30 分）

一、單選題：占 6 分。

說明：第 1,2 題，選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。答對得 3 分，答錯或畫記多於一個選項者倒扣 1 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未答者，不給分亦不扣分。

1. 設 $f(x)$、$g(x)$均為多項式，若$\deg f(x)=5, \deg g(x)=4$，則$(A)\deg[f(x)+g(x)]=9$，$(B)\deg[f(x)-g(x)]=1$，$(C)\deg[f(x)\times g(x)]=20$，$(D)\deg[f(x)\times g(x)]=9$。

2. 若直線$M:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$，下列各直線的表示法，何者不與直線$M$重合？

$(A)\begin{cases}x=-t\\ y=-2t, t\in R\\ z=-3t\end{cases}$，$(B)\begin{cases}x=2t+1\\ y=4t+2, t\in R\\ z=6t+3\end{cases}$，$(C)\begin{cases}2x-y=0\\ 2y-3z=0\end{cases}$，$(D)\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$。

二、多選題：占 24 分。

說明：第 1,2,3 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分，每答錯對一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項之外區域畫記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

3. 有一條拋物線位於座標平面上方（即其y座標≥ 0），並與x軸、直線$y=x-1$、直線$y=-x-1$相切。求可解拋物線的焦點座標？$(A)\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$,$(B)\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$,$(C)\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$,$(D)\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$。

4. 若$\mathrm{Re}(z)$表示複數z的實部，$\mathrm{Im}(z)$表示複數z的虛部，德國偉大數學家萊布尼茲（Gottfrried Leibniz, 1646-1716）在年輕時曾發現一個有趣的結果：若u,v為複數，

$|u|^2+|v|^2=[\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)+\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2+[\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)-\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2$。請問若$a,b$為自然數時，且$(17^2+19^2)\cdot(13^2+15^2)=a^2+b^2$，若$a\geq b$，求數對$(a,b)=$？

$(A)(503,43),(B)(502,64),(C)(506,8),(D)(508,5)$。

5. 若 $x+y+z+u=12$，試問下列哪些敘述是正確的？(A) x,y,z,u 爲非負整數解有 455 組；(B) x,y,z,u 爲正整數解有 165 組；(C) x,y,z,u 爲正奇數解有 35 組；(D) x,y,z,u 爲正偶數解有 10 組。

第貳部分、非選擇題（占 70 分）

一、填充題：占 48 分。

說明：第一至五題，共有 8 個空格，每個空格 6 分，共 48 分。答案務必寫在答案卷內，否則不計分。

1. 假設總共有 72 個金幣，甲乙兩人投擲兩個骰子以決定如何分金幣，若投擲出的點數和爲 7，則 72 個金幣全分給甲；若投擲出的點數和爲 6，則 72 個金幣全分給乙；其餘的點數和時，則平分 72 個金幣，求甲獲得金幣的期望值________。

2. 設集合 $S=\{x|\tan 2x=k\tan x,k\rangle 2,0\langle x\langle 2\pi\}$，求滿足集合 x 的算術平均數________。

3. 求 12^{10} 除以 1000 的餘數________。

4. 若 $a\neq 0,a\in R$，方程組 $\begin{cases} ax+y+\dfrac{z}{a}=1 \\ \dfrac{x}{a}+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$，當 $a=k$ 的情形，此方程組爲無限多解；當 $a=t$ 的情形，此方程組爲無解，求 $k+t=$________。

5. 設 ΔABC 的內心爲 I，且三邊長的比爲 $\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=2:3:4$，同時 $\overleftrightarrow{AI}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，若 ΔABC 的面積爲 $3\sqrt{15}$，求 $\overline{BD}=$________。

6. 若 $\dfrac{1}{1-x+x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots,|x|\langle 1,a_i\in R$，求 $a_0+a_1+\ldots+a_{35}=$________。

7. 若$\log x$的首數與$\log 0.000123$的首數相同，且$\log x$的尾數與$\log 3870$的尾數相同，且x的科學記號表示法爲$x = a \cdot 10^n, 1 \le a \langle 10, n \in Z$，求$a+n=$__________。

