HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啟文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心) 傅聖國 （北市萬福國小）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第九卷 第四期 目錄（2006年4月）

海龍公式專輯

海龍公式專輯

《HPM 通訊客座主編》北一女中　蘇俊鴻老師

本次《HPM 通訊》的海龍公式專輯的誕生，正好紀錄了我們公館團隊這一段時間潛心研究的成果。海龍公式在數學上並非是個偉大的定理，似乎被我們「小題大作」。但是，當我們站在教學的角度上，審視海龍公式所能引動教學上的意義及帶給數學老師的啓發，卻讓人覺得它是個值得好好發揮的題材，且容筆者細說分明。

整件事情的開端正是李善蘭，這位被洪萬生教授高度評價，認爲在引領中國數學教育全盤西化的風潮上，扮演重要角色的清末數學家。爲了研究李善蘭在《天算或問》一書提出有關海龍公式的證明，理解李善蘭在三問三答之間，鋪陳而出的論證。讓每個星期四下午回到師大上課的公館團隊成員們吃足了苦頭。經過大約三週的反覆討論，大家慢慢地對文句的解讀獲得共識，也釐清其間的算理。然而，隔週接著討論的《中國近代數學教育史稿》(李兆華主編，山東教育出版社，2005 年)第 68 頁中討論平面三角學內容，提及明末清初傳入中國的平面三角學知識，看見讓人熟悉的公式 $r^2=\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ ，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ ，r 爲三角形內切圓半徑。只要兩邊同乘 p^2 ，不就是我們所熟知海龍公式了。換句話說，海龍公式早在明末清初之際，隨著傳教士的腳步進入中國。那麼，它有著什麼樣的影響呢？那海龍公式的證明呢？中國的數學家如何看待這個證明，如何消化吸納呢？

隨著資料的收集，我們在徐光啓督修的《測量全義》看見海龍公式；在梅文鼎的《平三角舉要》見到海龍公式；在康熙下令御製的《數理精蘊》中也見到海龍公式的蹤影。當然，除了實例演算外，也包括海龍公式的證明。在這些公式的比對中，我們看見了證明的傳承，以及歷代數學家在細部所做的微調。接著，又在清末民初，被教會學校廣泛採用的翻譯數學教科書《八線備旨》中看見海龍公式及其證明，這時証明的風貌已經偏轉爲代數

形式，朝著今日我們熟悉的證明形式邁進。在這個證明方法的轉變之中，我們也見到三角學內容中的載體也由幾何形式轉而朝代數形式演變。

因此，在洪萬生教授的提議下，彙集大家研討的心得與成果，便有了此一專輯的產生。整個專輯規劃的架構大致如下：

一、海龍公式 vs. 三斜求積術
　(1)Heron 生平、《Metric》及原始證法
　(2)秦九韶生平、《數書九章》及三斜求積術
二、海龍公式傳入中國後演變的證明版本
　(1)海龍公式的流變--由徐光啓到梅觳成
　(2)李善蘭與《天算或問》
　(3)《八線備旨》中的海龍公式
三、HPM 的觀點
　(1)數學史融入數學教學－以海龍公式探討為例
　(2)海龍公式各樣證明的教學
　(3)以海龍公式為例，三角形面積教學的縱深與統整
　(4)中學老師對於海龍公式教學的反思

看見如此豐富的菜色，想必已經開始期待這趟海龍公式的探索之旅。我們將帶領大家先由西元一世紀的海龍看起，看他如何在充份掌握《幾何原本》的知識，別出心裁地提出海龍公式的幾何證明。不過，對於海龍公式如何產生，至今仍是無解之謎。同樣地，我們也將重訪十三世紀的南宋，看數學家秦九韶提出與海龍公式等價的三斜求積術。相同地，秦九韶也未說明此一公式如何而來。以現在的數學符號來表示三斜求積術，即指三角形面積$=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$，其中$a>b>c$。以形式來看，它是不如海龍公式優美。不過，在作者「理性」的重建下，卻發現這個公式可能有著極為自然的由來。同時，我們也將以海龍公式與三斜求積術為例，說明如何將數學史融入數學教學。

接著，讓我們轉換場景來到清初，看看海龍公式及其證明傳入中國後，究竟產生什麼樣的變化。此時，證明的方法仍然是幾何形式，利用相似三角形求比例關係。與海龍的證法本質上差異不大，但在相似三角形的選擇各有擅場。不過，到了清末，李善蘭所提出的證明，雖說是幾何形式，但想法上已經有著很大的跳躍。到底有著什麼不同，就請各位細細品嚐與思量。而《八線備旨》中的證法，則是讓我們看見三角學內容的載體由幾何轉變成代數的趨勢，已經讓人可以預見今日高中的三角學課程全然代數化的模樣。當然，我們也沒忘記 HPM，一起來看看這些證法的不同特色，帶給我們那些教學上的啓發與反思。同時，我們也以海龍公式的證法當成三角形面積教學的橋樑為例，說明如何在國小、國中、高中等不同階段的現行教材內容中，尋求一個較好的一貫性，以利於銜接、縱深與統整。

讓我們一起整裝待發，展開這一趟海龍公式的探索之旅吧！

Heron 生平、《*Metrica*》及海龍公式的原始證法

台師大數學系碩士班研究生　胡政德

廢話不多說，馬上來說說 Heron。

Heron或Hero of Alexandria（西元 1—75）有些人譯爲海龍或海倫(以下我們以海龍稱之)，也就是一般人所熟悉的三角形面積海龍公式的海龍。他不但是古希臘數學家，也是力學家和機械學家，所處年代大約是在歐幾理得之後 350 年左右，主要活躍於亞歷山大里亞(Alexandria)。在海龍的論述中，他大膽使用某些經驗性的近似公式，並注重數學的實際應用，我們可以從海龍所留下來的著作中可以發現，例如：*Metrica*（測量術）、*Dioptra*（屈光學）等等。更多有趣有關海龍的著作與發明可以參考網站：http://www.mlahanas.de/Greeks/HeronAlexandria.htm。

圖一：Heron of Alexandria

而一般人所熟悉的海龍公式是出現在《*Metrica*》書中。首先簡單的介紹一下《*Metrica*》這部著作。《*Metrica*》共有三卷，包含 133 個幾何名詞的定義（例如：點、線等等），各卷內容大致如下：

卷 一	主要論述平面圖形面積及立體圖形表面積，例如：三角形、四邊形及正 3~12 邊形、圓錐、圓柱、角柱、三角錐、球體，除此之外還提供一個算平方根近似值的方法。
卷 二	主要論述立體圖形的體積，例如：圓錐、圓柱、角柱、三角錐、球體…等等。
卷三	主要論述將圖形分成比例的問題，而這些大部分和歐幾理得的工作是一樣的，另外，在這裡也提供了一個求三方根的方法，而且算出$\sqrt[3]{100}$。

《*Metrica*》被認爲是一本實用的測量手冊方面的代表作，例如：測量各種圖形的面積和體積等等。而且，海龍還講述了如何算出數值的結果，即使其中包含了『無理的』量（例如$\sqrt{720}$）。除了測量與計算以外，海龍有時也會給出證明，但他的目的主要是計算，而不是證明。這本著作在某種意義上，讓吾人想起中國及巴比倫的一些教本，但海龍經常引用像歐幾里得的結果，來核證他所運用的法則或公式。

在《*Metrica*》卷一中，討論完長方形和等腰三角形這一些簡單的情形之後，海龍接著討論給定三邊長的三角形面積求法。他給了兩個方法，第一個方法是以歐幾里得《幾何原本》卷一命題 47（亦即畢氏定理）（在海龍的證明中，表示成[Euclid I-47]，其餘類推）求出高，然後「面積=$\frac{1}{2}$×底×高」，第二個方法是「海龍公式」，編入卷一第 8 題。

上述第一個方法，這裡我們不加以詳述，若讀者有興趣，可以自己試看看給定三邊長，

是否能以一邊爲底，算出一高。我們有興趣的是第二個方法，海龍在這個題目一開頭，給了這樣的一段敘述：「這裡有一個一般的方法可以找出任意給定三邊的三角形面積，而且沒有畫出垂直線。例如：假設三邊長分別為 7、8、9。」下面是整個計算過程：

$$\begin{array}{l} 7+8+9=24 \\ 24/2=12 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12-7=5 \\ 12-8=4 \\ 12-9=3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12\times 5=60 \\ 60\times 4=240 \\ 240\times 3=720 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta=\sqrt{720} \\ \text{求近似值} \end{array}$$

『海龍公式』的現代版，則可以敘述如下：

If A is the area of a triangle with sides a, b and c and s = (a + b + c)/2, then

A^2 = s (s - a)(s - b)(s - c).

上面的例子把公式的算法詳細演算了一次。然而，海龍還給了一個令人感到相當驚奇的證明。接下來，我們將會介紹海龍是如何證明此一公式。在這之前你可以先想一想，你會怎麼去證明它。如果我們在三角形內部畫了一個內切圓，則三角形面積會等於

$$\frac{a\times r}{2}+\frac{b\times r}{2}+\frac{c\times r}{2}=(\frac{a+b+c}{2})\times r=s\times r$$

由此式子，我們似乎可以觀察到：面積可以表示成和 s 的關係式。不過，這個 r 怎麼將它換掉呢？想想看，你是不是和海龍有一樣的想法？

首先，簡單介紹所使用的符號，例如 AB 表示 AB 線段長，$\triangle ABC$ 表示三角形 ABC 的面積，接下來，就是海龍的證明過程了：

假設三角形 ABC，三邊長分別爲 AB、BC、CA (c, b, a)

[Euclid IV.9] 三角形有內切圓，切點 DEF 圓心爲 G

且連接 AG、BG、CG、DG、EG、FG

[Euclid I.41] $BC \cdot EG = 2\triangle BGC$

$CA \cdot FG = 2\triangle AGC$

$AB \cdot DG = 2\triangle AGB$

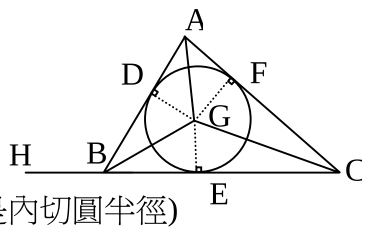
所以 $2\triangle ABC$ 爲三角形周長乘以 EG(是內切圓半徑)

在 BC 線上作 $BH = AD$，則

CBH 線段長是三角形 ABC 周長的一半，

[Euclid III.17] 因爲 $AD=AF$, $DB=BE$, $FC=CE$

因此 $CH \cdot EG = \sqrt{CH^2 \bullet EG^2} = \Delta ABC = \sqrt{\Delta ABC^2}$



到這裡我們可以看的出來，海龍在三角形圖形上，將公式中的 $s(s - a)(s - b)(s - c)$ 四個量都造出來了，其中

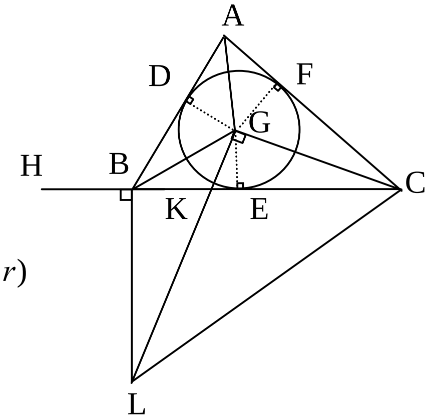
$s = CH$

$(s-a) = CE$

$(s-b) = BH$

$(s-c) = BE$

$\Delta ABC = CH \times GE (= s\times r)$



若將上式兩邊平方，與海龍公式比較比較

$(\Delta ABC)^2=(s\times r)^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ ，

因此，若能說明線段的比例關係，就證明完畢。

不妨參考右圖，試看看你可不可看出一些比例關係。

繼續回來看到海龍公式的證明：

過 B 點作垂直 BC 的直線($\angle CBL=90^\circ$)
過 G 點作垂直 GC 的直線($\angle CGL=90^\circ$)，
兩線相交於 L，連接 LC 交 BC 於 K

[Euclid III.31] 因爲 $\angle CBL$ 和 $\angle CGL$ 爲直角所以 $CGBL$ 四點共圓,且 CL 爲直徑

[Euclid III.22] 圓內接四邊形，對角互補，所以 $\angle CGB+\angle CBL=180^\circ$

但 $\angle CGB+\angle AGD=180^\circ$ 因爲 $\begin{cases}\angle AGD=\angle AGF\\ \angle BGD=\angle BGF\\ \angle CGE=\angle CGF\end{cases}$

可以得到 $\angle AGD=\angle CLB$， $\angle ADG=\angle CBL(=90^\circ)$
則 $\triangle AGD\sim\triangle CLB$(AA 相似)
因此 $BC:BL=AD:DG=BH:GE$（$\because AD=BH, DG=EG$）

[Euclid V.16] 因爲 $BL\parallel GE$ (平行線截等比例線段)
所以 $BC:BH=BL:EG=BK:KE$

[Euclid V.18] $BC+BH:BH=BK+KE:KE$
$CH:BH=BE:KE$
所以 $CH^2:CH\cdot HB=BE\cdot EC:EK\cdot CE=BE\cdot EC:EG^2$
內項乘積等於外項乘積，
所以 $CH^2\cdot EG^2=(CH\cdot HB)(BE\cdot EC)=\Delta ABC^2$
CH, HB, BE, EC 是給定的，因此 ΔABC 面積是給定的。 Q.E.D.

在海龍的證明過程中，他一直使用了《幾何原本》裡面的命題（參考上文中有 [Euclid] 的部分），運用了許多比例的技巧，搭配幾何圖形說明，每個量都有其對應的線段，這正是他的證明的巧妙之處。因此，我們可以知道海龍並沒有未知數的概念，他也不敢使用未知代表已知。但是，我們也許會覺得奇怪爲什麼海龍的第一個方法是使用底乘以高的一半呢？不就假設了高度是未知，然後利用已知三邊長去求出高度？這樣的想法，是以我們現代的數學觀點去解釋的，對海龍而言，第一種方法並不奇怪，因爲他可以做出高並測量之，但有時候三角形的高無法測量時，海龍公式對於他而言，是有很大的意義的。

如果我們將《幾何原本》當成一本教科書，那麼，海龍公式的證明就是最好的解題示範了。也許有人會覺得海龍的證明非常繁雜，尤其相較於使用餘弦定律證明來說。但是，我們不要忘記了海龍當時還沒有發展出符號代數，而海龍卻能夠將這個問題精巧地證明，實在令吾人感到佩服。

三斜求積術淺談

成功高中 蘇意雯老師

西方的海龍公式流傳已久，但是在中國也出現過一個與海龍公式等價的公式，那就是秦九韶的三斜求積術。本篇文章首先將為大家介紹秦九韶的生平事蹟，以及他的重要著作《數書九章》。《數書九章》被列為宋元數學的代表作之一，此算書的第五卷－田域類的第二題「三斜求積」，就是已知三角形三邊之長，求其面積的題目。秦九韶於這裡提出了著名的「三斜求積術」。在以下的篇幅裡，筆者除了針對三斜求積術多所說明外，也運用簡單的平面幾何知識，試圖還原秦九韶所未給出的証明，最後並以中西海龍公式所呈現的風貌作為比較，說明數學的發展與文化脈絡息息相關。

一、秦九韶生平簡介

秦九韶，字道古，是普州安岳（現在四川安岳）人，生於南宋寧宗嘉泰二年（1202），約卒於理宗景定二年（1261）。他與李冶、楊輝、朱世傑並稱為宋元數學四大家。秦九韶自幼生活在家鄉，十八歲時曾「在鄉里為義兵首」，後來隨父移居京都。他是一位聰敏好學之人，處處留心，勤學不倦。當他父親任職工部郎中和秘書少監期間，正是他努力學習和積累知識的階段。工部郎中掌管營建，而秘書省則掌管圖書，其下屬機構設有太史局。因此秦九韶有機會閱讀大量典籍，並拜訪天文曆法和建築等方面的專家，請教天文曆法和土木工程問題，甚至可以深入到工地，瞭解施工情況。他又曾向「隱君子」學習數學，也曾向著名詞人李劉學寫駢驪詩詞。通過這一階段的學習，秦九韶成為了一位學識淵博，多才多藝的青年學者。他認為數學研究「大則可以通神明，順性命；小則可以經事務，類萬物，詎容以淺近窺哉！」在 1244 年至 1247 年間，秦九韶專心致志研究數學，終於完成了數學名著－《數書九章》。

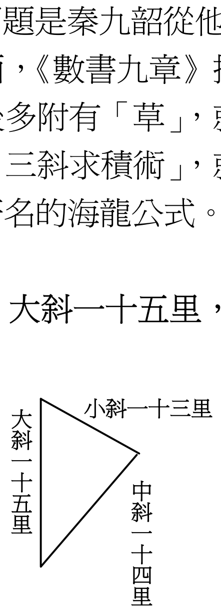
二、《數書九章》及三斜求積術

宋元時期是中國傳統數學發展的高峰時期，《數書九章》是宋元數學的代表作之一，這本書共十八卷八十一題，分為九類，每類兩卷九題。這些問題是秦九韶從他收集和演算的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。在著作體例方面，《數書九章》採用問題集的形式，並將問題分為九類，但在各題術文（解題方法）之後多附有「草」，就是表明演算步驟的算草圖式。在幾何方面，秦九韶的一項傑出成果是「三斜求積術」，就是已知三角形三邊之長求其面積的公式，為前人所無，等價於古希臘著名的海龍公式。三斜求積位於第五卷－田域類的第二題。

問：沙田一段有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知為田幾何？

答曰：田積三百一十五頃。

術曰：以少廣求之。以小斜冪併大斜冪減中斜冪逾半之自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之為實一為從隅開平方得積。



翻譯：

問題：一塊沙田有三邊，小邊長 13 里，中邊長 14 里，大邊長 15 里，古時一里

為 300 步，問田地的面積是多少？

答案：田地的面積是 315 頃。

方法：用少廣術來求。以小邊的平方加上大邊的平方減去中邊的平方，所得之值除以 2 後再平方，之後以小邊平方乘以大邊平方減去前面的數值，所得之值除以 4 再開平方就可以得到田地的面積。

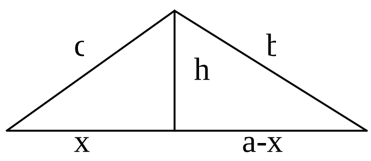
“少廣”是《九章算術》第四章的章名。古人規定一畝之田，寬為 1 步，長為 240 步。少廣之本術，是在田積一畝固定不變之下，考察田寬有小量的增長時，相應田長之值如何變化的問題。上述的三斜求積術，若以 a 表大斜、b 表中斜、c 表小斜，用現代數學符號可表示為 $\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$ ，因此，我們可以得到 $\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}[13^2\times15^2-(\frac{13^2+15^2-14^2}{2})^2]}=84$ 。為什麼答案不是 315 呢?主要是單位換算的問題。因為一里是三百步，因此以 240(積)步為一畝，一百畝才是一頃的概念，所得到的數值還需經過如下的運算才能得到 $\frac{84\times300\times300}{240\times100}=315$ 。

三、三斜求積公式的推導

由於在文本中，秦九韶只給出公式，沒有推導過程，那麼這個公式究竟如何產生呢？雖然歷史並無定論，但在此筆者以簡單的平面幾何知識，試圖加以還原得出。先假設大邊 a 上的高為 h，此高把大邊分成 x 和(a-x)兩段長，然後由兩個直角三角形共用此高，以畢氏定理解出 x，接著代回以 c 為斜邊的直角三角形中，就可求得高的表示式 $h=\sqrt{c^2\text{-}(\frac{c^2+a^2\text{-}b^2}{2a})^2}$ ，再由三角形面積為 $\frac{1}{2}$ 底×高，導得秦九韶的三斜求積公式：

$$\varDelta=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a\sqrt{c^2\text{-}(\frac{c^2+a^2\text{-}b^2}{2a})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$$ 。

其推導過程整理如下圖所示：



由 $c^2\text{-}x^2=b^2\text{-}(a\text{-}x)^2$ 　　得到 $x=\frac{c^2+a^2\text{-}b^2}{2a}$

代入 $h^2=c^2\text{-}x^2$ 　　可得 $h=\sqrt{c^2\text{-}(\frac{c^2+a^2\text{-}b^2}{2a})^2}$ 。

四、海龍公式之中西比較

在中西海龍公式的比較中，由希臘人運用平面幾何知識證出海龍公式，和中國數學家只給出公式，代入求解，可見數學問題的展現離不開社會文化的歷史脈絡，也與民族特性

相關。中國的數學與古希臘人只接受演繹的邏輯推理不同，因爲中算家不拘一格地採用各種形式的推理方法，使中國數學成爲一種從實際問題出發，經過分析提高而概括出一般原理、原則和方法，以求最終解決一大類問題的體系(劉鈍, 1997)。針對一個已知三角形三邊長求其面積的問題，由於解題形式的不同，讓我們看到了在數學知識呈現的背後，正蘊藏了深刻的文化意含。這又豈是純粹背誦海龍公式所能體會出的呢？

附錄：

三斜求積術爲何與海龍公式等價(由陳春廷提供)

試著將三斜求積術平方後做因式分解：

$$\Delta^2=\frac{1}{4}\left(\text{ac}+\frac{\text{a}^2+\text{c}^2-\text{b}^2}{2}\right)\left(\text{ac}-\frac{\text{a}^2+\text{c}^2-\text{b}^2}{2}\right)\Rightarrow\Delta^2=\frac{1}{4}\left(\frac{2\text{ac}+\text{a}^2+\text{c}^2-\text{b}^2}{2}\right)\left(\frac{2\text{ac}-\text{a}^2-\text{c}^2+\text{b}^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\Delta^2=\frac{1}{4}\left(\frac{(\text{a}+\text{c})^2-\text{b}^2}{2}\right)\left(\frac{-(\text{c}-\text{a})^2+\text{b}^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\Delta^2=\frac{1}{4}\left(\frac{(\text{a}+\text{b}+\text{c})(\text{a}+\text{c}-\text{b})}{2}\right)\left(\frac{\left(\text{b}+(\text{c}-\text{a})\right)\left(\text{b}-(\text{c}-\text{a})\right)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\Delta^2=\frac{(\text{a}+\text{b}+\text{c})(\text{a}+\text{c}-\text{b})}{2\cdot2}\cdot\frac{\left(\text{b}+\text{c}-\text{a}\right)\left(\text{a}+\text{b}-\text{c}\right)}{2\cdot2}$$

$$\Rightarrow\Delta=\sqrt{\frac{(\text{a}+\text{b}+\text{c})}{2}\cdot\frac{(\text{a}+\text{c}-\text{b})}{2}\cdot\frac{\left(\text{b}+\text{c}-\text{a}\right)}{2}\cdot\frac{\left(\text{a}+\text{b}-\text{c}\right)}{2}}$$

令 $s=\frac{a+b+c}{2}$ ，即三角形周長之半，則 $\frac{\text{a+b-c}}{2}=\text{s-c}$ ， $\frac{\text{a-b+c}}{2}=\text{s-b}$ ， $\frac{\text{b+c-a}}{2}=\text{s-a}$ 。於是，

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，就是我們所熟悉的海龍公式了。

海龍公式的流變--由徐光啟到梅穀成

台師大數學系碩士班研究生 李建勳

前言

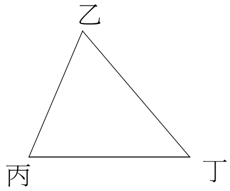
「海龍公式」出現在國內高一教材三角函數單元中，此公式說明已知三角形三邊長的情形下求得面積的方法，乃古希臘人海龍(Heron，約西元 10 年至 75 年)所發現，以下筆者將就海龍公式遠渡重洋來到中國後，在明末清初歷史上如何流變作一番介紹，我們將會看見與現今高中教材裡大相逕庭的論證風貌，「咀嚼」起來又是另一種不同味道，且讓筆者與您一同分享。

一、《測量全義》中的海龍公式

16 世紀末，因傳教士的東來，西方數學第一次傳入中國。而後在 17 世紀初明朝崇禎年間，由於所沿用的元朝曆法行之以久，誤差層出不窮，因此，徐光啓奉詔督修新曆，遂把當時西方傳教士所傳入中國的天文、曆法、數學等書編譯匯整，最後合眾人之力完成《崇禎曆書》一書。當時西方天文學，主要建立在幾何學與三角學等基礎上，於是，這本打著『修曆』名號所彙編的典籍，當然也就網羅了這方面的初等數學知識。《測量全義》便為收錄的其中一部著作，此書共 10 卷，主要包括了西方三角學及幾何學的一些知識，其中卷 4 和卷 5 包含了一些平面幾何的面積公式，在此烙下了海龍公式第一次傳入中國的足跡。此題位於第四卷測面上－第二題「量三邊形」之始。

乙丙丁三邊形，有邊數，無角數，求實。

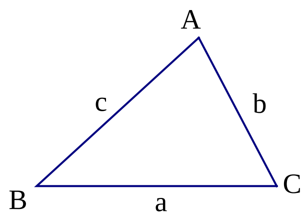
其法：并三邊數，半之為實，以每邊之數為法，各減之，三較連乘得數，以半總數乘之為實，平方開之，得實。



筆者試著翻譯如下：三角形乙丙丁，已知邊長，不知其內角度數，求面積。

方法：取半周長和（半總）為被減數，分別以每邊長為減數減之，所得的三個差（三較）連乘再乘上半總，開平方根，即得所求面積。

《崇禎曆書》作者在這之後安排了兩個例子，即分別給定三邊長為 7、9、12 以及 13、18、21 的兩個三角形，利用上面描述的方法作演算示範。由於它們單純只是作乘法及開方運算得出其值，非本文重點，故筆者在此不呈現其計算結果，而改為詳述緊接而來的公式證明。茲利用一般熟悉的代數符號，將此命題與其文本中的證明改寫如下：



已知：一$\triangle ABC$，三邊長分別為 $\boldsymbol{a,b,c}$，令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

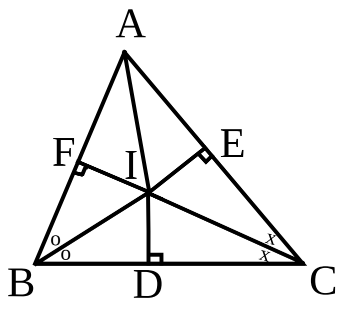
則$\triangle ABC$面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

證明

1.

如圖一所示

I 為$\triangle ABC$的內心



(圖一)

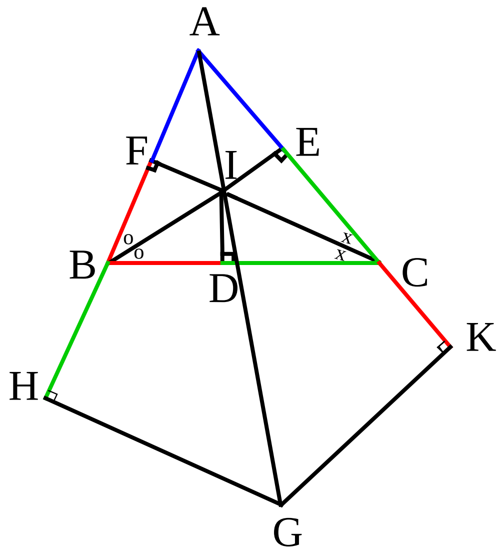
$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$ 為其內切圓半徑長

$\because \triangle BDI \cong \triangle BFI$ ，$\triangle CDI \cong \triangle CEI$ ，$\triangle AEI \cong \triangle AFI$

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{BF}$ ，$\overline{CD}=\overline{CE}$ ，$\overline{AE}=\overline{AF}$

分別延長$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ ，取$\overline{BH}=\overline{CE}$ 、$\overline{CK}=\overline{BF}$

如圖二所示



(圖二)

則$\overline{AK}=\overline{AH}=s$

再延長$\overline{AI}$至 G，使$\overline{GK}\perp\overline{AK}$ ，連接$\overline{HG}$

則$\triangle AHG \cong \triangle AKG \Rightarrow \overline{HG}=\overline{KG}$

($\overline{AK}=\overline{AH}=s$ ，$\overline{AG}=\overline{AG}$ ，$\angle HAG=\angle KAG$)

2.

如圖三所示

取$\overline{BM}=\overline{CD}$ ，連接$\overline{GM}$

再取$\overline{HP}=\overline{BD}$ ，連接$\overline{PG}$

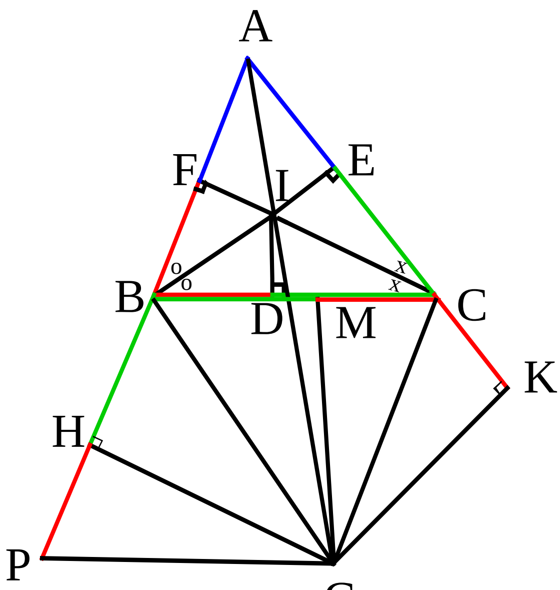
則$\overline{PG}=\overline{CG}$

$$\left(\begin{array}{l}\text{在}\triangle PHG\text{和}\triangle CKG\text{中}\\ \text{因}\overline{HP}=\overline{CK}\ \text{，}\overline{HG}=\overline{KG}\\ \angle PHG=\angle CKG=90^0\\ \text{故}\triangle PHG\cong\triangle CKG\Rightarrow\overline{PG}=\overline{CG}\end{array}\right)$$

又$\triangle CMG \cong \triangle PHG$

(因$\overline{CG}=\overline{PG}$ ，$\overline{CM}=\overline{PH}\Rightarrow\overline{MG}=\overline{HG}$)

故$\angle CMG=90^0$



(圖三)

再者，因$\triangle BHG \cong \triangle BMG$

可得$\angle BGH = \angle BGM$

在四邊形ＭＢＨＧ中

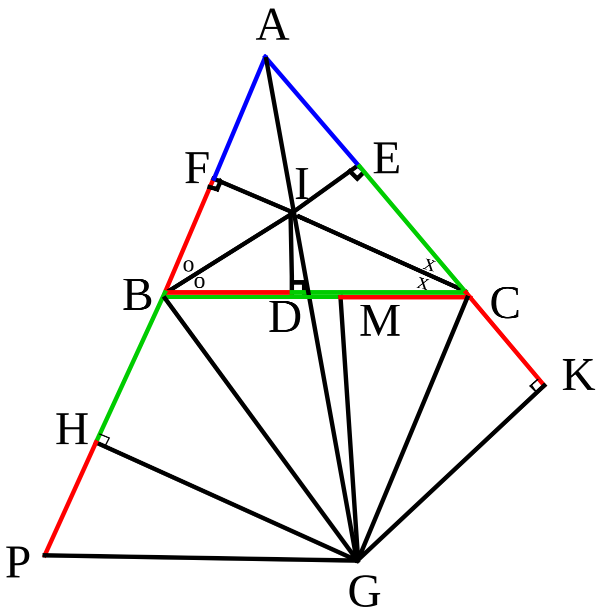
因$\angle BHG = \angle BMG = 90^0$

故$\angle MBH + \angle MGH = 180^0$

又$\angle MBH + \angle DBF = 180^0$

則$\angle MGH = \angle DBF$

$\Rightarrow \angle BGH = \frac{1}{2}\angle MGH = \frac{1}{2}\angle DBF = \angle FBI$



因此兩直角三角形$\triangle BGH$ 、$\triangle IBF$相似

則$\overline{IF} : \overline{FB} = \overline{BH} : \overline{HG}$

即$\underline{\overline{IF} \times \overline{HG} = \overline{FB} \times \overline{BH}}$（１）

又因$\triangle AFI$與$\triangle AHG$相似

故$\overline{IF} : \overline{HG} = \overline{AF} : \overline{AH}$

即$\underline{\overline{IF}^2 : \overline{IF} \times \overline{HG} = \overline{AF} : \overline{AH}}$（２）

由（１）、（２）可知

$\overline{IF}^2 : \overline{FB} \times \overline{BH} = \overline{AF} : \overline{AH}$

即$\overline{AF} \times \overline{FB} \times \overline{BH} = \overline{AH} \times \overline{IF}^2$

即$\overline{AH}^2 \times \overline{IF}^2 = \overline{AH} \times \overline{AF} \times \overline{FB} \times \overline{BH}$

其中$\overline{AH} = s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，$\overline{IF}$爲內切圓半徑ｒ，

$\overline{AF} = s-a$ ，$\overline{FB} = s-b$ ，$\overline{BH} = s-c$

即$s^2 r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

故$\triangle ABC$面積＝sr ＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$得證

上述看似完美的論證過程有個瑕疵，在驗證$\triangle CMG \cong \triangle PHG$時，作者利用$\overline{CG} = \overline{PG}$ 、$\overline{CM} = \overline{PH}$推得$\overline{MG} = \overline{HG}$的推理是不成立的，因此接下來即得$\triangle CMG \cong \triangle PHG$的結論並不充

分，即$\angle CMG = 90^0$的推論在此脈絡下並無法成立，筆者所陳述的瑕疵，當時的明末數學家卻沒人發現，筆者推測原因有二，其一乃因西方數學演繹推理的呈現方式與中國傳統數學大不相同，故在短時間內還難以接受，其二即《崇禎曆書》於崇禎七年（1634）編成，在此之後中西曆訟仍紛擾不休，直到多次驗證發現西曆準確無誤後，才通行天下，這已是崇禎 16 年（1643）之事，隔年明朝隨即覆亡，因此一直留待數十年後，我們才在文本上第一次看到中國數學家修正了這個錯誤，此人即清朝『曆算第一名家』梅文鼎也。

二 、梅文鼎《平三角舉要》中的海龍公式

梅文鼎 **(1633-1721)** 生於明末，長於清初，正是西方數學開始傳入中國的時期，他生長在一個知識份子家庭，從小受到了良好的教育，9 歲時已熟讀五經，因在其 27 歲時拜師學習天文曆法，完成了他的第一部創作，從此開啓了對曆算的興趣。在中西文化衝突之下，他扮演了一個承先啓後的地位，一方面當時國人對西方幾何學嚴謹的演繹體系仍難以消化，另一方面中國傳統的幾何學知識未得到系統化的整理，有鑒於此，他終其一生致力於中西知識的會通工作上，在融會貫通之際，以自己的見解及理念編寫了數十本的天文及數學著作，可以說經由他的「揉合」，才讓其後的清代數學家得以窺見西方數學面貌，催生了在這時期數學上的興盛。

康熙 14 年（1675），梅文鼎到南京參加鄉試時買到《崇禎曆書》，在積極研究後，參考其中《大測》及《測量全義》關於平面三角的部分，對涉及三角形的幾何學性質以及有關三角術的算法作了有系統的整理，完成《平三角舉要》一書，是歷史上第一本三角學專書。在此書中，他補齊了筆者先前所提及《測量全義》中海龍公式的證明漏洞，詳載於其著作《平三角舉要》卷４『或問』第 12 頁（現今我們所看到的版本載於《梅氏叢書輯要》卷 22），在此卷開頭自序中便說：

> **三角大意，首卷略具，而入算仍有疑端，同學好問，事事必求其所以然，故不憚爲之詳複，以暢厥旨。**

故以其想將證明完美化的企圖，將上述證明漏洞補齊，也就勢在必行了！因前人在《測量全義》中，已將海龍公式證法做了很詳細的敘述，因此，梅文鼎便延用《測量全義》論證中大部分的成果，亦採用了同樣的插圖與證明方式。筆者接下來將略去他與《測量全義》相同的證明部分，僅就相異部份加以著墨，亦即將梅文鼎證明$\angle CMG = 90^0$的精采過程轉述重現。他在第 12 頁中的開頭命題如下：

> **問三較連乘之理，曰亦勾股術也。以勾股為比例，而以三率之理轉換之，則用法最精之處也，故三較連乘，即得容員半徑上方乘半總之積。**

筆者試著翻譯如下：

> 若要問三較（先前所提及的三角形半周長分別與三邊長的差）連續相乘的道理，則同樣是應用勾股（直角三角形）的方法，以勾股爲比例，而用三率法（一比例式中，其中三數已知，求唯一未知數的方式）來轉換，則這是用法最精妙之處，故三較連續相乘，即得內切圓半徑長的平方乘上半總（半周長）之積。

證明：

1.

（同《測量全義》中海龍公式證明１，故省略）

2.

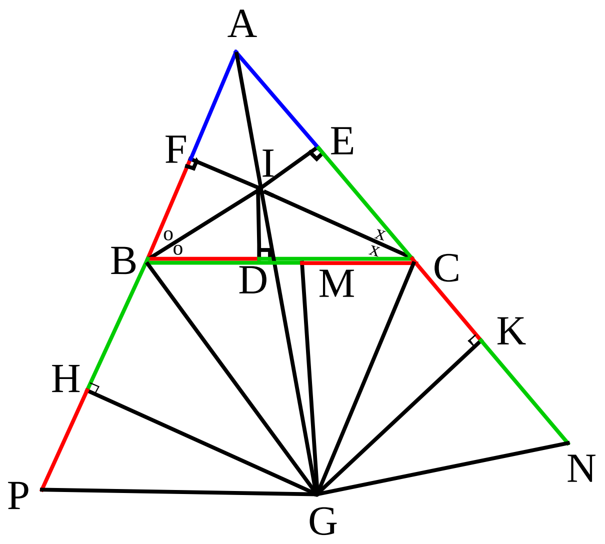
取 $\overline{CM}=\overline{CK}$ ，則 $\overline{BM}=\overline{BH}$

延長 $\overline{AK}$ 至 N，使 $\overline{KN}=\overline{BH}$

再延長 $\overline{AH}$ 至 P，使 $\overline{HP}=\overline{CK}$

則 $\overline{CN}=\overline{BP}=\overline{BC}$

連 $\overline{CG}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{NG}$ 、 $\overline{PG}$ 四線，



則 $\triangle CKG\cong\triangle PHG$ （ $\overline{CK}=\overline{HP}$ ，

$\angle CKG=90^0=\angle PHG$ ， $\overline{KG}=\overline{HG}$ ）

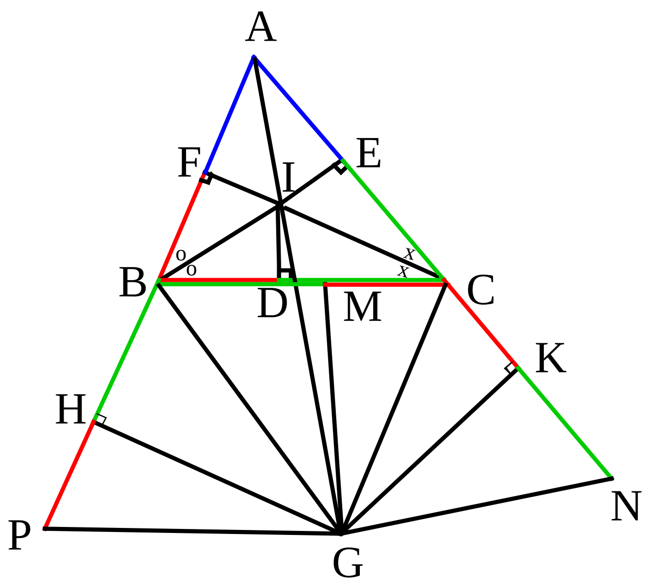
$\Rightarrow\overline{CG}=\overline{PG}$

同理， $\triangle NKG\cong\triangle BHG\Rightarrow\overline{NG}=\overline{BG}$

因此， $\triangle NCG\cong\triangle BPG\cong\triangle BCG$

$\Rightarrow\angle BPG=\angle BCG$

連接 $\overline{MG}$



又 $\overline{HP}=\overline{CK}=\overline{CM}$ ， $\overline{CG}=\overline{PG}$

故 $\triangle PHG\cong\triangle CMG$

又 $\triangle CKG\cong\triangle PHG$

則 $\triangle CMG\cong\triangle CKG$

$\Rightarrow\angle CMG=90^0$

3.