8.有一個地球的北極極點座標爲$N(7,6,4)$，南極極點座標爲$S(-1,0,2)$，且北緯23^0上有一點$P(5,3,1)$，求南緯23^0的平面方程式=______________。

二、計算與證明題：占 22 分。

說明：第一題爲計算題、第二題爲證明題，答案務必寫在答案卷內，否則不計分。並於答案欄內標示題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分，每題配分標於題末。

1.馬克思(Karl Marx，1818-1883)在研究歷史辯証唯物論(*Materialism*)時，對於數學所佔的科學地位 十分重視，他曾寫《數學手稿》一書，此書從社會科學角度切入科學範疇。書中有一題問題爲：一個團體有 30 人，其中有男人、女人、小孩，在一個飯館裡，共花了 50 先令，其中每個男人花 3 先令、每個女人花 2 先令、每個小孩花 1 先令，請問男人、女人、小孩的組合有幾組解？（占 10 分）

2. (1)已知：$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，其中$r_1, r_2 \rangle 0$。
求證：$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$。（占 4 分）

(2)試利用(1)的結論，若$z_1 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{11} + i\sin\frac{3\pi}{11}\right), z_2 = 2i$，且
$z_1 \cdot z_2 = r(\cos k\pi + i\sin k\pi), 0\langle k \langle 1$，則實數$k \cdot r =$______________。（占 4 分）

(3)試利用(1)的結論及數學歸納法（mathematical induction），
已知：若複數極式$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r\rangle 0$，當$n \in N$ 時，求證：
$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$。（占 4 分）

參考解答：

第壹部分、選擇題（占 30 分）

一、單選題：：占 6 分。

1. 答案：(D)
命題出處：第一冊第四章、〈多項式〉
試題詳解：$\because \deg[f(x)\cdot g(x)] = \deg f(x) + \deg g(x) = 5+4=9$。

2. 答案：(C)
命題出處：第三冊第二章、〈空間中的直線與平面〉
試題詳解：

$(A)\begin{cases} x=-t \\ y=-2t, t\in R \\ z=-3t \end{cases}$ 的方向向量為 $(-1,-2,-3)=-(1,2,3)$ 且過 $(0,0,0)$，因為 $(0,0,0)$ 代入直線

$M:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$，得 $\dfrac{0-1}{1}=\dfrac{0-2}{2}=\dfrac{0-3}{3}$ 成立；

$(B)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t+2, t\in R \\ z=6t+3 \end{cases}$ 的方向向量為 $(2,4,6)=2(1,2,3)$ 且過 $(1,2,3)$，因為 $(1,2,3)$ 代入直線

$M:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$，得 $\dfrac{1-1}{1}=\dfrac{2-2}{2}=\dfrac{3-3}{3}$ 成立；

$(C)\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$，的方向向量為 $(2,-1,0)\times(0,2,-3)=(3,6,4)\neq k\cdot(1,2,3), k\neq 0$，所以 (C) 錯誤；

$(D)\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$ 的方向向量為 $(-1,-2,-3)=-(1,2,3)$ 且過 $(-1,-2,-3)$，因為 $(-1,-2,-3)$ 代入直線 $M:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$，得 $\dfrac{-1-1}{1}=\dfrac{-2-2}{2}=\dfrac{-3-3}{3}$ 成立。

二、多選題：占 24 分。

1. 答案：$(A)(C)$

命題出處：第四冊第一章、〈圓錐曲線〉

試題詳解：改編自 94 年數學甲多選題第 9 題，根據蘭伯特（J.H.Lambert,1728-1777）定理：拋物線的三條切線的兩兩交點所形成三角形，其外接圓便是拋物線的焦點軌跡。根據題目所示的三條切線為 $y=0, y=x-1, y=-x-1$，其兩兩交點為 $(1,0),(-1,0),(0,-1)$ 所以，外接圓便是 $x^2+y^2=1$，並且由於題目要求此拋物線必須位於 x 軸上方，所以，答案中只有 $(1)(4)$ 滿足，因為 $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1$。