在四邊形 $MCKG$ 與四邊形 $DIEC$ 中

因 $\angle CKG=\angle CMG=90^0=\angle IEC=\angle IDC$

$\Rightarrow\angle MCK+\angle MGK=180^0$ 又 $\angle MCK+\angle DCE=180^0$

$\Rightarrow\angle MGK=\angle DCE$ ； $\angle MCK=\angle DIE$

因四對應角相等，即成四邊形 $MCKG$ 與四邊形 $DIEC$ 相似

$\Rightarrow\ \triangle IEC\sim\triangle CKG$ (各爲原四邊形之半)

$\Rightarrow\overline{IE}:\overline{CE}=\overline{CK}:\overline{GK}$

$\Rightarrow\underline{\overline{CE}\times\overline{CK}=\overline{IE}\times\overline{GK}}$（3）

又$\triangle AKG \sim \triangle AEI$

$\Rightarrow \overline{IE}:\overline{GK}=\overline{AE}:\overline{AK}$

$\Rightarrow \underline{\overline{IE}^2:(\overline{IE}\times\overline{GK})=\overline{AE}:\overline{AK}}$（4）

由（3）、（4）可知

$\Rightarrow \overline{IE}^2:(\overline{CE}\times\overline{CK})=\overline{AE}:\overline{AK}$

即$r^2:(s-b)(s-c)=(s-a):s$

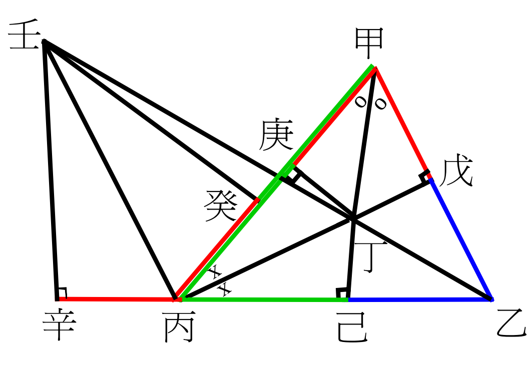
$\Rightarrow sr^2=(s-a)(s-b)(s-c)$此式與海龍公式等價。

梅文鼎雖把《測量全義》中證明$\angle CMG$爲直角的缺陷補上，但卻在**證明 3** 中出現了一點瑕疵，因爲若要證明兩四邊形相似，除了對應角相等外，還需驗證對應邊是否成比例，但很明顯地他在證明過程中並沒有任何交代。筆者對此產生了些疑問，以他精熟《幾何原本》及《崇禎曆書》的程度，爲何不模仿《測量全義》中利用內角相等方式直接處理$\triangle BGH$與$\triangle IBF$相似，卻選擇利用四邊形$MCKG$與四邊形$DIEC$相似後各剖其半迂迴進行？何以其刻意選擇『較不自然』的作法？實令筆者百思不得其解。

三、《數理精蘊》中的海龍公式

梅文鼎的『領頭作用』對清朝數學產生遠大的影響，除此之外，在他的教導之下，梅氏後代亦有很突出的表現，例如其孫梅瑴成，從小就受到梅文鼎的親自教授天文曆法與數學，因此，奠定其良好的數學基礎。前文所提到《梅氏叢書輯要》便是他所彙編，除此之外，梅瑴成所成長的年代適逢康熙盛世，在康熙晚年被召入宮學習數學，後領命編彙天文算法書籍，組織了一群數學家編撰了《數理精蘊》，分上下二編，上編 5 卷，爲全書的理論部分，下編 40 卷，包含算術、代數、幾何、三角和數學器具，是全書的主要部份。《數理精蘊》包含了中國傳統數學，以及明末清初以來從西方傳進來的數學知識，是一本內容豐富數學百科全書，由此可見，該書羅蒐學問之廣，當然亦涵蓋了梅文鼎所做的研究。於是，海龍公式便第三次出現，將其收錄在《數理精蘊》下編卷 17『三角形邊線角度相求』中，似乎也就不足爲奇了。

由於梅文鼎已經將海龍公式證明整理得相當完善，故在《數理精蘊》中，海龍公式證明脈絡及手法，與《平三角舉要》可以說如出一轍，然而，還是顯現了些許差異，其一在於前者將後者所附的圖形作九十度旋轉並加以簡化，如右圖所示 (原文本中的頂點乃以中國天干地支中的符號表示)：



不知道讀者是否有發現圖中所作的輔助線要比《平三角舉要》一圖來得更少？而在先前展示證明的過程中用來驗證$\angle CMG$(本圖中的丙癸壬角) 爲直角三個大三角形已不復見，然則我們該如何證明圖中丙癸壬角爲直角呢？原文中是這樣說明的：

試作壬丙線壬癸線，使丙癸與丙辛等，

癸角辛角皆為直角。

該文是要我們作線段丙癸的長與丙辛等，則便可得癸角辛角皆爲直角。相信大家都知道只有兩組對應邊等長無法保證兩三角形必然全等，故此爲作者的一大疏漏也。不過，除此之外，『數理精蘊版』的海龍公式亦有其可取之處，以下這段話摘錄自證明的原文：

> 乙辛壬形與乙己丁形遂爲同式形，其乙辛與乙己之比即同於壬辛與丁己之比，然乙辛一率乙己二率之數雖有，而壬辛之數卻無，又但知己丙與丙辛相乘之數，即丁己與壬辛相乘之數，故以己丙與丙辛相乘之數爲三率，其所得四率，即丁己自乘之數，是故乙辛與乙己之比，同於丁己與壬辛相乘之面。

這部份的大意是說乙辛壬三角形跟乙己丁三角形相似，所以$\overline{乙辛}:\overline{乙己}=\overline{壬辛}:\overline{丁己}$，雖然$\overline{乙辛}$和$\overline{乙己}$兩數皆知，$\overline{壬辛}$卻無法得知，不過，我們知道$\overline{己丙}\times\overline{丙辛}=\overline{丁己}\times\overline{壬辛}$，所以若將$\overline{己丙}\times\overline{丙辛}$之數置於原比例式中的$\overline{壬辛}$位置，則原式中替換$\overline{丁己}$位置之數即爲

$\overline{丁己}^2$

（即$\overline{乙辛}:\overline{乙己}=\overline{壬辛}:\overline{丁己}=(\overline{丁己}\times\overline{壬辛}):\overline{丁己}^2=(\overline{己丙}\times\overline{丙辛}):\overline{丁己}^2$），

因此，就可以得到$\overline{乙辛}:\overline{乙己}=(\overline{己丙}\times\overline{丙辛}):\overline{丁己}^2$，若以熟悉的代數符號表示，即可對

應到$s:(s-a)=(s-b)(s-c):r^2$（令$\overline{甲丙}=a$、$\overline{甲乙}=b$、$\overline{乙丙}=c$），即

$sr^2=(s-a)(s-b)(s-c)$，就證明完畢了！

這段文意解釋了何以要以$\overline{己丙}\times\overline{丙辛}$代換$\overline{壬辛}$，原因如同文章中所陳述，乃欲以已知換未知，此點不論在《測量全義》亦或《平三角舉要》的證明原文中均隻字未提。比起上述兩者，《數理精蘊》在這部份讓人感覺多了點教育的關懷，更能貼近學習者的角度。

不論是《測量全義》、《平三角舉要》或是《數理精蘊》，其中包含的海龍公式論證形式皆一脈相承。然而，在一再彙編修訂的情形之下，各版本仍有其美中不足的缺陷。雖是如此，倒也各有所長，例如在《數理精蘊》中，直接處理兩個直角三角形的相似關係，進而得到所求比例式一法，就令人激賞；而在《平三角舉要》中，完整呈現出$\angle CMG$爲直角的證明等，在在提醒了我們應藉由「原典」或「第一手典籍」的貼近，向各家大師學習。的確，在深入探討這三個版本的海龍公式之後，我們了解該如何呈現本定理及其證明，以便可以兼顧到各個面向。我們可以以文本爲師，擷取前人的智慧，乃至於前人所犯的錯誤（也能顯露出「缺陷美」的一面），也都是非常適合啓發我們思考的問題。因此，數學原典中的任何地方，可能都有意想不到的礦脈等待挖掘，唯有辛勤開挖才有可能使我們滿載而歸。

李善蘭如何證明海龍公式？

台師大數學系碩士班研究生　陳春廷

一、前言

李善蘭（1811－1882），號秋紉，別號壬叔，浙江省海寧縣人，他是清代著名的數學家，中國數學現代化的先驅。李善蘭自小就展露數學才華，十歲時接觸到《九章算術》，此後就對數學發生了極大興趣。

李善蘭和偉烈亞力（A. Wylie，1855－1887）合譯《幾何原本》後九卷，又合譯棣莫甘 (De Morgan, 1806－1871) 的《代數學》、羅密士 (E. Loomis, 1811－1899) 的《代微積拾級》。他還與艾約瑟 (Joseph Edkins) 合譯了《圓錐曲線》和《重學》。李善蘭本身也有相當傑出的成就，例如：『尖錐術』、『垜積術』等等，其中又以『李善蘭恆等式』最爲著名。

本文的重點，是有關李善蘭針對『海龍公式』(Heron's Formula) 所提供的證明。雖然筆者目前無法確定李善蘭如何得知此一公式（『海龍公式』在明末清初傳入中國），但是，他使用了不同於海龍的證明方式，卻相當值得我們研究。有關此一證明的詳細過程，可以見之於李善蘭的《天算或問》，這是他自己收集有關天文或算學的 Q＆A 之著作。本書收入他自己結集的《則古昔齋算學》－數學與曆算著作的總集，其中包括有《方圓闡幽》一卷、《弧矢啓秘》二卷、《對數探源》二卷、《垜積比類》四卷、《四元解》二卷、《麟德術解》三卷、《橢圓正術解》二卷、《橢圓新術》一卷、《橢圓拾級》三卷、《火器真訣》一卷、《對數尖錐變法解》一卷、《級數回求》一卷及《天算或問》一卷，全集共有二十四卷之多。

二、李善蘭的證明

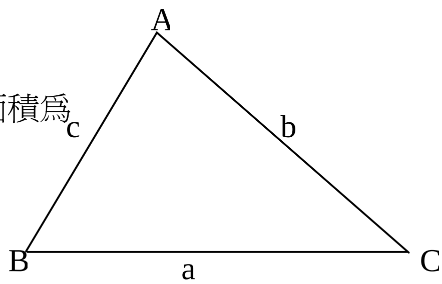
2.1 呈述命題及證明策略

在《天算或問》中，李善蘭總共安排了三個問答，以完成海龍公式之證明（全文詳見『附錄』），我們運用現在的符號說明如下：

已知一個三角形 ABC 的三邊長分別爲 a、b、c，見圖（一）。

以 s 表示三角形周長之半，也就是 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ，則三角形面積爲

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，請證明之。

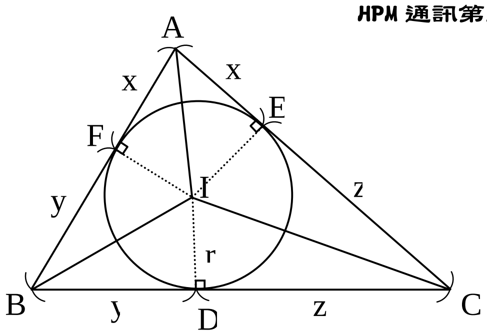


圖（一）

如圖（二），作三角形 ABC 的內切圓 I，作 $\overline{\mathrm{ID}}$ 、 $\overline{\mathrm{IE}}$ 、 $\overline{\mathrm{IF}}$ 爲圓心 I 到三邊的垂線（長度即內切圓半徑 r），我們能夠知道三角形面積爲 $\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$ 。

其次，因爲 $\Delta\mathrm{AIE}\cong\Delta\mathrm{AIF},\Delta\mathrm{BID}\cong\Delta\mathrm{BIF},\Delta\mathrm{CIE}\cong\Delta\mathrm{CID}$ （RHS 全等性質），所以

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AF}},\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BF}},\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CE}}$ ，令 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AF}}=\mathrm{x},\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BF}}=\mathrm{y},\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CE}}=\mathrm{z}$ 。



圖（二）

原文中所提及的名詞之意義如下：

「一率」指的是三角形三邊之和的一半，以 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 表示。

「二率」是說任取一較，可以看成是 x、y、z 三選一，就選 $x=$ s-a 來表示。

「三率」將剩下的 y、z 相乘，即 yz = (s-b)(s-c) 。

「四率」也就是「垂線冪」，意指內切圓半徑的平方 r^2 。

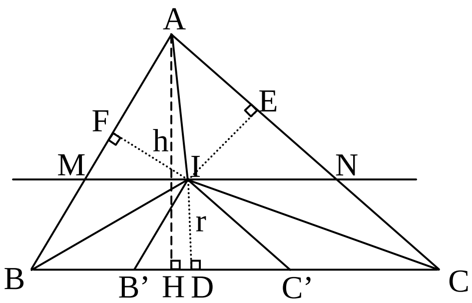
茲將「二、三率相乘，乃半和乘垂線冪」，即 $(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$ （原因待後文詳述），兩邊同乘 s，得

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=s^2r^2$$

將上式開平方，得 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，這就是所謂的『海龍公式』。

2.2　四率之理則

接著，證明 $(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$ ，也就是 $xyz=sr^2$ 。不過，李善蘭證明的策略，主要利用 $\frac{yz}{r^2}=\frac{s}{x}$ 來推得海龍公式。參考圖（三），作三角形的高 $\overline{\text{AH}}$（長度為 h），$\overline{\text{AH}}$ 將原三角形分成左右兩個直角三角形，即△ABH 與△ACH。



圖（三）

通過 I 點，分別作 $\overline{\text{AB}}$、$\overline{\text{AC}}$ 的平行線，並各自交 $\overline{\text{BC}}$ 於 B' 與 C' 兩點。我們不難看出 ΔABH~ΔIB'D ，ΔACH~ΔIC'D（AA 相似性質）。現在，由於相似三角形邊長成比例，所以，句弦和（底邊與斜邊長度之和）也會成比例。於是，

$$(\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BH}}):(\overline{\text{IB'}}+\overline{\text{B'D}})=\text{h:r} \quad \text{以及} \quad (\overline{\text{AC}}+\overline{\text{CH}}):(\overline{\text{IC'}}+\overline{\text{C'D}})=\text{h:r}$$

$$\Rightarrow (\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BH}}):(\overline{\text{IB'}}+\overline{\text{B'D}})=(\overline{\text{AC}}+\overline{\text{CH}}):(\overline{\text{IC'}}+\overline{\text{C'D}})$$

$$\Rightarrow (\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BH}}):(\overline{\text{AC}}+\overline{\text{CH}})=(\overline{\text{IB'}}+\overline{\text{B'D}}):(\overline{\text{IC'}}+\overline{\text{C'D}}) \cdots\cdots(*)$$

再過 I 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，分別交 $\overline{AB}$於 M 點、交$\overline{AC}$於 N 點。

$\because \overline{MI}//\overline{BB'}$ $\therefore \angle FMI = \angle MBB'$　又$\because \overline{MB}//\overline{IB'}$ $\therefore \angle MBB' = \angle IB'D$

故 $\angle FMI = \angle IB'D$ 。

$\because \angle FMI = \angle IB'D$, $\angle IFM = \angle IDB' = 90^0, \overline{IF} = \overline{ID} = r$

$\therefore \Delta IFM \cong \Delta IDB'$ (AAS全等性質) $\Rightarrow \overline{IM} = \overline{IB'}$

觀察四邊形$BMIB'$。由於對邊平行且 $\overline{IM} = \overline{IB'}$，所以，四邊形$BMIB'$爲四邊等長的平行四邊形，進而推得$\overline{IB'} = \overline{BB'}$。同理，可證$\overline{IC'} = \overline{CC'}$。故$\Delta IB'D$的『句弦和』爲 $\overline{IB'} + \overline{B'D} = \overline{BB'} + \overline{B'D} = \overline{BD}$ ，$\Delta IC'D$的『句弦和』爲$\overline{IC'} + \overline{C'D} = \overline{CC'} + \overline{C'D} = \overline{CD}$ 。

由前述 (*)式，得$(\overline{AB} + \overline{BH}):(\overline{AC} + \overline{CH}) = (\overline{IB'} + \overline{B'D}):(\overline{IC'} + \overline{C'D}) = \overline{BD}:\overline{CD} = y:z$

這正是原文「兩句弦和比若底內二較比」的意思。

2.3　母既不同，何以比例合也？

由上所得的 $(\overline{AB} + \overline{BH}):(\overline{AC} + \overline{CH}) = y:z$ 可寫成 $\dfrac{\overline{AB} + \overline{BH}}{y} = \dfrac{\overline{AC} + \overline{CH}}{z}$ ，即 $\dfrac{c + \overline{BH}}{y} = \dfrac{b + \overline{CH}}{z}$ 。再由於相似三角形的邊長成比例，所以

$$\frac{c + \overline{BH}}{y} = \frac{b + \overline{CH}}{z} = \frac{h}{r} 。$$

如將其相乘，得到

$$\frac{c + \overline{BH}}{y} \cdot \frac{b + \overline{CH}}{z} = (\frac{h}{r})^2$$

$$\Rightarrow \frac{yz}{(c + \overline{BH})(b + \overline{CH})} = \frac{r^2}{h^2} \cdots\cdots (**)$$

$$\Rightarrow yz : (c + \overline{BH})(b + \overline{CH}) = r^2 : h^2 ,$$

這就證明了「兩較相乘積與兩句弦和相乘積比，若垂線冪與股冪比」，其中的「股冪」就是高的平方 h^2。在 △ABH 中，

$$h^2 = c^2 - \overline{BH}^2 = (c - \overline{BH})(c + \overline{BH}) \cdots\cdots (1)$$

又在 △ACH 中， $h^2 = b^2 - \overline{CH}^2 = (b - \overline{CH})(b + \overline{CH}) \cdots\cdots (2)$

無論是 (1) 式中的『左句弦較乘以左句弦和』，或者是 (2) 式中的『右句弦較乘以右句弦和』，皆能夠用來表示「股冪」，其中「句弦較」，是指直角三角形的斜邊與底邊相減。

現在，將 (1) 代回原比例式，得

$$\frac{yz}{(c + \overline{BH})(b + \overline{CH})} = \frac{r^2}{(c + \overline{BH})(c - \overline{BH})} \cdots\cdots (3)$$

又將 (2) 代回原比例式，得

$$\frac{yz}{(c+\overline{BH})(b+\overline{CH})}=\frac{r^2}{(b+\overline{CH})(b-\overline{CH})}\cdots\cdots(4)$$

在此，我們考察 (3) (4) 二式，以便回答：

句弦和所帶之母餘一句弦和也，句弦較所帶之母本句弦和也。母既不同，何以比例合也？

以 (3) 爲例，比例式中的分母分別是 $(c+\overline{BH})(b+\overline{CH})$ 與 $(c-\overline{BH})(c+\overline{BH})$，李善蘭的想法，並不是要拿 $(c+\overline{BH})$ 與 $(c-\overline{BH})$ 來比，而是拿 $(b+\overline{CH})$ 與 $(c-\overline{BH})$ 來比。若把 $(b+\overline{CH})$ 視爲『本句弦和』，則 $(c-\overline{BH})$ 就是『餘一句弦較』（意指另外一個直角三角形的句弦較），這解釋了李善蘭「所指比例非本句弦和與本句弦較相爲比，乃本句弦和與餘一句弦較相爲比」。同理，也能夠依據 (4) 式進行解釋。

此外，綜合 (1) (2) 二式，得到 $\dfrac{(b+\overline{CH})}{(c-\overline{BH})}=\dfrac{(c+\overline{BH})}{(b-\overline{CH})}$，這就是文中的『此句弦和與彼句弦較或彼句弦和與此句弦較比例亦不變』。

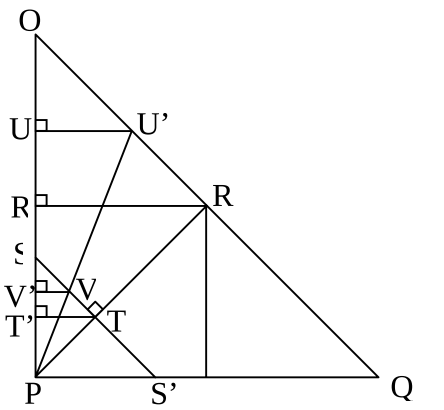
2.4 兩和兩較雖千變，比例不變也

以下，將右三角形 ACH 的『句弦和』、『句弦較』分別簡稱爲「右和」與「右較」。同理，將左三角形 ABH 的『句弦和』、『句弦較』分別簡稱爲「左和」與「左較」，因此，

$$\frac{(b+\overline{CH})}{(c-\overline{BH})}=\frac{(c+\overline{BH})}{(b-\overline{CH})} \quad \text{可看成} \quad \frac{\text{右和}}{\text{左較}}=\frac{\text{左和}}{\text{右較}}\text{。}$$

現在，右和＋左和＝$(b+\overline{CH})+(c+\overline{BH})=\overline{BC}+b+c=a+b+c=2s$，右較＋左較＝$(b-\overline{CH})+(c-\overline{BH})=b+c-\overline{BC}=b+c-a=(a+b+c)-2a=2(s-a)=2x$。

參考圖（四），作 $\overline{OP}=2s=a+b+c$，在 $\overline{OP}$ 上取 S 使得 $\overline{PS}=2x$，作 R 爲 $\overline{OP}$ 中點，過 R 作 $\overline{OP}$ 的垂線 $\overline{RR'}$ 於 R' 點使 $\overline{RR'}=\overline{OR}$，連接 $\overline{OR'}$ 交 $\overline{PQ}$ 於 Q 點。因爲 $\Delta ORR' \sim \Delta OPQ$，以及 $\Delta ORR'$ 本身是等腰直角三角形，所以 ΔOPQ 亦爲直角等腰三角形。



圖（四）

由 $\overline{TT'}\perp\overline{OP}$ 與 $\overline{RR'}\perp\overline{OP}$，我們不難看出 $\Delta ST'T$ 與 $\Delta ORR'$ 相似，也與 ΔOPR 相似，所以，$\Delta ST'T$ 是等腰直角三角形，故 $\overline{ST'}=\overline{T'T}$。另外，$\Delta PT'T$ 與 $\Delta PRR'$ 是相似，又因爲 R 爲

$\overline{OP}$ 中點，所以，$\overline{OR}=\overline{PR}=\overline{RR'}=s$，$\Delta PRR'$ 為等腰直角三角形，於是，$\Delta PT'T$ 也是等腰直角三角形，故 $\overline{PT'}=\overline{T'T}$。綜合以上，可得知 $\overline{PT'}=\overline{T'T}=\overline{ST'}$。

若『右和』與『左和』相等時，則長度各為 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，我們可以假設『右和長』為 $\overline{PR}$，則『左和長』為 $\overline{OR}$，即 $\overline{RR'}$。由上述已知 $\frac{右和}{左較}=\frac{左和}{右較}$，因為右和＝左和，所以，右較＝左較。又因為 $\overline{PS}=2x$ 是兩較之和，而 $\overline{PT'}=\overline{ST'}$，所以，左較為 $\overline{PT'}$、右較為 $\overline{ST'}$，長度皆為 x，故 $\frac{右和}{左較}=\frac{左和}{右較}=\frac{s}{x}$。但是，『右和』不一定等於『左和』，因此，我們必須再討論不相等的情況。

在 $\overline{OP}$ 上任取一點 U，過 U 作垂直 $\overline{OP}$ 的垂線，交斜邊於 U' 點，連接 $\overline{PU'}$ 交 $\overline{SS'}$ 於 V 點（方法與上述相同），同理可得知 $\Delta OUU'$ 與 ΔOPR 相似，所以，$\Delta OUU'$ 是等腰直角三角形，故 $\overline{OU}=\overline{UU'}$。

令 $\overline{PU}$ 為『右和』，則 $\overline{OU}$ 為『左和』（即 $\overline{UU'}$）。過 V 點作 $\overline{OP}$ 之垂線 $\overline{VV'}$ 交 $\overline{OP}$ 於 V' 點。同理，我們可以知道 $\Delta SV'V$ 與 $\Delta OUU'$ 相似，也與 ΔOPR 相似，所以，$\Delta SV'V$ 也是等腰直角三角形，故 $\overline{SV'}=\overline{V'V}$。

另外，我們也不難看出

$$\Delta PU'U \sim \Delta PVV' \Rightarrow \frac{\overline{PU}}{\overline{PV'}}=\frac{\overline{PU'}}{\overline{PV}}=\frac{\overline{UU'}}{\overline{V'V}},$$

$$\Delta PU'O \sim \Delta PVS \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{PS}}=\frac{\overline{PU'}}{\overline{PV}}，故\frac{\overline{PU}}{\overline{PV'}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PS}},$$

現在，觀察 $\frac{\overline{PU}}{\overline{PV'}}=\frac{\overline{PU'}}{\overline{PV}}=\frac{\overline{UU'}}{\overline{V'V}}$，如果只看 $\frac{\overline{PU}}{\overline{PV'}}=\frac{\overline{UU'}}{\overline{V'V}}$ 這一部份或許更清楚一些！ 因為 $\overline{PU}$ 是『右和』、$\overline{UU'}$ 是『左和』，和比例式 $\frac{右和}{左較}=\frac{左和}{右較}$ 的分子部分吻合，於是分母的部分 $\overline{PV'}$ 和 $\overline{V'V}$ 必定會和左較、右較成比例，讓我們檢查看看：

$$\overline{PV'}+\overline{V'V}=\overline{PV'}+\overline{SV'}=\overline{PS}=2x＝左較＋右較，$$

由於比例相同、和皆為 2x，可知 $\overline{V'V}=\overline{SV'}$ 果真是左較、$\overline{PV'}$ 則是右較。又因為 $\frac{\overline{PU}}{\overline{PV'}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PS}}$，

$$所以\frac{右和}{左較}=\frac{左和}{右較}=\frac{\overline{OP}}{\overline{PS}}=\frac{2s}{2x}=\frac{s}{x},$$

這就『翻譯』了原文所謂的「此句弦和與彼句弦較、或彼句弦和與此句弦較比例亦不變，恆若半和與餘一較（非底內二較也）之比也」。

接著，$\frac{s}{x}=\frac{(b+\overline{CH})}{(c-\overline{BH})}=\frac{(c+\overline{BH})(b+\overline{CH})}{(c+\overline{BH})(c-\overline{BH})}=\frac{(c+\overline{BH})(b+\overline{CH})}{h^2}$，再配合上述（**）

$\frac{yz}{(c+\overline{BH})(b+\overline{CH})}=\frac{r^2}{h^2}\Rightarrow\frac{yz}{r^2}=\frac{(c+\overline{BH})(b+\overline{CH})}{h^2}$，得到 $\frac{yz}{r^2}=\frac{s}{x}\Rightarrow xyz=sr^2$。

現在，將符號改回來，亦即 $(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2\Rightarrow s(s-a)(s-b)(s-c)=s^2r^2$，於是，李善蘭終於完成了海龍公式的證明！

三、結語

觀其全文，李善蘭以三個問答來呈現，先給出一個方向說明他所使用的策略，其中不易一眼即可看出的證明，就安排在問題二（敢問此四率何以知其相當也？）與問題三（母既不同，何以比例合也？又兩句弦和何以與底內二較同比例也？）裡回答。至於他的證明過程，主要是以原來的三角形來考量，而所做的輔助線，則大多在三角形之內，並進一步通過「比例」、融合了幾何與代數來處理整個問題。從證明過程之中，我們不難看出李善蘭對於句股形與相關的性質掌握得很好。此外，《天算或問》以對話問答方式來呈述，不像現在教科書的標準作法（先證明需要的引理，再進入定理的證明），而是採用倒述手法，當證明過程之中需要用到其他的觀念時，才加以解釋或證明，這樣子就像是真實的教學情境，數學邏輯性更強。

李善蘭此一證明，只不過是他眾多著作與貢獻的一個例證而已。然而，卻足以讓吾人驚嘆不已了！

附錄：

以下為《天算或問》中此題的全文，標點符號為筆者自行標記，茲引述以供參考。

或問曰：平三角形求積，以三邊半和與各邊相減得三較，三較連乘以乘半和，開平方得積，何也？

答曰：三角容圜，自圜心作三邊之垂線，截三邊為六分、夾角二分，兩兩相等，即三較也。三邊半和為一率，任取一較為二率，餘二較相乘為三率，則垂線冪為四率。又垂線乘半和即三角積，二三率相乘乃半和乘垂線冪也，以一率除之得垂線冪，今不除更乘之，是半和冪乘垂線冪，即半和垂線相乘積自乘，亦即三角積自乘也，故開平方得三角積。

又問曰：四率之理則，既聞命矣！敢問此四率何以知其相當也？

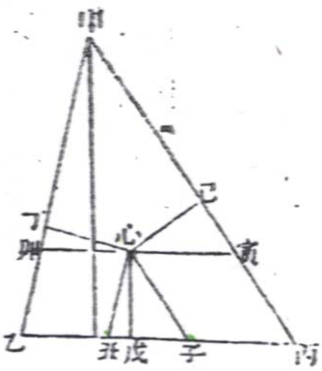
答曰：任取二較必同在一邊，以此邊為底，餘二邊為腰，作一中垂線，分三角形為二句股形，中垂線即股也。兩句弦和比若底內二較比，故兩較相乘積與兩句弦和相乘積比若垂線冪與股冪比。兩句弦和相乘，是一句弦和帶餘一句弦和為母也；股冪為句弦較句弦和相乘積，是句弦較帶句弦和為母也。半和為兩句弦和和之半，餘一較為兩句弦較和之半，是半和與餘一較比，必若兩句弦和相乘積與股冪比，故亦若底內兩較相乘積與垂線冪比也。

又問曰：句弦和所帶之母餘一句弦和也，句弦較所帶之母本句弦和也。母既不同，何以比例合也？又兩句弦和何以與底內二較同比例也？

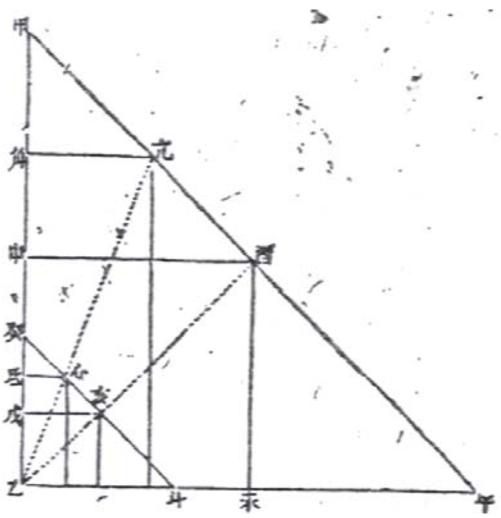
答曰：所指比例非本句弦和與本句弦較相為比，乃本句弦和與餘一句弦較相為比。股為二形所公共，故餘一句弦較與餘一句弦和相乘亦得股冪，是二帶母仍同也。設三角底邊不變，二腰之和亦不變，任變其形，作中垂分為二句股，則此句弦和與彼句弦較或彼句弦

和與此句弦較比例亦不變，恆若半和與餘一較（非底內二較也）之比也。

兩句弦和與底內二較同比例者，此更易明！但于所容圓心，作二線至底與二腰平行，成小三角形與本形同式，且亦分二小句股形以垂線爲股。又自圓心作底之平行線至二腰，成二四等邊形。二小句股形之二弦各爲其邊，則底內二較與兩个小句弦和等，故與兩大句弦和同比例也。



甲乙丙三角形，心爲所容平圓之心，心丁、心戊、心己爲三邊之垂線俱相等，甲丁、甲己、乙丁、乙戊、丙戊、丙己俱兩兩相等，即兩兩各等于三較。心子與甲丙平行，心丑與甲乙平行，心寅、心卯與乙丙平行。心丑子與甲乙丙同式，心戊子與心己寅同式亦同積，心戊丑與心丁卯同式亦同積，故心丙、心乙俱爲四等邊形（此解兩句弦和與底內二較同比例）。



甲乙爲三邊和，即兩句弦和之和，癸乙爲夾頂角二較之和（即前圖甲丁、甲己截邊二分和），即兩句弦較之和。設兩句股相等，則平分甲乙于申，申甲、申乙二句弦和等。乃作申酉垂線與甲申等，作甲酉午斜線，作乙酉對角線，又作癸斗線正交乙酉于亥，作亥戊線，則申乙爲左句弦和，戊亥（即戊癸）爲左句弦較，申酉爲右句弦和（即申甲），戊乙爲右句弦較。兩和兩較俱相等，即定爲比例率。設兩句股不等，左句弦和爲角乙，右句弦和爲角亢（即角甲）。乃作亢乙對角線交癸斗于心，作心氐線（即氐癸）爲左句弦較，氐乙爲右句弦較。左和角乙與右較底乙比，右和角亢與左較心氐比，俱若申乙與戊亥比，兩和兩較雖千變，比例不變也（此解兩句弦和較之比例）。

《八線備旨》中的海龍公式

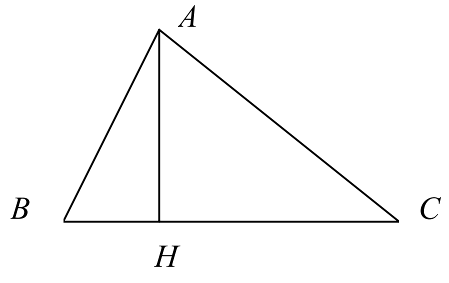
台師大數學系博士生研究生 英家銘

《八線備旨》一書爲中國清末被教會學校廣泛採用的數學教科書之一。鴉片戰爭結束後，外國人得於五個通商口岸傳教、開辦學堂、設立醫院，教會學校即從此時開始設立並迅速發展。教會學校以基督教國家的學校爲辦學模式，所以，其學制仿效西方國家，而教科書的使用也多由傳教士自西方國家的教科書中選譯。數學作爲一個西方學制中的基礎學科，在教會學校中自然受到普遍的重視。在此同時，因應清末教育改革與新式學校數量的增加，適用的教學用書成爲一時急需，教會學校編譯的教科書因而得以被廣泛採用。

在教會學校所編譯的數學教科書中，被採用最廣的有《筆算數學》、《代數備旨》、《形學備旨》、《八線備旨》與《代形合參》五種。從這幾本書的書名，我們就可推敲其大致的內容。《筆算數學》主要內容爲算術及其在日常生活中的應用；《代數備旨》是現代中學代數的內容；《形學備旨》涵蓋平面幾何、立體幾何與球面幾何；《代形合參》即解析幾何。本文所討論的《八線備旨》，則是一部三角學的教材，爲美國人羅密士 (E. Loomis) 原著，美國傳教士潘慎文 (A. P. Parker) 選譯，1893 年出版。

《八線備旨》共分四卷，內容分別爲「平三角形」、「量法」、「測地」與「弧三角形」。卷一「平三角形」的內容與現今高中教材中的三角函數的理論部分頗爲類似；卷二「量法」主要涉及面積與體積的計算；卷三「測地」顧名思義即爲三角函數在測量上的應用；卷四「弧三角形」爲球面三角及其在航海上的應用。我們所關心的海龍公式，被編排在卷二的第二題，它是有關各種三角形的面積公式之證明。其中給出的公式有「法術第一：底乘高之半」，「法術第二：二邊相乘折半，又乘夾角正弦」，以及被編在「法術第三」的海龍公式。下面我們來看看書中是如何證明海龍公式的（以下除圖形與數學式中改用現代符號外，其餘均保留原文）。

法術第三　以三邊半和，遞與三邊相減，所得三較連乘，再乘三邊半和，合數平方開之。



証　如圖，ABC三角形，命其三邊為a, b, c。準形學備旨四卷十二題之理，[1]有

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BH \text{，}$$

即

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a \times BH \text{。}$$

故

$$BH=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\text{，}$$

但

$$AH^2=AB^2-BH^2\text{，}$$

即

$$=c^2-\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}=\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}\text{，}$$

即

$$AH=\frac{\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}{2a}\text{。}$$

但

$$\text{面積}=\frac{BC\times AH}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}$$

此式根號內之數，可劈為

$$2ac+(c^2+a^2-b^2)\text{ 及 }2ac-(c^2+a^2-b^2)$$

二生數，此二生數更可劈為

$$(a+c+b)\times(a+c-b)\text{ 及 }(b+a-c)\times(b-a+c)$$

四生數。設 s 等於 $\frac{a+b+c}{2}$，則可得

$$\text{面積}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{。}$$

上面的證明方式十分容易了解，無須多加闡釋。唯一需要說明的，是證明中所引用到的《形學備旨》四卷十二題，即

$$AC^2=AB^2+BC^2-2BC\times BH\text{。}\qquad(1)$$

這個命題其實就是餘弦定律的幾何版本。其實，同樣的命題，在《幾何原本》第二卷中就已經出現。

《幾何原本》第二卷有一個頗具爭議性的別名，叫做「幾何式的代數」(geometric algebra)。某些數學史家認為在希臘人發現不可公度量，或是無理數之後，他們就有可能解決許多代數中的問題，只要問題不牽涉到超過二次以上表示式的操弄。在此先舉一個例子。我們在後面的證明會引用到《幾何原本》卷二命題 4，它的內容是：[2]

命題 4　如果任意兩分一個線段，則在整個線段上的正方形，等於各個小線段上的正方形的和，加上由兩小線段所構成的矩形的兩倍。

這個命題若用現代代數符號來說明，則可以寫成

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\text{。}$$

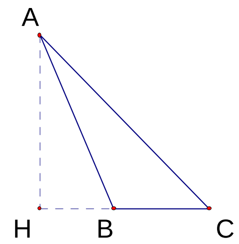
卷二的大部分命題，均可以用這樣的代數等式來表現，這是卷二的特點。而從上述的恆等式中，我們就能約略體會，「幾何式的代數」這樣的別名為什麼會出現。

然而，另外一些數學史家認為所謂的「幾何式的代數」只是後人對《幾何原本》卷二

內容的代數詮釋，亦即將各命題的幾何量以代數符號加以詮釋，而現今的代數符號運算與代數結構，對歐幾里得而言，是全然陌生的。幾何式代數的爭論不在本文的討論範圍之內。在此，我們也打算運用代數符號，來說明《幾何原本》卷二的命題 12 與命題 13。

《原本》卷一的命題 47 為畢氏定理，而卷二命題 12 與 13，則是分別處理三角形有一內角為鈍角及三內角皆為銳角的情況下，三邊所作出的正方形有何關係。下面，我們先來看命題 12：

命題 12　在鈍角三角形中，鈍角所對邊上的正方形比夾鈍角的兩邊上的正方形的和大一個矩形的兩倍。即由一銳角向對邊的延長線做垂線，垂足到鈍角之間一段與另一邊所構成的矩形。



證明：[3]　如圖，設ABC為鈍角三角形，$\angle ABC$ 為鈍角。由點A作AH垂直BC的延長線於H。我們希望證明

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC\cdot BH \text{。}$$

由卷二命題 4 我們知道，

$$CH^2 = BH^2 + BC^2 + 2BH\cdot BC \text{。}$$

將上式等號兩邊同時加上 AH^2，可得

$$AH^2 + CH^2 = AH^2 + BH^2 + BC^2 + 2BH\cdot BC \text{。}$$

然而，根據卷一命題 47（即畢氏定理），我們可將上式改寫為

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BH\cdot BC \text{，}$$

此即我們欲證的結果。

這個命題的結果可改為

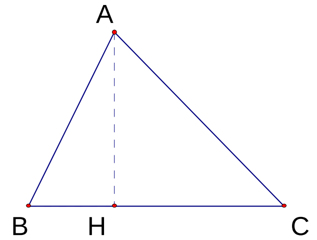
$$b^2 = c^2 + a^2 + 2a\cdot BH \text{。}$$

而從圖形來看，我們可將 BH 視為 $-c\cos(\pi-\angle B)$，則上式變為

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \text{。} \qquad (2)$$

同理，我們看命題 13：

命題 13　在銳角三角形中，銳角所對邊上的正方形比夾銳角兩邊上正方形的和小一個矩形的兩倍。即由另一銳角向對邊作垂直線，垂足到原銳角之間一段與該邊所構成的矩形。



這個命題與命題 12 的證明過程類似。它的結果寫成現代符號即爲

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot BH \text{ 。}$$

而從圖形來看，我們可將 BH 視爲 $c\cos B$，則上式變爲

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \text{ 。} \tag{3}$$

(2)、(3)兩式即爲三角學中的餘弦定律，而我們也可很容易地看出《形學備旨》四卷十二題的 (1) 式與 (3) 式是相同的。這就是爲什麼我們說，上述海龍公式證明中所引用的，是幾何版的餘弦定律。

在高中教材中，海龍公式的證明是使用三角形面積$=\dfrac{1}{2}AB\times AC\times\sin A$，將 $\sin A$ 化爲 $\sqrt{1-\cos^2 A}$ 後，再將餘弦定律代入，之後的因式分解過程與《八線備旨》中證明後半段的因式分解過程是相同的。高中教材的證明是做純粹的代數運算，《八線備旨》雖然引用了一個幾何定理，但基本上除了這個定理之外，後面同樣是代數運算，而且引用的定理，也是幾何版的餘弦定律。這兩個證明與海龍或李善蘭等人的純粹綜合幾何證明方法大異其趣。看過其他證明方式的讀者，可能會感覺到，純粹綜合幾何的證明，對習慣代數運算與解析幾何的我們來說，學習起來有一定的難度。如此我們就可以知道，引入三角學的餘弦定律，究竟替代了多少綜合幾何裏的命題、方法與技巧。在高中課程中，教完正餘弦定律後證明海龍公式，大概是很自然的事。然而，我們是否要在高中數學的教學中補充其他的證明方式，就必須從 HPM 的觀點分析，以及現場教師的反思中找尋答案了。

註解：

1. 我們在後文會討論此命題。
2. 本文所引用三個幾何原本命題的中文翻譯，均參考藍紀正、朱恩寬譯《歐幾里德幾何原本》。
3. 這裡的證明爲筆者將《幾何原本》中的證明過程以現代符號改寫而成。

數學史融入數學教學—以海龍公式探討為例

成功高中　蘇意雯老師

一、前言

在高中數學第二冊中，與三角形有關之篇幅，佔了很大的比重。以龍騰版第二冊爲例，本冊內容共分爲三章，第二章探討三角形的邊角關係，第三章則是三角函數的性質。第二章共分爲四節：2-1 銳角三角函數。2-2 廣義角的三角函數。2-3 正弦定律與餘弦定律。2-4 三角測量。在 2-3 節的教學方法與注意事項中，教師手冊提到「爲了將面積公式作一完整的介紹，可先介紹正餘弦定律，因爲海龍公式的證明必須借助於餘弦定律。」。雖然在教師手冊的參考資料中附有海龍公式的幾何證法，但在課文中，只是簡略以海龍公式的幾何證法不在此處討論帶過，就直接以三角形面積爲 $\frac{1}{2}ab\times\sin C$ ，再以 $\sin C=\sqrt{1-\cos C^2}$ ，而 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 代入，得出海龍的三角形面積公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （a,b,c 爲三角形之三邊長，s 爲周長之半）。這個證法雖然簡潔，可是，卻無可避免地陷入了「以今觀古」，從高觀點看古人公式的迷思，因此，筆者才有編製此工作單的構想。一方面是爲了把課本提及海龍的「幾何證法」，做一個交代，事實上，在上課時，學生也對課本的敘述感到好奇。另一方面，是爲通常成爲學生夢魘的三角單元，增添人文的面向，希望能增加學生的學習興趣。