2. 答案：$(B)(C)$

命題出處：第一冊第四章、〈多項式〉

試題詳解：令 $u=a+bi, v=c+di$，其中 $a,b,c,d\in R$，因為

$|u|^2+|v|^2=[\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)+\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2+[\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)-\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2$，所以，得下式：

$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$，則 $(17^2+19^2)\cdot(13^2+15^2)=a^2+b^2$

得 $(a,b)=(17\times15+19\times13, 19\times15-17\times13)=(502,64)$ 或
$(a,b)=(17\times13+19\times15, 17\times15-19\times13)=(506,8)$。

3. 答案：$(A)(B)(C)(D)$

命題出處：第四冊第二章、〈排列組合〉

試題詳解：

$(A)H_{12}^{4}=C_{12}^{4+12-1}=C_{12}^{15}=C_{3}^{15}=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455$。

$(B)x+y+z+u=12,\therefore (x-1)+(y-1)+(z-1)+(u-1)=8$，

$\therefore\ H_{8}^{4}=C_{8}^{4+8-1}=C_{8}^{11}=C_{3}^{11}=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=165$。

(C) x,y,z,u 為正奇數，令

$x=2x'+1,y=2y'+1,z=2z'+1,u=2u'+1,$其中$x',y',z',u'\in N\cup\{0\}$，

得方程式$2(x'+y'+z'+u')+4=12,\therefore x'+y'+z'+u'=4$，

$H_{4}^{4}=C_{4}^{4+4-1}=C_{4}^{7}=C_{3}^{7}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35$。

(D) x,y,z,u 為正偶數解，令

$x=2x'+2,y=2y'+2,z=2z'+2,u=2u'+2,$其中$x',y',z',u'\in N\cup\{0\}$，

得方程式$2(x'+y'+z'+u')+8=12,\therefore x'+y'+z'+u'=2$，

$H_{2}^{4}=C_{2}^{4+2-1}=C_{2}^{5}=\dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$。

第貳部分、非選擇題（占 70 分）

一、填充題：占 48 分，每格 6 分。

1. 答案：<u>37</u> 。

命題出處：第四冊第三章、〈機率與統計〉

試題詳解：點數和為 7 的情形為：$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$；點數和為 6 的情形為：$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$，所以，$P(\text{甲勝})=\dfrac{6}{36}+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{6}{36}-\dfrac{5}{36}\right)=\dfrac{12}{72}+\dfrac{25}{72}=\dfrac{37}{72}$，則甲獲得金幣的期望值$=72\times\dfrac{37}{72}=37$。

2. 答案：<u>π</u>。

命題出處：第二冊第三章、〈三角函數的性質與應用〉

試題詳解：因為$\tan 2x=k\tan x,\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=k\tan x$，移項得$\tan x\cdot\left[2-k\left(1-\tan^2 x\right)\right]=0$，因為$0\langle x\langle 2\pi$，所以，當$\tan x=0$時，得$x=\pi$；當$\tan^2 x=\dfrac{k-2}{k},\tan x=\pm\sqrt{\dfrac{k-2}{k}}$，得$x=\theta,\phi,2\pi-\theta,2\pi-\phi$，算術平均數$=\dfrac{\pi+\theta+\phi+(2\pi-\theta)+(2\pi-\phi)}{5}=\dfrac{5\pi}{5}=\pi$。

3. 答案：$\underline{\ 224\ }$。

命題出處：第四冊第二章、〈排列組合〉

試題詳解：利用二項式展開定理，

因為

$$12^{10}=(2+10)^{10}=C_0^{10}\cdot 2^{10}\cdot 10^0+C_1^{10}\cdot 2^9\cdot 10^1+C_2^{10}\cdot 2^8\cdot 10^2+C_3^{10}\cdot 2^7\cdot 10^3+\ldots+C_{10}^{10}\cdot 2^0\cdot 10^{10}$$

$$\begin{aligned}&=1024+10\cdot 512\cdot 10+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot 256\cdot 100+\ldots\ldots\\&\equiv 24+200+0+0+\ldots(\bmod 1000)\\&=224\end{aligned}$$