二、教學指引

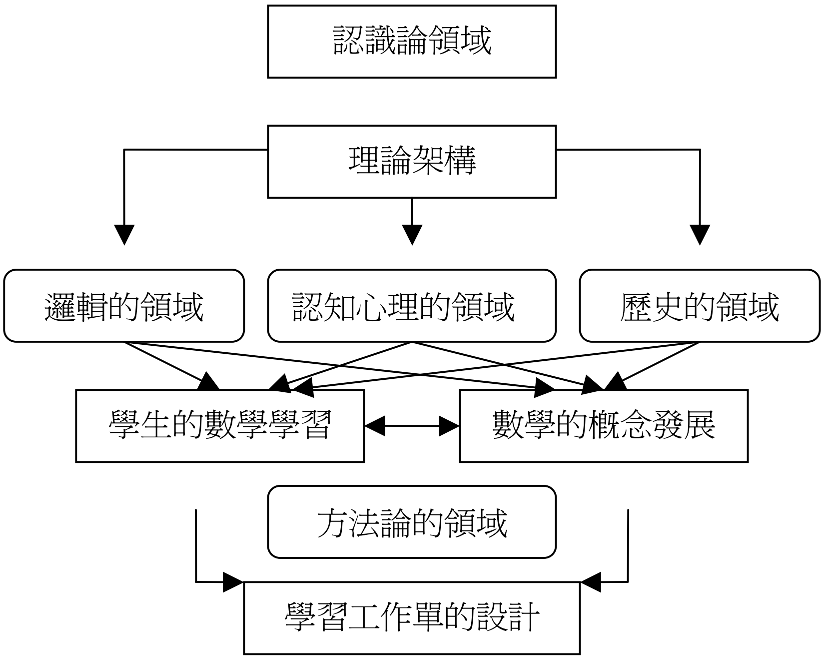
在教科書的編排上，三角形面積公式是安排在正弦定律、餘弦定律之後，三角測量之前。海龍公式的證明在單元中的地位，都是爲了讓學生嫻熟三角形面積公式以及餘弦定律而引入。這在上述的龍騰版中已加以說明，而南一版及康熙版的教科書都是將公式列在習題裡，但是也都提示了同學以上述的證法完成。這種證明方式造成時空錯置的問題已如前所述，雖然對同學的學習看似較爲簡便，但是若能在適當的地方，引進古人原始的想法，相信對於數學思想的發展與學生的學習過程上，能有更貼近的牟合，也能讓學生對數學有更全面的觀照。

至於在認知心理的領域，數學教育中的啓蒙例教學，就是指教學時，當學習抽象數學概念時，用具體例子以引動學習。啓蒙例教學概念可包含有「代表性」，就是能正確表達欲教的數學概念，以及「發展性」，就是能接續在相關概念的學習時所用，還有「易學性」，即能讓學生容易操作，最後是「樂學性」，能引起學生的學習動機等四個屬性（鄭英豪，2000）。對照於本學習工作單的內容，海龍的原始想法僅用到相當基本的平面幾何知識，就可以得出所求結果，只要學生肯花下時間研究，再加上教師提示，應可做爲教學上一可行之啓蒙例。至於三斜求積公式，可讓同學自行導出，貼近文本，增加參與數學活動的機會，也是一不錯之範例。另外，雖然海龍公式與之後秦九韶的三斜求積公式，都能解決已知三邊長，求三角形面積的問題，但乍看之下，兩者所呈現的數學形式卻不相同，我們希望在此產生學生的認知衝突，最後在問題與討論中，讓學生自行由三斜求積公式導出海龍公式，讓他們明白事實上此二公式有等價的意義，達到教學的效果。

根據 HPM 研究綱領 *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (John Fauvel and Jan van Maanen 主編，2000) 第九章『在數學課堂中原典的使用』（The use of original sources in the mathematics classroom）的說明，研讀原典有三項特別的效果，一是觀念的替換：讓數學可

被視為智力的活動，而不僅是知識大全或一堆技巧的組合。二是重新定向：歷史提醒我們數學概念是被發明的，而不是自然而然產生的。三是文化的了解：讓我們明瞭數學的發展是有脈絡的，與科技、社會息息相關。當我們在課堂中提供學生原典時，正應該朝著這三個方向努力才是，教師也可於學生之後的回饋中，探察使用原典的成效。

基於以上的認知，筆者根據 HPM 三面向的理念，以下圖為流程，完成此份學習工作單的設計。關於工作單設計的思維分析，將於第三部份討論。



三、學習工作單之設計

根據前文的理念，本份學習工作單共分成三張，以三角形面積公式為主軸，涵蓋了希臘以及中國的數學，除了希望能讓同學對已知三邊長，求三角形面積的問題多所研究外，也希望學生能對這兩種文化所呈現的數學有初步的認識。

第一張是海龍的生平介紹，讓同學能對海龍所處時代背景，以及海龍的數學研究風格有所了解。之後所安排的問題與討論，是為了了解學生對於數學的看法以及喜歡的數學課上課方式，除了讓教師對所任教的學生多所認識之外，也讓學生有內省之機會。

第二張學習工作單主要是介紹海龍公式的幾何證明，海龍的證法相當迂迴、曲折，不到最後關頭，很難想像會得到如此神奇的結果。他的論證非常基本，僅使用平面幾何上非常簡單的要素，亦即只涵蓋命題的基本元素。但是，海龍顯示了驚人的幾何美感，將這些基本元素組成豐潤而典雅的證明，而得到數學上登峰造極而又難以想像的結果（Dunham，1996）。讓學生欣賞海龍的證明方法後，再練習用餘弦定理證出此公式，如此便可比較兩種證法的異同，對此公式再作一番統整。

此外，基於很多學生對中國數學家的認識僅止於「商高」，第三張學習工作單是以中國為背景，介紹南宋大數學家－秦九韶，我們藉此機會讓學生對秦九韶的生平事蹟有一個概括的了解。接著提及秦九韶的著作，也是宋元數學的代表作之一－《數書九章》，此算書第五卷－田域類的第二題「三斜求積」，就是已知三角形三邊之長，求其面積的題目。在此處秦九韶提出了「三斜求積術」，等價於古希臘著名的海龍公式。以希臘數學對比於

中國算學，我們也希望同學能在兩相對照之下，體會到不同的文化脈絡中，所孕育出不同的數學風貌。在問題與討論中，筆者試著讓學生藉由原典的導讀，解出三斜求積的答案。再來是請學生由三斜求積公式導出海龍公式，使學生明白這兩個公式雖然形式不同，但卻含有等價的意義。有關學習工作單的實際內容，我們安排於最後的附錄中呈現。

四、實施情況分析

本次學習工作單之實施與上學期不同，上學期是直接在課堂中講解，讓學生們邊聽邊回答問題。本學期由於課本內容較多，進度較趕，所以，筆者在課堂中只稍加講述，就發下去讓學生利用假日自行完成，之後再加以收回。從收回的問卷中，筆者根據對海龍公式證明的反應，隨機抽樣了十位同學接受訪談，訪談問題如下：

1.請問你爲什麼喜歡海龍的證明方法？
2.請問你以前聽過那些中國數學家？秦九韶呢？
3.你喜歡老師上課補充這些數學史資料嗎？爲什麼？
4.關於工作單的實施，上下學期有不同的方式，我們上學期用講授的方式，這學期是先提示再發下去自行完成，你覺得那種形式較好？

對於上述的問題，喜歡海龍證明方法的同學所持的理由是：

※比較有邏輯性，而且證得很完整。
※是原始的證法，我們課本是抄捷徑的方法。
※覺得他證得很妙！他走的方法比較特別，課本的證法都會局限於現在學到的東西去證，有些時候更好的證法就沒辦法學得到。
※即使你不知道任何公式你也可以把它證出來，如果你是用課本上教的證法，你要先會課本證明才能繼續推下去啊！
※ 海龍證法因爲有圖解，所以不會太抽象，講的也都蠻清楚的，所以可能會比較容易記得。

不喜歡海龍證法的理由大部分都是因爲複雜，比較難懂。也有人從實用性質考量「既然有一種更簡單的方法可以把它證出來的話，雖然原始證法有比較特殊的意義在，可是我覺得用課本的方法應該就夠用了。」

至於聽過那些中國數學家的問題，只有 3 人回答出「劉徽」、「祖沖之」、「賈憲」、「楊輝」，其餘同學都是一無所知。讓筆者深覺得應在適當時機多引進中國數學家的介紹。

有關第三題「補充數學史資料」，大部分同學都持肯定的態度，他們認爲：
※因為這樣可以知道那些來源啊！就不會說只是背公式，然後不知道那裡來的。
※如此就知道當初那個公式是爲了什麼而做的，我覺得知道原理的話會比較容易記下來，會比較容易去應用它。
※像這樣的話，可以讓海龍公式比較熟，然後也多學到一些東西，感覺學起來比較流暢，有連貫的感覺。
※鼓勵自己想要跟數學家一樣。
※不錯啊！因爲如果說全部看課本的話就不需要老師來上課了，所以說上點課

外的也是不錯。

※至少可以了解一下它的原由之類的，就是不是光看說它的結果，也可以知道它的一些過程。

※更了解他的背景。

※因爲本身就比較喜歡歷史課，然後補充數學史的資料就是可以認識多一些東西。

※多知道一些會比較好吧！同一種方式會有不同的解法，你可以知道一些不同的解法，知道比較多，對自己還蠻有幫助的。

關於工作單的實施情況，由於上下學期有不同的方式，上學期是用講授的，教師邊講邊讓同學作答，本學期只由教師稍加提示學習工作單內容，便發下去讓同學自己研究，過些時日再收回。當問及那一種型式比較好，有三位同學認爲講授式的較好，第一位同學所持的理由是「用講的比較好，然後最好是在剛考完試的時候實施，快考試的時候做會沒有心情做。」。

第二位同學認爲「上課講，因爲多一層思考，上課可以多了解一點，然後回家再加一番思考的話會有比較新的想法吧！」。對於第二位同學的回答，當筆者嘗試問到「所以你喜歡上學期的方法，那你會不會覺得時間太短，還沒有辦法思考，老師就講完了？」此同學認爲「歷史本來就是記憶的，所以還好。」。

第三位同學認爲「老師帶著做較好，因爲並不是每個人都能想的到，有些可能不會，或是說下一節數學課時趕快拿來抄一抄，會有這種事情發生。」。當筆者接著問第三位同學「所以你覺得老師帶著同學做感覺會比較好，那麼我們上這個你會覺得是浪費時間嗎？」時，同學是給予否定的答案。

至於較喜歡這學期實施方式的同學所持的理由是：

※這個學期的啊！因為這樣變成有時間讓自己去思考，上學期變成說，有的沒有思考完老師就講了，就想說沒有想出來的部份就直接聽解答，至於如果大家都不太會的題目希望老師可以講解。

※應該是發下去自己完成比較好，就是有問題的時候再各別問。這樣比較會加深記憶。

※看情況吧，如果喜歡自己想的時候就自己想，可是有時候絞盡腦汁想不出來的話，還是需要提示一下吧！不過，完全是自己想出來的話會很有成就感。我是覺得發下去，我們拿回家寫，我是比較喜歡這一種，可是看個人啦！有些可能會覺得需要老師提示一下，不然怎麼想都想不出來，然後就會覺得很無聊，他們可能會這樣想吧！

※這學期的會比較好，自己先想一遍，老師再講的話印象會更深刻，上學期老師在上面講，底下的同學不一定聽得進去，因爲上課時間有限，回家自己再用點時間想，上課再聽會更清楚。有問題問老師就可以了，然後再交回來，有問題同學有的都會互相討論。

※當然是自行完成，因爲你要自己想才會啊，如果都聽別人講，那你聽別人講自己寫都會寫，如果你只是提示然後想不出來，我覺得還是要靠自己想一下，有錯的話老師再更正答案就好啦，這樣子比較需要自己想，如果是用講授的話學習效果會比較差

一點。

※應該是發下去，自己完成比較好，有時候聽老師講一講，回去之後就沒有再看，如果是自己親自做的話會吸收蠻多的，我是蠻喜歡這樣子。

由以上的整理，得知同學們對於融入數學史於數學教學，抱持肯定的看法。至於如何實施的問題，若教師時間有限，以本學期的方式運作也不失爲一種不錯的選擇。關於問題與討論的部分，由於學生對純數學和應用數學的分際並無法清楚拿捏，因此若有機會再度實施，筆者會把工作單（一）的第一個問題省略。另外從這次的操作心得，筆者還會在工作單（三）中加入「秦九韶只給出三斜求積公式，並沒有說明由何得出此公式。聰明的同學，你能幫他導出這個公式嗎？」以及「海龍和秦九韶用不同的進路，皆能求出已知三邊長的三角形面積，請試著比較這兩種不同的方式。」這兩個問題，讓整個學習工作單的佈局更爲完整。

雖然運用歷史維度於數學教學之有效性不能用評量的方式(Rogers，1993)，因爲對於一個概念的興趣或了解，無法用量化的方式測量。但是由於這學期本校期末考考試試題中，在填充題第五題剛好出現已知三邊長，求三角形面積的題目「ΔABC中$, a=5, b=7, c=8, \Delta ABC$面積$=$ _」，使得筆者不禁興起檢驗同學考試成果的想法。筆者於一年級任教三個班級，並擔任其中一班的導師，由於同學進入本校都是採 S 形分配，以素質而言每班差距皆不大。因此商請同辦公室中任課情形相同的同事，提供其學生考試資料。以本題而論，筆者所任教的三班答對率約爲 85.5%，而另外三班答對率約爲 79.4%，或許這也可做爲運用數學史於數學教學所獲成效的一個小小參照吧！

五、心得與建議

筆者曾在文山社區大學「數學史與數學教學」課程中講授「從 HPM 觀點看九年一貫之連結」，座談結束之時，請與會教師討論數學史在數學教學中所扮演的地位。參與教師大多對數學史的幫助持正面的看法，但是對於在課堂教學中融入數學史則多持保留的態度，如其中一位教師所言「數學史的介紹可以引發學習動機，使教學活動更爲生動活潑，但就目前自己的教學經驗，時間上的限制是一個很大的問題，若是將數學史放在社團、選修課上使用，效果應該會很好吧！」。另一位有十數年教學經驗的教師也同樣反應「數學史可應用於社團活動上，一般教學活動用到機會不多，因爲要花很多時間。」。可見當教師在數學教學中融入歷史維度之時，時間的掌控是相當重要的一件事。

筆者於前文提及，此次學習工作單的實施，是在課堂稍加提示之後，便發下去由學生自行完成，再加以收回，由前面學生的反應上，似乎他們也相當能夠接受此種方式。這樣的實行，雖然在時間上精簡許多，可是往往會佚失掉一些在實際教學互動過程中所可能激起的火花。以同樣的題材而言，筆者也於暑假期間，在某文教基金會所主辦的第一期國中資優數學研習營進階班中講授，當問及「知道三角形的底和高時，可以很快得出三角形的面積，可是如果一塊禁止進入的三角形土地，要如何求出它的面積呢？」，當時台下的同學議論紛紛，有一位同學自告奮勇上臺，先假設做出一邊的高，然後由兩個直角三角形共用此高，以畢氏定理求得高的表示式，再由$\frac{1}{2}$底×高，導得秦九韶的「三斜求積術」。這真是一個驚喜，對同學而言，獨立導出結果，而這結果也解釋了古人的公式由來（因爲秦九韶只給出公式，並沒有推導過程），他獲得了相當大的成就感。對筆者而言，佈置文本，讓學生在解決問題中獲得學習的樂趣，正是 HPM 所追求的目標。接著筆者變更了次序，先介紹中國算學，再回過頭去講解同學所陌生的海龍公式。當講解完海龍的證明後，有些

人認爲「海龍的公式好煩喔！」，也有些同學寫下了他們的感想：「我覺得古代的人真是太了不起了（尤其是 Mr.海龍先生），我只能說我對他們感到由衷的佩服呀！」。另外有同學也體會出「上了今天的課才知道不同的人、事、物，會蘊育出不同味道的數學。」。

從上下學期兩次的工作單實施反應出，若教師時間允許，可把數學史的素材於課堂中講述。若進度較趕，也可只於課堂提示後，讓學生自行研究，再行繳交。其實，神而明之，還在於人。只要教師願意融入數學史於數學教學，有心尋訪文本，設計教學現場，那麼不管運用那一種方式，相信都會有學生因此而獲益。有志之士，盍興乎來！

附錄：

學習工作單一、海龍（Heron）生平介紹

海龍（Heron）希臘的數學家與測量學家，大約生於西元 75 年左右，他在數學方面最能代表其成就的著作是度量論（*Metrica*）一書，該書的原稿本於 1896 年才被發現，全書共分爲三卷。第一卷由矩形和三角形開始，討論了平面圖形和立體表面之面積，並給出了著名的三角形面積公式－海龍公式。第二卷探討立體圖形，其中包括圓錐體、圓柱體、稜柱體等立體體積的求法。第三卷介紹了平面和立體圖形案給定比例之分割，並用到了求立方根的近似公式。

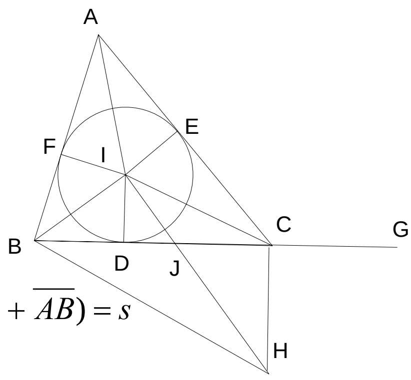
海龍另一部關於測地學的著作（*Dioptra*）也很有名，在這部著作中，海龍對如何在隧道之兩端同時動工而能使之銜接提出說明，也解釋如何測量兩地的距離，包括有一地不能到達以及兩地均能看見但均不能到達的情形；另外他也說明如何從已知點到不可及的一線作垂線，以及如何測知一塊地的面積而不需進入這塊地面上。大家熟知的三角形面積公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（a,b,c 爲三角形之三邊長，s 爲周長之半），是最後提到的觀念（不進入一塊地而能測知其面積的依據）。這個公式出現於他的測地學（*Deodesy*），在 *Dioptra* 和 *Metrica* 中又再度出現，並且附上證明。海龍的著作之特色是摻合了嚴密數學和近似方法以及埃及人的公式，海龍所提出的公式有許多並未附上證明而一部份的公式則只給出近似值而已。除了上述正確的三角形面積公式，他另外提出一個不精確的三角形面積公式。海龍之所以提出許多埃及時代的公式（例如以 $a+\dfrac{r}{2a}$ 做爲 $\sqrt{a^2+r}$ 之近似值），可能原因之一是精確公式所涉及的平方根、立方根等，並不是測量人員所用的上的；事實上，純幾何與測地學或度量學還是有些不同，測地學中求面積和體積的方法並不屬於高等教育的範圍，它們只教給測量員、泥水匠、木匠和技術人員。無疑的，海龍繼承埃及的測量科學並加以發揚光大，他的測地學著作被沿用了好幾百年。

問題與討論：

1. 由上面的敘述，請對於純數學和應用數學的不同提出看法，再以你的觀點說明何者爲重，並解釋你的理由。

2. 就數學課而言，你喜歡老師直接給出公式（例如正弦定理、餘弦定理、海龍公式…）的結果，還是喜歡老師由推導過程得出公式？請說明你的理由。

學習工作單二、海龍公式的證明



如圖，

設圓 I 分別與 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 三邊相切於 D,E,F,則 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$,

因此△ABC 之面積

$\Delta=\frac{1}{2}\overline{ID}\cdot\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{IE}\cdot\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{IF}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}r(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=rs$ 。

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 。因爲切線段等長，

得 $\overline{AE}=\overline{AF},\overline{BF}=\overline{BD},\overline{CD}=\overline{CE}$,因此

$\overline{AE}+\overline{BD}+\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{AF}+\overline{BD}+\overline{BF}+\overline{CD}+\overline{CE})=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=s$

。故

$\overline{AE}=\overline{AF}=s-(\overline{BD}+\overline{CD})=s-a$ ，同理 $\overline{BD}=\overline{BF}=s-b,\overline{CD}=\overline{CE}=s-c$ 。

延長 $\overline{BC}$ 至 G 使 $\overline{CG}=s-a$ ，則 $\overline{BG}=s$ 。過 I 與 C 分別作 $\overline{BI}$ 與 $\overline{BC}$ 之垂線而相交於 H，則因 $\angle BIH=\angle BCH=90^\circ$，故 B、I、C、H 四點共圓。因此，$\angle BHC=180^\circ-\angle BIC$ ，而

$\angle BIC=\angle BID+\angle CID=(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC)+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$ 故

$\angle BHC=180^\circ-\angle BIC=180^\circ-(90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC=\angle AIE$ 。

因此，△AIE～△BHC，故 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{IE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}}$ (因△IDJ～△HCJ)

又 $\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}$ ，得到 $\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}}+1=\frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}}+1=\frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}}$ 。

於是 $\frac{\overline{BG}^2}{\overline{BG}\cdot\overline{CG}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{BD}\cdot\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{ID}^2}$ 。

因此 $\overline{BG}^2\cdot\overline{ID}^2=\overline{BG}\cdot\overline{CG}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}$ ，即 $s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ ，

故得△$=sr=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

問題與討論：

1. 請如課本般用三角形面積和餘弦定理證出海龍公式。

2. 對於課本的證法和海龍的證法，您喜歡哪一個？請說明理由。

學習工作單三、秦九韶與《數書九章》

1. 秦九韶生平簡介

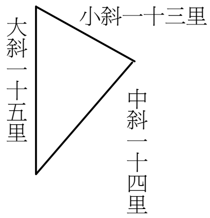
秦九韶，字道古，普州安岳（今四川安岳）人，生於南宋寧宗嘉泰二年（1202），約卒於理宗景定二年（1261），與李冶、楊輝、朱世傑並稱宋元數學四大家。秦九韶自幼生活在家鄉，十八歲時曾「在鄉里爲義兵首」，後隨父移居京都。他是一位聰敏好學之人，處處留心，勤學不倦。其父任職工部郎中和秘書少監期間，正是他努力學習和積累知識的階段。工部郎中掌管營建，而秘書省則掌管圖書，其下屬機構設有太史局。因此他有機會閱讀大量典籍，並拜訪天文曆法和建築等方面的專家，請教天文曆法和土木工程問題，甚至可以深入工地，瞭解施工情況。他又曾向「隱君子」學習數學，也曾向著名詞人李劉學寫駢驪詩詞。通過這一階段的學習，秦九韶成爲一位學識淵博，多才多藝的青年學者。他認爲數學研究「大則可以通神明，順性命；小則可以經事務，類萬物，詎容以淺近窺哉！」1244 年至 1247 年間，秦九韶專心致志研究數學，完成數學名著－《數書九章》。

2.《數書九章》

宋元時期是中國傳統數學發展的高峰時期，《數書九章》是宋元數學的代表作之一，本書共十八卷八十一題，分爲九類，每類兩卷九題。這些問題是秦九韶從他收集和演算的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。在著作體例方面，《數書九章》採用問題集的形式，並將問題分爲九類，但在各題術文（解題方法）之後多附有「草」，就是表明演算步驟的算草圖式。在幾何方面，秦九韶的另一項傑出成果是「三斜求積術」，即已知三角形三邊之長求其面積的公式，爲前人所無，等價於古希臘著名的海龍公式。此題位於第五卷－田域類的第二題。

3.三斜求積

問：沙田一段有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知爲田幾何？



答曰：田積三百一十五頃。

術曰：以少廣求之。以小斜冪併大斜冪減中斜冪適半之自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之爲實一爲從隅開平方得積。

問題與討論：

1. 三斜求積公式中，若以 a 表大斜、b 表中斜、c 表小斜，用現代數學符號可表示爲 $\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$，古時 240(積)步爲一畝，百畝爲頃，請算出您的答案是否相符。

2.請試著由三斜求積公式導出海龍公式。

海龍公式的各樣證法之特色

北一女中 蘇俊鴻老師

一、前言

談到有關三角形面積計算的各樣形式的公式中，除了人人皆知的 $\frac{1}{2}$×底×高，一般人在日常生活中最可能使用的，大概就是海龍公式：三角形面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。只要知道三角形的三個邊長，便能計算出三角形的面積。就現行的課程來說，多數人是在高中階段習得此一公式，而且是在三角函數的學習脈絡中，當成熟練餘弦定律的典範例。可惜的是，甚少有老師會對此一公式進一步介紹與延伸，藉以豐富數學教學活動。舉例來說，以下這些問題都是筆者曾經課堂中和學生討論過：

- **你/妳 覺得海龍公式有什麼重要性？**
- **海龍公式與其他 你/妳 知道的三角形面積公式有何不同？**
- **由這個公式中，我們可以看到什麼性質呢？**
- **你/妳 知道 $s-a$，$s-b$，$s-c$ 的幾何意義嗎？**
- **用餘弦定律來證明海龍公式，你/妳 的看法為何？**
- **有沒有其他證明海龍公式的方法？**

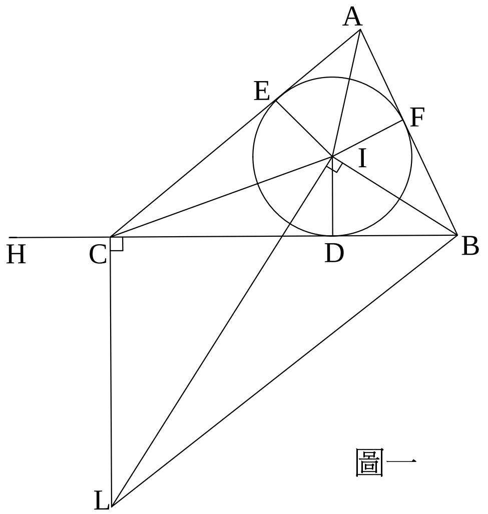
上述的問題大致說明了我們可以延伸海龍公式的幾個方向：一是讓學生和已經習得的公式相比，有利學生判斷運用公式的時機與條件。二是對此公式數學性質的進一步探討，像是對稱性、正性、量綱條件(Dimension)等等，可以有助學生對於海龍公式形式的理解。此外，海龍公式所處理是幾何圖形面積的計算，而餘弦定律的證法則是充份展現了符號代數的威力。其間所隱含之幾何與代數表徵的連結，恰好是我們可以在數學教學上藉以培養學生數學表徵連結能力的極佳範例。這使得海龍公式的各樣證法值得介紹，在這篇文章中，我們將由教學觀點來看海龍公式的各樣證法之特色。

二、由教學觀點來看海龍公式的各樣證法之特色

目前我們從各文本中，搜羅到有關海龍公式的證明方法，共有五種版本。若依文本的年代順序，分別是海龍 (西元一世紀) 在《Metric》中所提出的證明、梅文鼎 (1633~1721) 在《平三角舉要》卷四的證法、李善蘭 (1811~1882) 在《天算或問》中的證法及羅密士 (E. Loomis) 著，潘慎文 (A. P. Parker) 選譯之《八線備旨》卷二 (1893) 的證法，以及現在普遍使用餘弦定律證明的方法。各個證法的詳細說明，請讀者參見本專輯中相關文章。在這一小節中，我們試圖由教學的觀點，說明這些證法中所呈現的特色。下面，就先由海龍的原始證法看起。

(一) 海龍的原始證明

對於西元一世紀的海龍來說，他並沒有今天這樣簡潔有力的符號代數及規則可供其運用，他在《Metric》所提出的證明是純幾何式的。爲了便於說明，我們令 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，



圖一

$\overline{AB}=c$。見圖一，海龍對於下列的幾何性質是熟悉的：$\overline{AE}=\overline{AF}=s-a$，$\overline{BF}=\overline{BD}=s-b$，$\overline{CE}=\overline{CD}=s-c$ 及 $s=(s-a)+(s-b)+(s-c)$，其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。證明一開始，便明白地告訴我們他的出發點：由於 ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}(a+b+c)\times r=s\times r$，其中 r 是內切圓半徑。因此延伸 $\overline{CH}=s-a$，使得 $\overline{BH}=s$。我們只要得出比例式 $\frac{s^2}{s(s-a)}=\frac{(s-b)(s-c)}{r^2}$，接著 $s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$，則海龍公式的正確性就大功告成了。

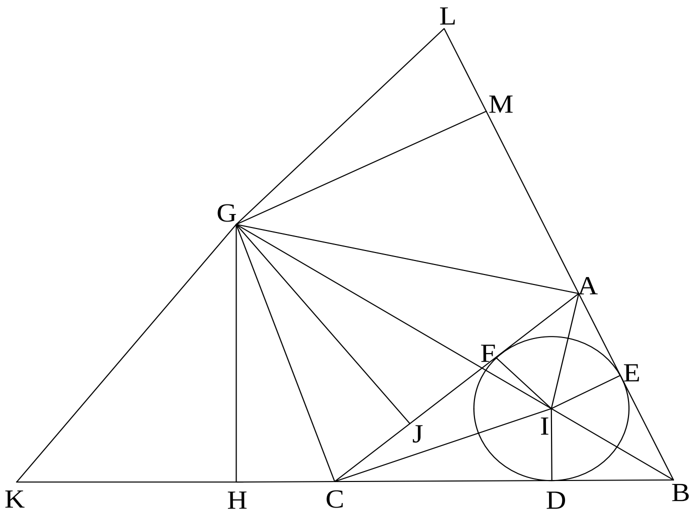
當然，在幾何作法上，想要證明比例式的成立，就得從相似三角形下手。海龍的證法中，最令人驚訝的，是他選取 ΔAEI 與 ΔBCL 這兩個三角形。這是教學上較難安排之處，不易引導學生『合理地』看見此一選取的策略。他運用圓內接四邊形 $BICL$ 對角互補的性質，證明 ΔAEI 與 ΔBCL 相似，建立起 $\frac{\overline{BC}}{\overline{CL}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EI}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{DI}}$ 的關係($\overline{AE}=\overline{CH}$，$\overline{EI}=\overline{DI}$)。接著，海龍運用比例的性質，將涉及的線段長置換成 $\overline{BH}$ 上的相同線段長。過程中所使用的幾何性質，都是國中所學的幾何性質，整個證法可以向學生展現他們國中所習得之幾何性質的綜合運用。此外，由海龍的證法過程可以看出，他不僅熟知歐幾里得《幾何原本》的命題，並且能將之運用到所面對的問題上，爲我們展現了不同於歐氏幾何的應用性面向。

(二) 梅文鼎的證法

梅文鼎的證法，並非他所獨創。據我們對文本的考察，在明末由耶穌會士羅雅谷撰寫，湯若望校訂，徐光啓督修的《測量全義》第四卷中即已出現，但其證法中出現不足之處。梅文鼎則是將此證法加以補正修改，略作改良後，編入他自己的《平三角舉要》，至於證明，則採取幾何式的證法。與海龍的出發點相同，先延伸 $\overline{CH}=s-a$，使得 $\overline{BH}=s$。但不

同於海龍，梅文鼎所求出的比例式為 $\frac{s-b}{s}=\frac{r^2}{(s-a)(s-c)}$，用來建立比例式的相似三角形為 ΔBID 與 ΔBGH (見圖二)。

從教學的觀點來看，這組相似三角形關係的建立，是比較容易帶領學生觀察。由於相似，



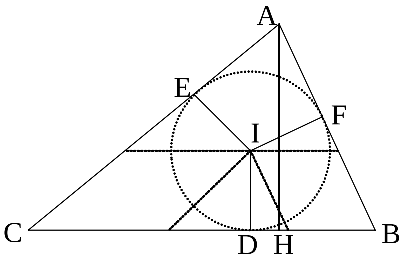
圖二

可得 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{ID}}{\overline{GH}}=\frac{\overline{ID}\times\overline{ID}}{\overline{GH}\times\overline{ID}}$ 。接著，再將 $\overline{GH}\times\overline{ID}$ 換成 $\overline{CH}\times\overline{CD}$ ，整個證明就告完成。為達此目的，再利用 ΔCGH 與 ΔICD 相似，則 $\frac{\overline{GH}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{ID}}\Rightarrow\overline{GH}\times\overline{ID}=\overline{CH}\times\overline{CD}$ 。然而，如何證明 ΔCGH 與 ΔICD 相似呢？這是梅文鼎這個證法最大的挑戰，梅氏透過 ΔGKC 、 ΔGAL 與 ΔGAC 三者全等，推得 $\overline{GJ}\perp\overline{CJ}$ ，進而導出 ΔCGH 與 ΔICD 相似。就我個人的實際教學之後的課堂反應來看，這個部份對學生而言是相當困難的。其實，這也是梅文鼎的圖形比海龍的圖形複雜許多的原因。

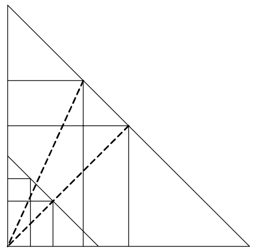
(三) 李善蘭的證法

李善蘭的證法，出現在他的《天算或問》中。他透過三個一問一答的方式，論述等式 $(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$ 為何成立。兩邊再乘上 s ，即得 $s^2r^2=s(s-a)(s-b)\,(s-c)$ 。

首先，李善蘭當然清楚 $\overline{AE}=\overline{AF}=s-a$ ， $\overline{BF}=\overline{BD}=s-b$ ， $\overline{CE}=\overline{CD}=s-c$ ，這是採取幾何方式論證的必備條件。不過，李善蘭他卻出人意表地先做出任一邊的高，論證比例式 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}+\overline{CH}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}+\overline{BH}}=\frac{r}{h}$ 的成立 (如圖三)，其中 $\overline{AH}=h$ 為高。



圖三



圖四

則 $\dfrac{\overline{CD}}{b+\overline{CH}}\times\dfrac{\overline{BD}}{c+\overline{BH}}=\dfrac{r^2}{h^2}$ ，

又 $h^2=c^2-\overline{CH}^2=b^2-\overline{BH}^2\Rightarrow(c-\overline{CH})(c+\overline{CH})=(b-\overline{BH})(b+\overline{BH})$ ，

且 $\dfrac{(c+\overline{CH})}{(b-\overline{BH})}=\dfrac{(b+\overline{BH})}{(c-\overline{CH})}=\dfrac{s}{s-a}$ 。(利用圖四)

故 $\dfrac{\overline{CD}\times\overline{BD}}{r^2}=\dfrac{(b+\overline{CH})\times(c+\overline{BH})}{(b+\overline{CH})\times(b-\overline{BH})}=\dfrac{(c+\overline{BH})}{(b-\overline{BH})}=\dfrac{s}{s-a}\Rightarrow sr^2=(s-a)(s-b)(s-c)$ 。

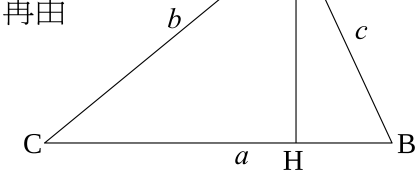
李善蘭的證法讓人印象深刻，一方面，他的證法並不是利用這些相關的邊長，設法尋求比例關係。反倒是將三角形剖分成兩個句股形，利用 $\overline{AC}+\overline{CH}:\overline{AB}+\overline{BH}=\overline{CD}:\overline{BD}$ 所成的比例關係。這種仿彿天外飛來一筆的開頭，在教學上是非常難以引領的。李善蘭爲何會提出這樣的一個證法？我們還需要更進一步研究。

另一方面，李善蘭在比例關係的推導上，不像前述海龍與梅文鼎的證法那麼依賴圖形，想要弄懂後兩者的證法，必須完全掌握證明中所描繪的圖形才行。反觀李氏的證法，當他試圖說明比例式 $\dfrac{(c+\overline{CH})}{(b-\overline{BH})}=\dfrac{(b+\overline{BH})}{(c-\overline{CH})}=\dfrac{s}{s-a}$ 爲何成立時，他所利用的圖形（如圖四），與原本用以論述的圖三不同。換言之，對李善蘭而言，比例式 $\dfrac{(c+\overline{CH})}{(b-\overline{BH})}=\dfrac{(b+\overline{BH})}{(c-\overline{CH})}=\dfrac{s}{s-a}$ 的成立具有一般性，不侷限在圖三所呈現的三角形而已。這樣的想法也呈現在他的論證之中，他先舉相等情況爲例，再說明不等情形也會成立，這樣的情形不可能出現在同一個三角形的邊長上。這也說明李善蘭雖然採用幾何形式論證，但由於他掌握更多三角形邊長比例關係的一般性，使得他對於幾何圖形的使用，不同於海龍與梅文鼎。

(四)《八線備旨》中的證法

中國清末時，《八線備旨》一書 (共四卷) 曾被教會學校廣泛採用，是當時的數學教科書之一。如圖五，這一證法運用了《形學備旨》(這也是當時被廣泛採用的幾何學教科書，內容包括平面幾何、立體幾何和球面幾何) 四卷第十二題命題 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\times\overline{BH}$ ，可推得 $\overline{BH}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$ ，再由

$$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=c^2-\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}$$



圖五

$=\dfrac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}$。因此，三角形面積$=\dfrac{BC\times AH}{2}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}$，經化簡後，即可得海龍公式$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$。

首先，我們來看證明所引用的幾何命題$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\times\overline{BH}$。由圖五可知，若將$\overline{BH}$改寫成$c\cos B$，則上述命題即是 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，因此，此一命題可以看成是餘弦定律的「幾何版」。由命題的引用可以發現，《形學備旨》的教學順序應是早於《八線備旨》。然而，《形學備旨》我們未能獲見，不知其中是如何論證。不過，此一命題正是《幾何原本》卷二的命題十三，透過幾何性質，我們不難推導出此一命題 (請參考本期英家銘的文章)。透過這個餘弦定律的「幾何版」的性質，配合畢氏定理求高$\overline{AH}$，利用最基本的$\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高公式，加上適當的運算化簡，就能完成海龍公式的證明。

然而，若就此認定上述的幾何命題$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\times\overline{BH}$「等同」掌握現在我們所學得的餘弦定律，將會是危險的推論。想將「幾何」形式過渡到「代數」形式 (即$\overline{BH}$ ＝$c\cos B$)，並且能運算操作，仍能有很大的鴻溝有待跨越。在這個證法中，它所扮演的角色，像是讓我們少用一次畢氏定理，就能用a,b,c將$\overline{BH}$表示出來。如圖五，若我們設$\overline{BH}=x$，則$\overline{AH}^2=c^2-x^2=b^2-(a-x)^2\Rightarrow x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$。所以，我們只需使用二次畢氏定理，即可完成證明。如果試圖向國中生介紹海龍公式的證明，這個證法相當適合在國中實施。

(五) 用餘弦定律證明

運用餘弦定律來證明海龍公式，應該是最多人知道的證法：

$$\Delta ABC\text{的面積}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a+c-b}{2}\times\frac{b+c-a}{2}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{，其中}s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

從現行三角函數課程的內容看來，這樣的舉例是相當好的安排，在證明的過程中，涉及好幾項我們在三角函數教學上強調的知識及期望學生具備的技巧，像是能透過平方關係轉換正餘弦，餘弦值與邊長的關係($\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$)、乘法公式的使用，以及符號代數運算時所需的耐心。

然而，在如此簡潔的符號代數運算下，不可諱言地，它需要的計算能力是相當嚴苛。還有，在這個推導過程中，由於無須依賴圖形，因此，海龍公式中的各項元素，像$s-a$，$s-b$，$s-c$就變得毫無意義，純然成爲符號代數演算的一項結果。

三、結論

我們從教學觀點去分析海龍公式各個版本證法的特色，並非是爲了給出一個高低差異的評價，而是爲了豐富自身的教學內容知識 (PCK)。這也是數學史融入數學教學 (HPM) 重要的功能之一。試想若非在數學文本中尋得這些不同版本的證法，或許至今仍只知道海龍純幾何形式的證法，或是多數課本採用代數化的餘弦定律之證法。透過各個版本證法的特色分析，讓教師在教學方法有所比較，也才能截長補短。例如，透過幾何形式與代數形式的證法之不同，可以發現他們各自對於圖形的依賴程度也不相同。在不同形式的觀照下，各項元素 (像$s-a$，$s-b$，$s-c$) 的意義也不盡相同。因此，教學目標會決定你應該採用何種形式教學，才能達到預期的成效。況且，一旦我們掌握了各版本的特點後，就能加以混合使用。例如，我使用餘弦定律來證明海龍公式，但又想介紹$s-a$，$s-b$，$s-c$的幾何意義。基本上這樣的想法並不衝突，我們可以抽離出$s-a$，$s-b$，$s-c$的幾何意義的部份，單獨地設計教學活動。

然而，我們分析海龍公式各個版本證法的特色時，卻也別忘記它們可能存在的侷限性。當我們試圖理解某個版本的證法時，就等同於在與這位數學家進行對話，從而將產生自我的「歷史詮釋」。此時，我們必須注意數學知識「斷代」的面向，我們必須認知到相關數學家所身處的環境，以及他本身所擁有的認知特性(Jahnke,1994；洪萬生，2004)。舉例來說，爲何李善蘭所提出的證法如此特別？由於李善蘭曾撰《測圓海鏡解》，顯見他的確深入研究李冶《測圓海鏡》中的勾股容圓問題。我們可以合理地猜測他的證法，可能受到此一影響。再舉梅文鼎與海龍的證法爲例，他們兩人的證法都是尋找相似三角形以求比例關係，只不過兩人所尋求的三角形不同而已。但是，你若知道海龍承接《幾何原本》的傳統，就能理解他的證明何以處處參照《幾何原本》的命題。相對之下，梅文鼎的證法中的三角形相似關係之建立就自然多了。當然，他是沿用《測量全義》的想法，此外，在他的證法過程中，他也不理會是否必須參照到《幾何原本》的某一個命題。

引發筆者對於海龍公式及其證明的興趣，其實是來自高中時代對於海龍公式證明的困惑。尤其，當我得知海龍是約爲西元一世紀左右的數學家時，很難相信他會是利用餘弦定律來證明海龍公式。直到有機會在《天才之旅》書中看到海龍公式的證明時，那種豁然開朗的暢快，至今印象深刻。因此，只要我的課程進行到此處，總會將海龍的證法與學生分享。

總之，這次海龍公式的探求之旅，豐富了我對海龍公式證明方法的掌握。

三角形面積教學的縱深與統整

西松高中 蘇惠玉老師

一、前言

國中小的九年一貫教學實施之後，引起大家注意一項長久以來被忽略的議題，就是小學、國中與高中課程內容與教法的銜接問題。由於對應於新的課程綱要，國中小學有新的教學內容，而高中課程卻遲遲沒有改變，於是，國、高中課程與教學的銜接，終於成爲大家矚目的焦點。可喜的是，除了課程綱要這種表面的銜接之外，從國小、到國中、高中，數學概念教材與教學的縱深與統整，在這個時候也一併被提出討論。爲了呼應這一教改潮流，本篇即以三角形面積教學爲例，試著在國小、國中、高中等不同階段的現行的教材內容中，尋求一個較好的一貫性的教學內容。