4. 答案：$\underline{\ 0\ }$。

命題出處：第三冊第三章、〈一次方程組〉

試題詳解：利用行列式運算，$\begin{vmatrix}a & 1 & \frac{1}{a}\\ \frac{1}{a} & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3+\frac{1}{a^2}+1-1-1-a=a^3-a-1+\frac{1}{a^2}$

$$=\frac{a^5-a^3-a^2+1}{a^2}=\frac{a^3\left(a^2-1\right)-\left(a^2-1\right)}{a^2}=\frac{(a-1)^2(a+1)\left(a^2+a+1\right)}{a^2}$$

，當 $a=1$ 的情形，此方程組為無限多解；當 $a=-1$ 的情形，此方程組為無解，則 $k+t=0$。

5. 答案：$\underline{\ \frac{16}{7}\ }$。

命題出處：第三冊第一章、〈向量〉

試題詳解：令 $a=\overline{BC},b=\overline{CA},c=\overline{AB}$，所以，$a:b:c=2:3:4$，假設

$a=2k,b=3k,c=4k,k\rangle 0$，根據 Heron’s Formula：

$a\Delta ABC=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=\sqrt{\frac{9k}{2}\cdot\frac{5k}{2}\cdot\frac{3k}{2}\cdot\frac{k}{2}}=\frac{3\sqrt{15}k^2}{4}=3\sqrt{15}$，所以，得

$k=2,a=4,b=6,c=8$，又 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=8:6=4:3$，則 $\overline{BD}=\frac{4}{4+3}\cdot 4=\frac{16}{7}$。

6. 答案：$\underline{\ 0\ }$。

命題出處：第一冊第三章、〈數列與級數〉

試題詳解：$\because \frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1\cdot(1+x)}{\left(1-x+x^2\right)\cdot(1+x)}=\frac{1+x}{1+x^3}=\frac{1}{1+x^3}+\frac{x}{1+x^3}$

$$=\left(1-x^3+x^6-x^9+......\right)+x\left(1-x^3+x^6-x^9+......\right)$$
$$=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-x^9-x^{10}+......$$

觀察係數的規則為：$1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1,0,.....$，可見每 6 個係數為一組，所以，

$a_0+a_1+...+a_{35}=\left(a_0+...+a_5\right)+......+\left(a_{30}+...+a_{35}\right)=\left(1+1+0-1-1+0\right)+...+\left(1+1+0-1-1+0\right)$
$=0+...+0=0$

7. 答案：_-0.13_。

命題出處：第二冊第一章、〈指數與對數〉

試題詳解：$\because \log 0.000123=\log 1.23\cdot 10^{-4}$，其首數為 -4；又 $\log 3870=\log 3.87\cdot 10^3$，其尾數為 $\log 3.87$，所以，$x=3.87\cdot 10^{-4}$，得 $a=3.87, n=-4, \therefore a+n=3.87-4=-0.13$。

8. 答案：_$4x+3y+z=18$_。

命題出處：第三冊第四章、〈圓與球面〉

試題詳解：南緯 23^0 的平面方程式的法向量為 $(7,6,4)-(-1,0,2)=(8,6,2)=2(4,3,1)$，同時球心的座標為 $O=\dfrac{N+S}{2}=\dfrac{(7,6,4)+(-1,0,2)}{2}=\dfrac{(6,6,6)}{2}=(3,3,3)$，且南緯 23^0 的平面過一點 $P'=2O-P=2(3,3,3)-(5,3,1)=(1,3,5)$，令南緯 23^0 的平面方程式為 $4x+3y+z=k$ 過 $P'(1,3,5)$，得 $k=4\cdot 1+3\cdot 3+5=18$，所以，南緯 23^0 的平面方程式 $4x+3y+z=18$。

二、計算與證明題：占 22 分。

1. 答案：_九_。（占 10 分）

命題出處：第一冊第二章、〈數與坐標系〉

試題詳解：設男人、女人、小孩各有 x,y,z 人，其中 $x,y,z\in N$，依題意得方程式為：
$\begin{cases} x+y+z=30----(1) \\ 3x+2y+z=50--(2) \end{cases}$，由 $(2)-(1)$ 得 $2x+y=20, \therefore 1\le x\le 9$，令 $y=2t, t\in N$