二、面積公式的相關內容

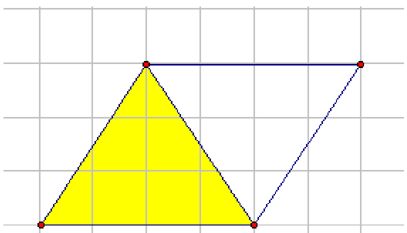
我們在推導各種平面圖形的面積公式時，通常選擇一個起始點，當成已知條件，從此出發推導出各種圖形的面積公式。在《九章算術》第一章的「方田」中，註解者劉徽即以長方形的面積「廣縱步數相乘得積步」出發，再由此利用「以盈補虛」或『出入相補」的方式，以推證三角形、梯形等面積公式。其實，這種策略也出現在目前國小教材中，譬如在國小階段的幾何學能力指標中，先是在四年級的 4-s-09：

能理解長方形的面積、周長與長方體的體積公式；

再者是五年級的 5-s-05：

能運用切割、重組理解三角形面積、平行四邊形面積與梯形的面積公式。

以長方形的面積爲起點，大概是因爲長方形的面積很容易由「數格子」的方式，而得到「面積＝長×寬」的公式。

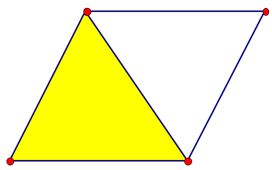


圖形的切割、重組的概念，貫穿整個國小的面積教學。以『南一版』的第 10 冊爲例，利用方格紙的可以數格子便利性，讓學生理解平行四邊形經分割重組後，爲一長方形，所以，面積爲「底×高」；同樣地，利用方格子讓學生理解二個三角形可以組成一個平行四邊形，所以，面積爲「底×高÷2」。國小的幾何教學，著重於讓學生直觀地從圖形去了解幾何概念，小學生看到了就會相信。而到國中階段的幾何教學，要達到讓學生即使沒看到東西畫在方格紙上，也能理解與相信

這個幾何概念。

國中的平行四邊形面積，通常安排在二年級的課程中（一般都是在二下第四冊），九年一貫能力指標 8-s-25 爲：

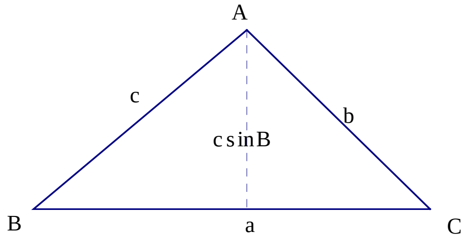
能理解平行四邊形的面積公式。



此時不能再藉助於方格紙了，因爲邊長不再侷限是正整數。一般的教科書內容架構，在此都是先「定義」平行四邊形，再得出平行四邊形的各個性質，例如對邊相等，一條對角線可將平行四邊形分割成兩個全等的三角形等等。利用「對邊相等」的性質，就可不必藉助於方格

紙，推得平行四邊形可分割重組成一長方形，所以，可以得出面積公式；同樣地，也可將兩個三角形重組成一個平行四邊形，進一步得出面積爲「$\frac{1}{2}$×底×高」。到此，我們可以發現，國小與國中在「三角形的面積＝$\frac{1}{2}$×底×高」這個概念上，配合國小與國中學生知識與能力的發展，有其一貫性及知識的層次發展。

國中時的三角形面積公式就只有這一個，一定要求出高才能算三角形面積。到了高中的課程，在高一下學期時，藉助於三角函數的表示，三角形面積有了其他的公式形式。



目前各版本的教科書，大都安排在第二冊第二章，學生已經學過銳角及廣義角的三角函數以及正弦、餘弦定律之後。先以正弦表示高，然後利用「$\frac{1}{2}$×底×高」，得出三角形面積＝$\frac{1}{2}$bc sinA＝$\frac{1}{2}$ac sinB＝$\frac{1}{2}$ab sinC；接著，再得出三角形面積的出海龍公式：「三角形面積＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$」其中 s 爲半周長。在此，各版本的證明策略都差不多，以『龍騰版』爲例，令△表示三角形 ABC 的面積，

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A\\ &= \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)\\ &= \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos A)(1+\cos A)\end{aligned}$$

由餘弦定律知$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，代入得

$$1+\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

$1-\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc}=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$，令 s=$\frac{1}{2}(a+b+c)$，則

b+c-a=2(s-a)，c+a-b=2(s-b)，a+b-c=2(s-c)

因而$\Delta^2=\dfrac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

故△＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

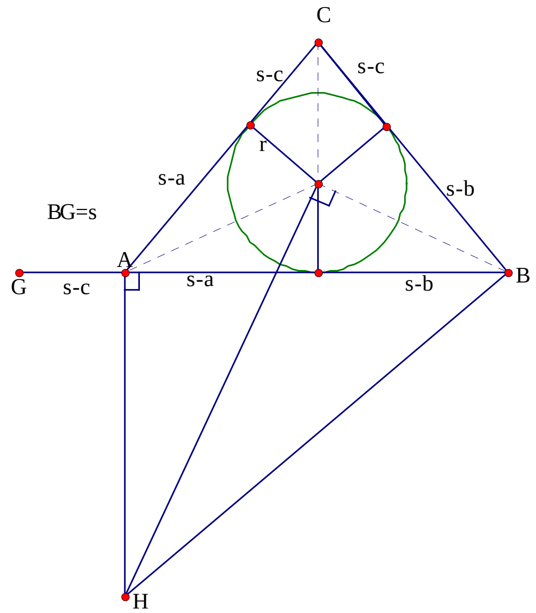
三、中小學課程面積公式的連貫問題

在各版本的高中教科書中，都沒有在此提及跟國中相關教材的關連，學生感覺就是學了一個新的東西，高中學到的三角形好像跟國中完全切割開來，這裡其實就是一個銜接的問題。為什麼要有新的三角形面積公式？這些公式跟國中學過的三角形性質有些什麼關連呢？這些問題海龍公式都可以幫我們回答。

上述提及在國中課本的第四冊中，利用平行四邊形證明三角形面積公式，但是要有高才能求出面積。而在第四冊中，一般教科書同時會安排有一章是三角形的全等性質，如 SSS、SAS、ASA 三個全等性質。以 SSS 全等性質為例，兩個三角形如果三邊對應相等，即這兩個三角形全等，換句話說，只要給定一個三角形的三邊長，這個三角形就唯一決定，也就是說，形狀、三內角及面積等都可以得出。目前的教科書中都有強調這一點，給定「三邊長」、「兩邊及一夾角」或是「兩角及一夾邊」的條件時，三角形就可唯一決定，當然面積即可求出，然而面積如何求卻都沒有提及。誠然有關角度的部分，需要藉助三角函數才能處理；但是如果給一個三角形的三邊長，我們就可以利用海龍公式來求出面積，而海龍公式的證明，實際上是可以不用到三角函數的。

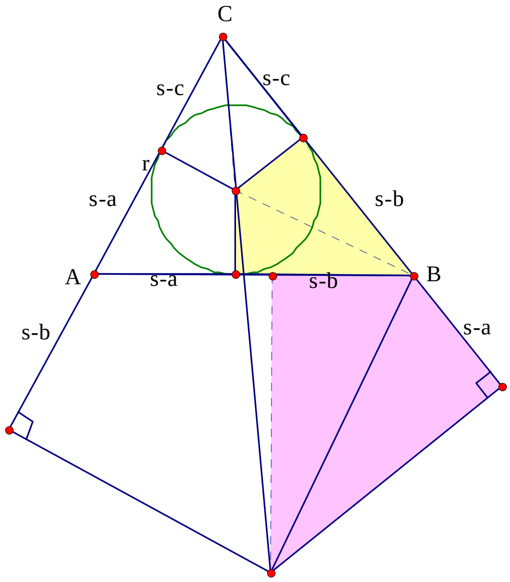
四、海龍公式話說從頭

回到歷史源頭來看，海龍（Heron，約西元 75 年）的證明中並沒有用到三角函數，他先利用三角形的內切圓，得到△＝rs，r 為內切圓半徑，s 為半周長。然後在三角形中，將 s、s-a、s-b、s-c 各段長度在圖形中標示出來，再來就是利用三角形的相似，得出比例，最後整理得到 $r^2s^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ 。



我們也可以在明清時許多有關三角測量的文獻中，找到海龍公式的證明。例如在《西洋新法曆書》之《測量全義》書中，羅雅谷與徐光啓曾嘗試「證明」（即他書中的「解曰」）

海龍公式，但是有一點小瑕疵沒有交代清楚；而梅文鼎在《平三角舉要》中的證明方法則與徐光啓相同，不過，他彌補了徐光啓證明中的瑕疵部分。他的證明策略也是從內切圓，△＝rs 著手，然後，也是在圖形中將 s、s-a、s-b、s-c 各段長度指出或造出，最後，利用相似成比例，以及比例式的技巧，可得到 $r^2s=(s-a)(s-b)(s-c)$。



在這兩個證明過程中，基本策略都是一樣的：先利用內切圓得出三角形面積，再利用比例得出 rs 與 s、s-a、s-b、s-c 各段的關係。這兩個證明只有一點教學上的不便，就是看不出三角形的『高』所扮演的角色，讓老師無法從「$\frac{1}{2}$×底×高」銜接到海龍公式。這個問題，李善蘭的證明提供了一種解答方式。

李善蘭的證明，同樣是以畫內切圓開始，但是，他主要是要找出四個成比率的數：

一率：半周長 s

二率：任一較，如 s-a

三率：剩下兩較的乘積，(s-b)(s-c)

四率：垂線冪，即r^2

即可得到 $r^2s=(s-a)(s-b)(s-c)$。他在證明過程中，同樣是利用相似形，只是，他使用了高 h 與內切圓半徑 r 之比 $\frac{h}{r}$ 當橋樑，去轉化各比例式。換句話說，當給定三邊長要求面積時，本來要求三角形的高，但是，高求不出來，只好將『高』作一個轉換，而得出不必用到『高』的海龍公式形式。

五、歷史啟發：HPM 之為用大矣！

在海龍、梅文鼎與李善蘭的證明形式中，我們能夠很清楚地瞭解「△＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$」公式中各元素的幾何意義。在證明過程中，也只用到三角形內切圓、三角形相似，比例式以及四點共圓的基本性質。所以，如在國中階段安排海龍公式的證明，學生應該可以理解與接受！譬如在國二階段，三角形的面積＝$\frac{1}{2}$×底×高是與國小做『銜接』，如此，將國小視覺與直觀上的幾何，進一步轉換成推理的形式；而海龍公式則可以利用相似形及比例的工具，將三角形的面積與全等性質作一個『統整』。目前各版本教科書在第四、五冊的架構大概如下（正綱版本）：

第四冊

三角形的全等性質 → 平行四邊形

（三角形面積＝$\frac{1}{2}$×底×高）

衔接國小與國中的三角形面積公式

第五冊

相似形 → 圓 → 幾何推理證明

（海龍公式的證明）

教師可以在此安排海龍公式的證明，藉以練習相似形、比例，以及統整三角形的全等性質。

請注意：海龍公式是我們所增列。

尤有進者，海龍公式可以充當國中與高中課程在三角學部分的銜接策略之一。目前高中教科書針對這個部分的教材安排，各版本都相同，架構如下：

銳角三角函數 → 廣義角三角函數 → 正、餘弦定律 → 三角形的面積

其中三角形的面積為

$$\triangle = rs = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ 。$$

在此，教科書中都只是利用正、餘弦定律的關係，將邊、角作轉換而得出各種公式形式，但並沒有提及國中的面積公式與三角形的全等性質。既然三角形在給定「三邊長」、「兩邊夾一角」或是「兩角夾一邊」，就可唯一決定（大小與形狀），面積當然也可求得。例如，給三邊長時就利用海龍公式；給兩邊夾一角條件時，就利用$\triangle = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ 的公式；給兩角夾一邊時，可利用正弦定律先求另一邊後即可求得。這樣將國高中課程銜接與轉換的工具，就是海龍公式。我想教師可以利用海龍或梅文鼎的證明形式，與課本提供的三角函數代數操弄作一比較，這除了讓學生進一步瞭解海龍公式的幾何意義之外，更可以讓學生瞭解與欣賞不同工具帶來的便捷，從而能將三角形的全等性質作個全面性的統整。在此，我推薦一個銜接與統整的教材安排順序：

由 $\frac{1}{2}$×底×高導出，銜接國、高中

正、餘弦定律 → $\triangle = \frac{1}{2}$ **bc sinA** $= \frac{1}{2}$ **ac sinB** $= \frac{1}{2}$ **ab sinC** → $\triangle = \frac{abc}{4R}$ → $\triangle =$ **rs**

→ 海龍公式 → 其他全等性質面積的求法

此時可以複習三角形全等的性質，讓學生思考對於 SSS、SAS、AAS 全等性質，如何求面積

將三角形全等性質利用正、餘弦定律強調的邊角關係作統整

先選擇海龍或是梅文鼎的幾何證明形式，讓學生先瞭解海龍公式的幾何意義，順便與國中作銜接

另外，在海龍公式證明中，有 s-a, s-b, s-c 的幾何意義後，對有些問題的解題是有所幫助的。例如 94 學年度第二學期北區第二次模擬考數學甲中的這一題：

△ABC 中，$\overline{AB}=4,\ \overline{BC}=5,\ \overline{CA}=6$，其內切圓分別與 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 切於 D、E、F 三點，若△AEF 與△BDF 之面積比分別為 x 與 y，則 $\frac{x}{y}=$？

高中課程涉及的三角形面積公式，除了上述幾個之外，在高二時，由於向量的引進，我們更可將求三角形面積的條件，由邊與角轉變成更基本的三個點。已知三個點的位置，就可以求出三角形的面積了：

$$\text{三角形 ABC 面積} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

到此爲止，有關計算三角形面積的工具、方法都已介紹完畢，教師可以再將國中、高一到高二有關三角形面積的部分作一統整，讓學生瞭解所謂數學知識的成長就是這麼一回事，其中知識工具、技巧的精進，可以讓我們解決不同階段的各種問題。

六、結語

九年一貫與高中課程的銜接、縱深與統整，其實都歸結到一個基本問題，那就是：九年一貫（正式綱要）的教學目標都是階段性的。以幾何爲例，它的學習分成四個階段，每個階段又分年分細目，所以，每一年只要完成階段「任務」就可以了，如此一來，數學知識內容就變成一段一段的形式。同時，能力指標並不要求教科書編者或教師回過頭，去統整不同階段的相同概念。所以，通常教科書編者只要按照能力指標的要求，去編寫單元內容即可。要如何銜接前一階段，或是如何統整不同階段的概念，那就只能依靠教師的職業道德與專業素養了。不過，現階段又有多少數學教師能做到呢？

在本文中，我們將海龍公式的證法，當成三角形面積教學銜接、縱深與統整的一個橋樑，拋磚引玉，希望有更多數學教師能如同「種樹」一般，將學生的數學知識從國小、國中到高中深深地、連貫地紮根。

海龍公式教學反思

蘭陽女中 陳敏晧老師

初見海龍公式的原證明時，一方面警覺到自己所知甚少；另一方面，似有恍然大悟的感覺，因為海龍證明 $a\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 的公式時，其想法來自於幾何概念與圖形是很理所當然的，利用內切圓與三角形之間的關係，更接近公式本身所傳達的意念。然有趣且諷刺的是，我相信絕大部分的高中數學老師都沒有看過此種證明，更遑論他（她）們的學生。這問題背後的根源，來自於以前的部編本乃至於現行各版本，幾乎都沒有談論到海龍公式的原有證明。此外，這個「海龍公式」典範例子，還引發一個值得大家關心的數學教學反思，那就是「何時適切引入數學史？」近年來，在台灣師大數學系洪萬生教授倡導下，其手下的 HPM 種子宛如雨後春筍般不斷冒出，這是一個可喜可賀的現象。但是，不可諱言的，仍有許多教師棄「之」如敝屣，所以，如何適當且努力宣導，就成為身為種子的我們之首要任務了。海龍公式原有證明的例子，應當值得各位種子教師們當成所謂數學史推廣教育的好題材。

至於梅文鼎 (1633-1721) 與李善蘭 (1811-1882) 兩位數學大師的證明方式,都與海龍公式的原證明類似，不同之處，只有圖形間的差異與切入方式。至於目前現行常用的證明方式，則是先利用正弦的面積公式，由於正弦公式無法轉換成邊長，因此，只好再利用正弦與餘弦間的互換，然後採用餘弦定律，加入代數運算，便得標準的海龍公式。這種純代數化的證明，就宛如刀之兩刃，好之者，認為不必畫出複雜的圖形，便得出證明，真是太厲害了；惡之者，認為這種證明就如同天外飛來一筆，往往令人產生不著邊際的感覺。

在我自己的教學經驗中，除了海龍公式的不同證明引人入勝外，我也注意到由海龍公式所延伸出來的不少數學定理，這些高中數學老師都可以讓學生當作回家作業。比如說吧，如定義：

三邊長度與面積都是自然數的三角形，且三邊長互質，稱為 Heron 三角形。則可導出如下八個性質：

性質一、所有 Heron 三角形邊長都是由兩個奇數、一個偶數組成。

性質二、不存在邊長是 1 或是 2 的 Heron 三角形。

性質三、Heron 三角形的面積都是 6 的倍數。

性質四、Heron 三角形至多有一個邊長是 3 的倍數。

性質五、三個相繼自然數 $2k-1,2k,2k+1(k\geq 2)$ 作為邊長的 Heron 三角形，若且唯若 k 是不定方程式 $3m^2+1=k^2$ 的正整數解

$$k=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^t+\left(2-\sqrt{3}\right)^t\right],m=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^t-\left(2-\sqrt{3}\right)^t\right],t=1,2,3......$$

如此的三個相繼自然數有無窮多組。

性質六、邊長為3,4,5的三角形是唯一的相繼自然數 Heron 直角三角形，除此之外，相繼自然數 Heron 三角形都是銳角三角形。

性質七、任何相繼自然數 Heron 三角形都可以分成兩個 Heron 直角三角形。

性質八、三邊都不是 3 的倍數的Heron三角形有無窮多個。[1]

以上八個性質，均屬於海龍公式的應用問題，若學生對此有興趣的話，當成科學展覽的題目，也是極為合適的。除上述諸性質外，我想高中數學教師在教海龍公式時，如果學生的程度中上，還可以引入如下的定理：

面積與其周長數值相等的 Heron 三角形只存在五種。

證明：因為 $a\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=2s$ ，

令 $s-a=x,s-b=y,s-c=z,\therefore (s-a)+(s-b)+(s-c)=x+y+z$ ，

得 $3s-2s=x+y+z,\therefore x+y+z=s$ ，

且 $s(s-a)(s-b)(s-c)=sxyz=4s^2,\therefore xyz=4s--(A)$，

另設 $x\geq y\geq z$ ，則 $xyz=4s=4(x+y+z)\leq 4(x+x+x)=12x$ ，

得 $yz\leq 12,\therefore z^2\leq yz\leq 12\therefore z=1,2,3$ 。

(1) 當 $z=1$ 時，代入 (A) 式中，$\therefore xy\cdot 1=4(x+y+1)$，

$\therefore (x-4)(y-4)=16+4=20$ ，又 $y-4\leq x-4$ ，取 $y-4=1,2,4$

得 $(x,y,z)=(24,5,1),(14,6,1),(9,8,1)$ 三解。

其三邊為 $(a,b,c)=(6,25,29),(7,15,20),(9,10,17)$ 。

(2) 當 $z=2$ 時，代入 (A) 式中，$\therefore xy\cdot 2=4(x+y+2)$ ，

$\therefore (x-2)(y-2)=4+4=8$ ，又 $y-2\leq x-2$ ，取 $y-2=1,2$

得 $(x,y,z)=(10,3,2),(6,4,2)$ 二解。

其三邊為 $(a,b,c)=(5,12,13),(6,8,10)$ 。

(3) 當 $z=3$ 時，因為 $yz\leq 12$ ，取 $y=4$ 代入 (A) 式中，

$\therefore x\cdot 4\cdot 3=4(x+4+3),\therefore x=\dfrac{7}{2}\notin N$ 。

以上的有關海龍的定理與柏拉圖的正多面體定理：

正多面體只存在五種，分別是正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。

是不是很類似？顯然，正多面體定理的證明，也是值得學生花時間學習的。

附註：

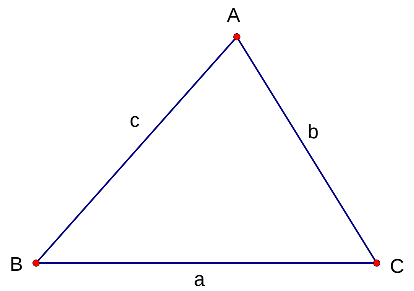
1. 以上諸性質參考沈康身，《歷史數學名題賞析》，上海教育出版社，2002 年，第 447-453，沈教授在書中對於 Heron 三角形有明確且深入的介紹，有興趣的讀者可詳閱。