所以，$x=10-t$ 代入 (1) 得 $z=20-t$，$\because 1\le x\le 9$，$\therefore 1\le 10-t\le 9$，得 $1\le t\le 9$，代入得 $(x,y,z)=(9,2,19),(8,4,18),(7,6,17),(6,8,16),(5,10,15),(4,12,14),(3,14,13),(2,16,12),(1,18,11)$ 共九組解。

2. 答案：

命題出處：第一冊第四章、〈多項式〉

試題詳解：

(1) pf`：$\because z_1\cdot z_2=\left[r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\right]\cdot\left[r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)\right]$
$=r_1\cdot r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\right)+i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right]$
$r_1\cdot r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$。（占 4 分）

$$(2) \because z_1 \cdot z_2 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{11} + i\sin\frac{3\pi}{11}\right)\cdot 2i = 10\left(\cos\frac{3\pi}{11} + i\sin\frac{3\pi}{11}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 10\left(\cos\frac{17\pi}{22} + i\sin\frac{17\pi}{22}\right)$$

$\therefore k \cdot r = \dfrac{7}{22} \times 10 = \dfrac{35}{11}$。（占 4 分）

(3) pf`：利用數學歸納法，當 $n = 1$ 時，$z^1 = r(\cos 1\cdot\theta + i\sin 1\cdot\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（成立）

設 $n = k \in N$ 時，則 $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ 成立。

則 $n = k+1$ 時，利用 (1) 的結論：

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r^k \cdot r[\cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)]$$

$$= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta]$$ 成立。

$\therefore \forall n \in N,\ z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$，必成立。（占 4 分）

敏皓：

你太厲害了，把一堆精采的題目集中在一張考卷，學生可能會受不了。通常編寫訪問模擬考題題目，只要放個兩三題新題目就好了，其餘可用歷屆試題改編，在抄襲十分盛行的參考書界，一下子就被收編入別人的書籍內，等流通一兩年後，再好的題目也會變得沒有鑑別度。重點是下次

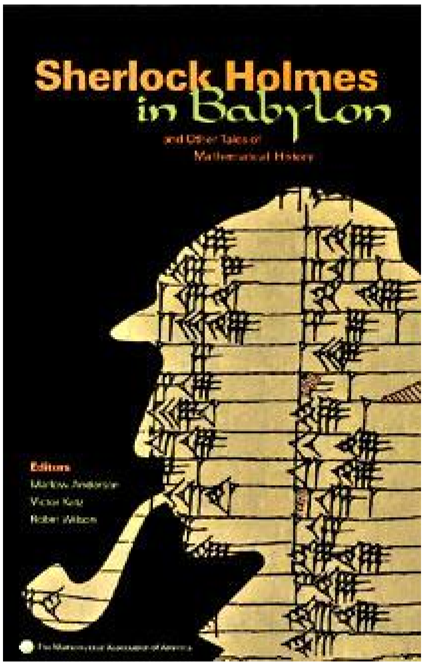
你還要出新的點子，可會黔驢技窮！因此建議你可加入叫生活化的問題，可以在大學經濟學、機率與統計學的相關書籍中找到。另外這一份考題有關排列組合似乎多一些，可以考慮加入矩陣與等差等比的題目，這樣比較妥當。拿掉的題目下次可以用兩三次，女兒的奶粉錢就多了些。

一個編寫評量卷的老前輩啟文　上

新書介紹：《Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History》

《HPM 通訊》編輯 林倉億

Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History 由 The Mathematical Association of America (MAA) 於 2004 年出版，因此，或許對某些讀者來說，這已經不能算是一本新書了。不過，台灣師大圖書館於今年五月底才購得此書，所以，對於筆者來說，它仍是一本「熱騰騰的」新書。書名前半來自書中的第一篇文章 ”Sherlock Holmes in Babylon”，由 R. Creighton Buck 所寫，台灣師大數學系洪萬生教授在〈如何詮釋數學文本？〉一文中提到 Buck 之所以用「福爾摩斯」作爲文章名稱的原由：



> 醉心於「數學考古學」(archaeology of mathematics) 的 Buck 以巴比倫的福爾摩斯 (Sherlock Holmes in Babylon) 自居，在重建「現場」的同時，也向我們指點 Neugebauer 與 Sachs 如何得到他們的結論。

此書的編者們以這篇文章之名稱作爲書名的一部分，或許是期待讀者們在閱讀此書時，能像福爾摩斯一樣地來發現數學史之奧妙。

這本書收錄的文章來自MAA相關期刊：*American Mathematical Monthly*、*National Mathematics Magazine*、*Mathematics Magazine*以及*College Mathematics Journal*，[1]總共有 44 篇，[2]多出自數學史名家之手，其年代最早的一篇出自 1913 年*American Mathematical Monthly*，距今已近百年了。此書的編輯群會收錄不少較爲早期的文章，除了是文章本身的價值外，顯然還希望透過同一主題，安排幾篇不同年代文章，讓讀者除了享受閱讀數學史的樂趣外，還可感受到數學史研究的進展。

收錄的 44 篇文章共分爲四個主題：Ancient Mathematics、Medieval and Renaissance Mathematics、The Seventeenth Century 與 The Eighteenth Century。在每一個主題之前，編者們貼心地爲讀者寫了簡短的前言，扼要地介紹該主題中收錄的文章。不僅如此，編者們還在每個主題的最後，附上一篇後記，爲想要進一步探究的讀者介紹相關的專書。這麼體貼的編者，本文當然不能略去其大名，他們就是 Marlow Anderson、Victor Katz、Robin Wilson 和已故的 John Fauvel。這本書原本是由 Fauvel 與 Anderson、Wilson 三人提議編輯，但由於 Fauvel 不幸在 2001 年辭世，所以，後來由 Katz 來接替。Fauvel 不僅爲數學史的研究與傳播貢獻許多心力，還十分關心 HPM 的發展，並於 1992~1996 年間擔任「HPM 國際研究群」的主席，極力在國際間推動 HPM 的研究。Fauvel 曾於 2000 年來台灣參加 HPM 2000

Taipei（「數學千禧年：歷史、文化與教育」國際研討會），該研討會能成功舉辦，一部分得力於 Fauvel 在國際間的宣傳與積極邀請學者。對於 Fauvel 的學術成就，可參見《HPM 通訊》第三卷第六、七期的《John Fauvel 紀念專輯》。

這本書收錄的文章還有一個特色，就是文章通常不會太長，且適合非數學史專家來閱讀。例如有 19 篇文章是選自 *American Mathematical Monthly*，這份期刊設定的讀者群就包括了中、小學數學教師。因此，國內的數學教師在準備教材之時，若想要多了解一些相關的數學史內容，此書會是一個不錯的選擇。不過，這本書美中不足之處，在於其最後兩個主題中，無論是在收錄的文章或是前言、後記中，皆未能包含 17、18 世紀非歐洲世界的數學發展，容易誤導讀者當時只有歐洲才有數學知識活動。因此，若讀者們想了解相關的內容，只得參閱其他的資料了。

註解

1. *National Mathematics Magazine* 後來改名爲 *Mathematics Magazine*，而這份期刊最早的名稱是 *Mathematics News Letter*，各自之發行期數及年份如下：
   Mathematics News Letter： Vol.1~8，1926~1934；
   National Mathematics Magazine：Vol.9~20，1934~1945；
   Mathematics Magazine：Vol.21~迄今；1947 迄今。
2. *American Mathematical Monthly* 有 19 篇；*National Mathematics Magazine* 有 2 篇；*Mathematics Magazine* 有 13 篇；*College Mathematics Journal* 有 10 篇。

參考文獻

Glass, Darren (2004). 在MAA的網站上有Glass對這本書的評論，網址：
http://www.maa.org/reviews/holmesbabylon.html

洪萬生 (2000).〈如何詮釋數學文本？〉,《HPM 通訊》第三卷第六、七期合刊，頁 1~3。

《HPM 通訊》第四卷第六期《John Fauvel 紀念專輯（上）》

《HPM 通訊》第四卷第七期《John Fauvel 紀念專輯（下）》