高中教材中海龍公式證明與教學的關聯性

樹林高中 王鼎勳老師

前言

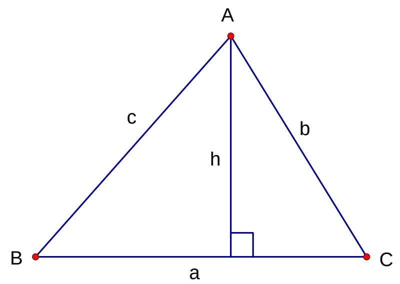
三角形求面積的方法，從小學學到的**底乘高除以** 2，國中教材在面積的方法上沒有新的突破，但是配合商高定理，其實有很多的變化，直到高一下，在第二章 2-5 節中，一口氣提了兩個方法，一為



$\Delta ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$，一為海龍公式（$s=\frac{a+b+c}{2}$）$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，就學生而言，進行了一個概念的躍進，但就教材的結構或發展而言，似乎也就理所當然了。

教材的結構發展

就整個 2-5 節的教材結構而言，



從小學的面積公式出發 $\Delta ABC=\frac{a\times h}{2}$，導出 $\Delta ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$（∗），利用面積公式（∗）導出正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，配合商高定理導出餘弦定理 $\begin{cases} b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \end{cases}$，進而在導出 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，當然整節的重心圍繞著正弦與餘弦定理，多數的版本幾乎不約而同的以海龍公式 $\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 作為結束。

海龍公式的教材分析

其實海龍公式，被流傳下來，是很有意思的。一般而言，一個數學概念的形成與發展通常都是自然的(簡便的)，有推廣性的，而海龍公式的證明部份恰巧皆不具備以上兩點：第一它沒那麼自然，在當時與現在皆是如此，因為要證明它不管利用哪種方法，技巧性都很高，像海龍的原始證明與梅文鼎的証明，都必須與內切圓半徑扯上關係，甚至必須設計特殊的輔助線，以滿足它的需要，雖然李善蘭利用比例的方式下手還是脫離不了內切圓半徑，而且對比例線段的認識如果沒有那麼理想的人，要在第一時間理解李善蘭的想法確屬不易，雖然現在利用面積公式（$\Delta ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$）、平方關係（$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$）、餘弦

定理（$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$），可以較快速推導出來，還是必須按部就班一路學習過來才行。換言之，它絕對不是個自然的概念；第二，它似乎是正餘弦定理的總結，沒有其他的發展空間，這也許也可以解釋海龍公式沒有那麼偉大的理由。

教學活動的設計

1. 由底乘高除以 2 的面積公式出發，引出$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$
2. 利用面積公式引出正弦定理

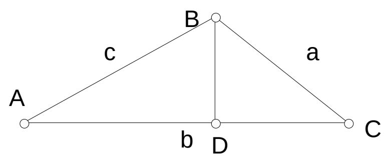
   $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$ ，

   同除$\dfrac{abc}{2}\Rightarrow\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$得證（$=k$），

   $\sin A=ak$ ，$\sin B=bk$ ，$\sin C=ck$ ，

   $\therefore\sin A:\sin B:\sin C=ak:bk:ck=a:b:c$
3. 利用商高定理導出餘弦定理

   ΔABC 中，$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$



   $$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\left(c\sin A\right)^2+\left(b-c\cos A\right)^2$$
   $$=c^2\sin^2 A+b^2-2bc\cos A+c^2\cos A$$
   $$=c^2+b^2-2bc\cos A$$

   討論餘弦定理求角度$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
4. 在 2-5 教材的最後引出海龍公式（$s=\dfrac{a+b+c}{2}$）$\Delta ABC=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$

   $$\Delta ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\cos C\right)\left(1-\cos C\right)}$$
   $$=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$$
   $$=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(\frac{-a^2+2ab-b^2+c^2}{2ab}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\right)\left(\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}\times\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\times\frac{(a+b-c)}{2}\times\frac{(a+c-b)}{2}\times\frac{(b+c-a)}{2}}\text{ ，}$$

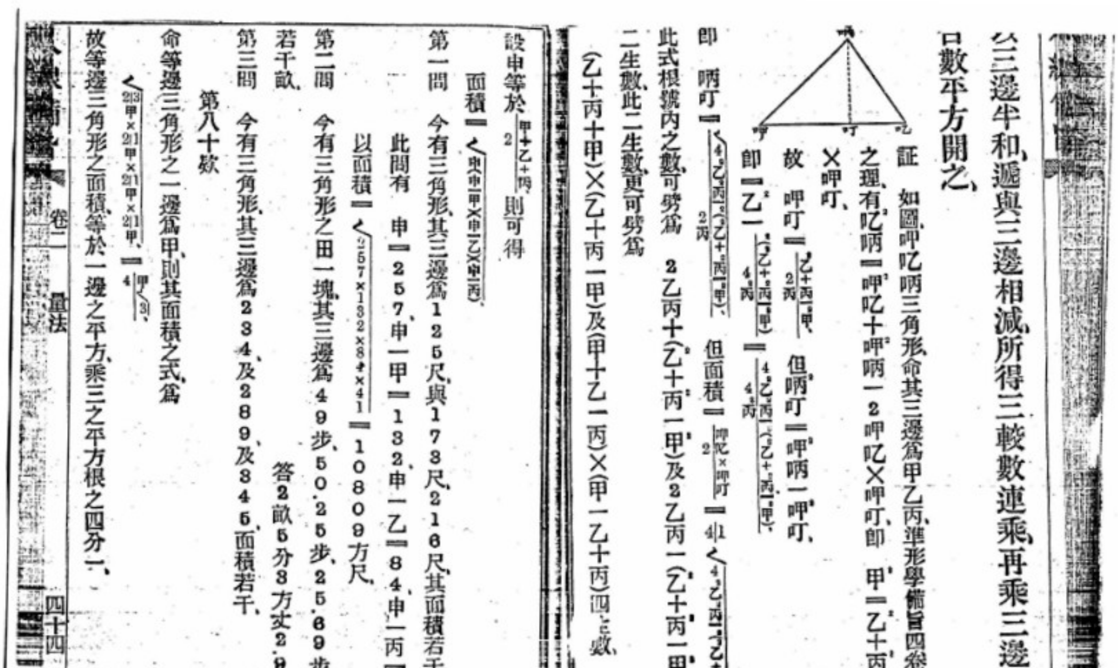
（若 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，則 $s-a=\dfrac{b+c-a}{2}$ ）

$=\sqrt{s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)}$ 得證！

5. 讓學生想想有無其他方法，引入商高定理的方法介紹。
6. 介紹前輩們的努力成果（海龍、梅文鼎、李善蘭），順便強化餘弦定理在公式中的地位。

結論

在學校教授海龍公式，如果在高中數學教材這個脈絡下，利用正餘弦定理驗證海龍公式，是一件相當自然的動作，也可順便檢視正餘弦定理的學習情況，跳脫這個脈絡，學生要自然的推導出海龍公式，誠屬不易，但也不是完全沒機會，利用商高定理導出海龍公式，事實上對學生而言也許不會讓海龍公式流於單純的程序性知識，或許也是可以嘗試的方法，某種程度來說，讓學生覺得沒有那麼硬，相信也是老師樂於看見的。


以三邊半和，遞與三邊相減，所得三較數連乘，再乘三邊半和，
口數平方開之，

證 如圖，呷吃呐三角形，命其三邊為甲乙丙，準形學備旨四卷十二題之理，有吃呐²＝呷吃²＋呷呐²－2呷吃×呷叮，即 甲²＝乙²＋丙²－2丙×呷叮，

故 呷叮＝(乙²＋丙²－甲²)/2丙， 但呐叮²＝呷呐²－呷叮²，

即 ＝乙²－(乙²＋丙²－甲²)²/4丙² ＝(4乙²丙²－(乙²＋丙²－甲²)²)/4丙²，

即 呐叮＝√(4乙²丙²－(乙²＋丙²－甲²)²)/2丙， 但面積＝呷吃×呐叮/2＝¼√(4乙²丙²－(乙²＋丙²－甲²)²)，

此式根號內之數，可勞為 2乙丙＋(乙²＋丙²－甲²)及2乙丙－(乙²＋丙²－甲²)

二生數，此二生數更可勞為

(乙＋丙＋甲)×(乙＋丙－甲)及(甲＋乙－丙)×(甲－乙＋丙)四生數，

設申等於(甲＋乙＋丙)/2，則可得

面積＝√(申(申－甲)×(申－乙)×(申－丙))，

第一問 今有三角形，其三邊為125尺，與173尺，216尺，其面積若干，

此問有 申＝257，申－甲＝132，申－乙＝84，申－丙＝41，是以面積＝√(257×132×84×41)＝10809方尺，

第二問 今有三角形之田一塊，其三邊為49步，50.25步，25.69步，其田有若干畝，

答2畝5分3方丈2.9步，

第三問 今有三角形，其三邊為234，及289，及345，面積若干，

第八十款

命等邊三角形之一邊為甲，則其面積之式為

√(3/2甲×1/2甲×1/2甲×1/2甲)＝甲²/4√3，

故等邊三角形之面積，等於一邊之平方，乘三之平方根之四分一，

八線備旨 卷二 量法 四十四

附錄一：《八線備旨》書影

對有關李善蘭證明海龍公式的一點心得

台師大數學系教學碩士班　程和欽老師

觀察李善蘭對海龍公式的證明，他似乎採用了倒敘的手法，視結果的需求，採用了『反推法』及『媒介過渡』的兩個解題策略。

首先，在第一段的問答中，他先設定了「一率」、「二率」、「三率」、「四率」，而後以『二三率相乘乃半和乘垂線冪』爲第一個媒介。假設此一媒介成立，從而推導出所謂的海龍公式。然此一媒介爲何成立，他在第一段的問答中並未說明。

其次，李善蘭利用第二段的問答設定：

半和與餘一較比，必若兩句弦和相乘積與股冪比，故亦若底內兩較相乘積與垂線冪比也。

亦即

$$s:(s-a)=(\overline{AB}+\overline{BH})\times(\overline{AC}+\overline{CH}):h^2=(s-b)\times(s-c):r^2$$

爲第二個媒介。並可用此一媒介說明何以第一段問答中的『二三率相乘乃半和乘垂線冪』。同時，在這一段的問答中，他也解決了：

兩句弦和相乘積與股冪比，若底內兩較相乘積與垂線冪比也。

即

$$(\overline{AB}+\overline{BH})\times(\overline{AC}+\overline{CH}):h^2=(s-b)\times(s-c):r^2 \text{。}$$

但尚未將 $(s-b)\times(s-c):r^2$ 與 $s:(s-a)$ 作聯結。

此外，在第三段的問答中，李善蘭又設定了第三個媒介：

所指比例非本句弦和與本句弦較相為比，乃本句弦和與餘一句弦較相為比。

即

$$\frac{(\overline{AB}+\overline{BH})}{(\overline{AC}-\overline{CH})}=\frac{(\overline{AC}+\overline{CH})}{(\overline{AB}-\overline{BH})} \text{。}$$

因爲由前段可引出

$$\frac{(s-b)(s-c)}{r^2}=\frac{(\overline{AC}+\overline{CH})}{(\overline{AB}-\overline{BH})}=\frac{(\overline{AB}+\overline{BH})}{(\overline{AC}-\overline{CH})}$$

的結果。李善蘭再利用第三段的問答及附圖證明出 $\dfrac{(\overline{AC}+\overline{CH})}{(\overline{AB}-\overline{BH})}=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{BH})}{(\overline{AC}-\overline{CH})}=\dfrac{s}{s-a}$ 。

這種解題策略與明顯不同於現今一般的教科書課程內容，這是因爲教科書的解題大部份都是由題目所給予的『條件』，直接經過幾個『媒介』推導出結果。但爲什麼忽然出現此媒介？爲什麼需要透過此媒介，則並未說明。反之，李善蘭的證明過程，是由題目所要證明的『結果』出發，考察欲達成這個結果需要什麼『媒介』，就去創造、去證明，進而整理得出結果這種作法及解題策略，其實更貼近學生的自然學習過程。也是有經驗的教師於教學中常用的解題及引導策略。

觀察本題體例，感覺有點像《論語》，借由師、生間的問答來闡釋、解決問題。因此，我猜測這本《天算或問》有可能像是《論語》一樣，是李善蘭在教學過程中師生互動的記錄，或是清朝時期靠書信往來『拜師』過程中，書信的記錄編輯。

參考文獻

南宋・秦九韶（1993）：數書九章。收入郭書春主編，中國科學技術典籍通彙 數學卷第一分冊。鄭州市：河南教育出版社。

明，羅雅谷譯(2000)，《測量全義》，收入《崇禎曆書》，故宮珍本叢刊。海口：海南出版社。

清，梅文鼎 (1971).《平三角舉要》，收入《梅氏叢書輯要》，台北：藝文印書館。

清，康熙御製 (1968).《數理精蘊》（王雲五主編，共 5 本），台北：台灣商務書館。

清，李善蘭 (1867) 《天算或問》，收入《則古昔齋算學》，金陵刻本。

何紹庚 (1993)。《數書九章》提要。中國科學技術典籍通彙 數學卷第一分冊, 1-431~1-437。鄭州市：河南教育出版社。

李迪 (2004).《中國數學通史・明清卷》，南京：江蘇教育出版社。

李儼 (1983).《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。

李兆華主編 (2005).《中國近代數學教育史稿》，山東：山東教育出版社。

李兆華 (1994).《中國數學史》，台北：文津出版社。

洪萬生 (2000).〈貼近「古典」，向大師學習〉，《HPM 通訊》第三卷第一期。

洪萬生 (2001)：古代數學文本在課堂上的使用。國科會補助專題研究計畫成果報告, (編號 NSC 89-2511-S-003-031-; NSC 89-3511-S-003-121)。台北市：國立台灣師範大學數學系。

洪萬生 (2002)：中算史中的『張本例』。HPM 通訊, 5(12), 1-3。

洪萬生 (2004)：利用 HPM 來引動的數學教師專業發展：蘇老師的故事(待刊稿)。

沈康身 (2002)《歷史數學名題賞析》，上海教育出版社。

潘慎文譯 (1909).《八線備旨》，上海：上海美華書館。

梅榮照主編 (1990). 《明清數學史論文集》, 南京：江蘇教育出版社。

歐士福 (2005).《從算學試題看晚清自強運動期間數學教育與數學傳播》，台北：國立台灣師範大學數學系碩士論文。

黃清揚 (2002).《中國 1368-1806 年間的勾股術發展之研究》，台北：國立台灣師範大學數學系碩士論文。

藍紀正、朱恩寬譯 (1992).《歐幾里德幾何原本》，台北：九章出版社。

劉鈍 (1997).《大哉言數》。瀋陽市：遼寧教育出版社。

蘇意雯 (2004).《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與 研究》。台北市：國立台灣師範大學博士論文(未出版)。

蘇意雯 (2005).〈中國的海龍公式－三斜求積術〉，《翰林數學天地》19: 18-20。

Dunham, W. (1990). (林傑斌譯, 1995) 《天才之旅》（*Journey through genius: the great theorems of mathematics*）。台北市：牛頓出版公司。

Kline, M. (1972). (林炎全、洪萬生、楊康景松譯, 1983）《數學史－數學思想的發展》（*Mathematical thought from ancient to modern times*）。台北市：九章出版社。

Fauvel, J., & Van Maanen, J.(Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Grugnetti, L. (2000). “The history of mathematics and its influence on pedagogical problems”, in V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp.

29-35). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Heath, Thomas L. ed. (1956). *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*. New York: Dover Publications, Inc.

Jahnke, H. N. (1994). “The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective”, in J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the Psychology of Mathematics*.

Jahnke, H. N. (2000). “The use of original sources in the mathematics classroom”, in J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Katz, Victor J. (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. HarperCollins College Publishers.

Mueller, Ian (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Massachusetts: The MIT Press.

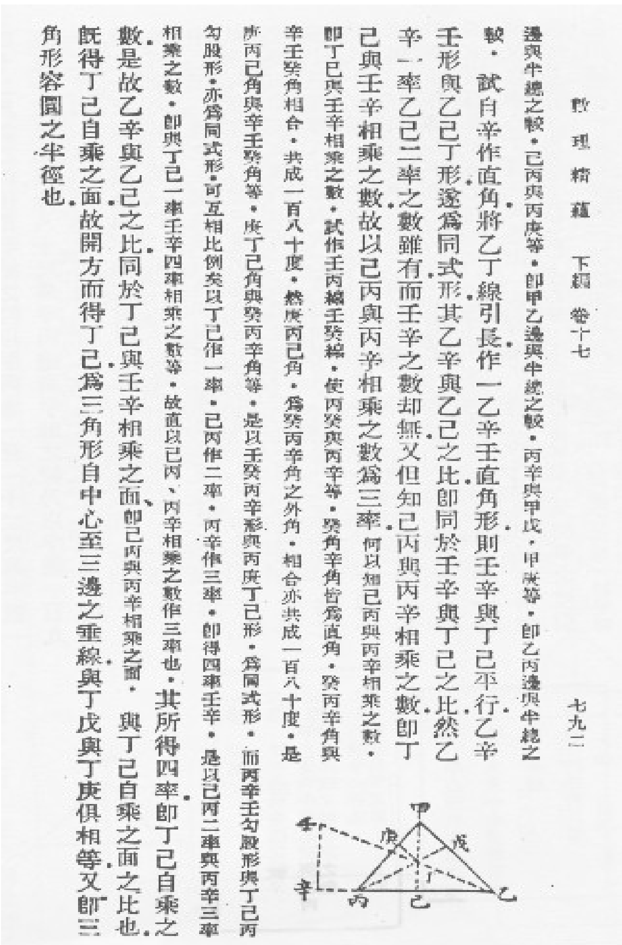
Neil, Hugh et al eds (1993). *The History of Mathematics*. Essex: Longman Group.

Rogers, L. (1993). “The assessment of mathematics: society, institution, teachers and students”, in *Didactics of mathematics*, Erasmus ICP-92-G-2011/11 (pp. 603-613).

網站：Indexes of Biographies (MacTutor)（數學家傳記索引）：

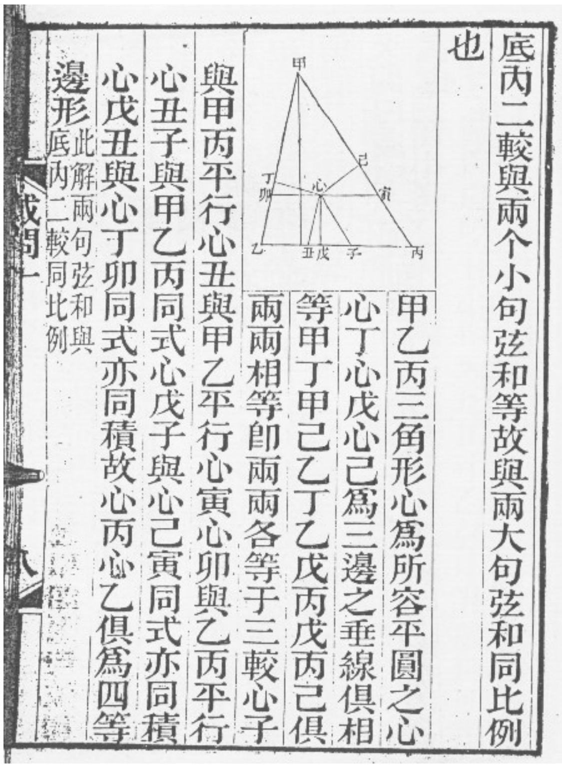
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Heron.html

http://www.mlahanas.de/Greeks/HeronAlexandria.htm



數理精蘊 下編 卷十七 七九二

邊與半總之較。己丙與丙庚等。即甲乙邊與半總之較。丙辛與甲戊。甲庚等。即乙丙邊與半總之較。試自辛作直角。將乙丁線引長。作一乙辛壬直角形。則壬辛與丁己平行。乙辛壬形與乙己丁形。遂為同式形。其乙辛與乙己之比。即同於壬辛與丁己之比。然乙辛一率乙己二率之數雖有。而壬辛之數卻無。又但知己丙與丙辛相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。故以己丙與丙辛相乘之數為三率。何以知己丙與丙辛相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。試作壬丙線壬癸線。使丙癸與丙辛等。癸角辛角皆為直角。癸丙辛角與辛壬癸角相合。共成一百八十度。然庚丙己角。為癸丙辛角之外角。相合亦共成一百八十度。是庚丙己角與辛壬癸角等。庚丁己角與癸丙辛角等。是以壬癸丙辛形與丙庚丁己形。為同式形。而丙辛壬勾股形與丁己丙勾股形。亦為同式形。可互相比例矣。以丁己作一率。己丙作二率。丙辛作三率。即得四率壬辛。是以己丙二率與丙辛三率相乘之數。即與丁己一率壬辛四率相乘之數等。故直以己丙、丙辛相乘之數作三率也。其所得四率。即丁己自乘之數。是故乙辛與乙己之比。同於丁己與壬辛相乘之面、即己丙與丙辛相乘之面。與丁己自乘之面之比也。既得丁己自乘之面。故開方而得丁己。為三角形自中心至三邊之垂線。與丁戊與丁庚俱相等。又即三角形容圓之半徑也。



底丙二較與兩个小句弦和等故與兩大句弦和同比例也

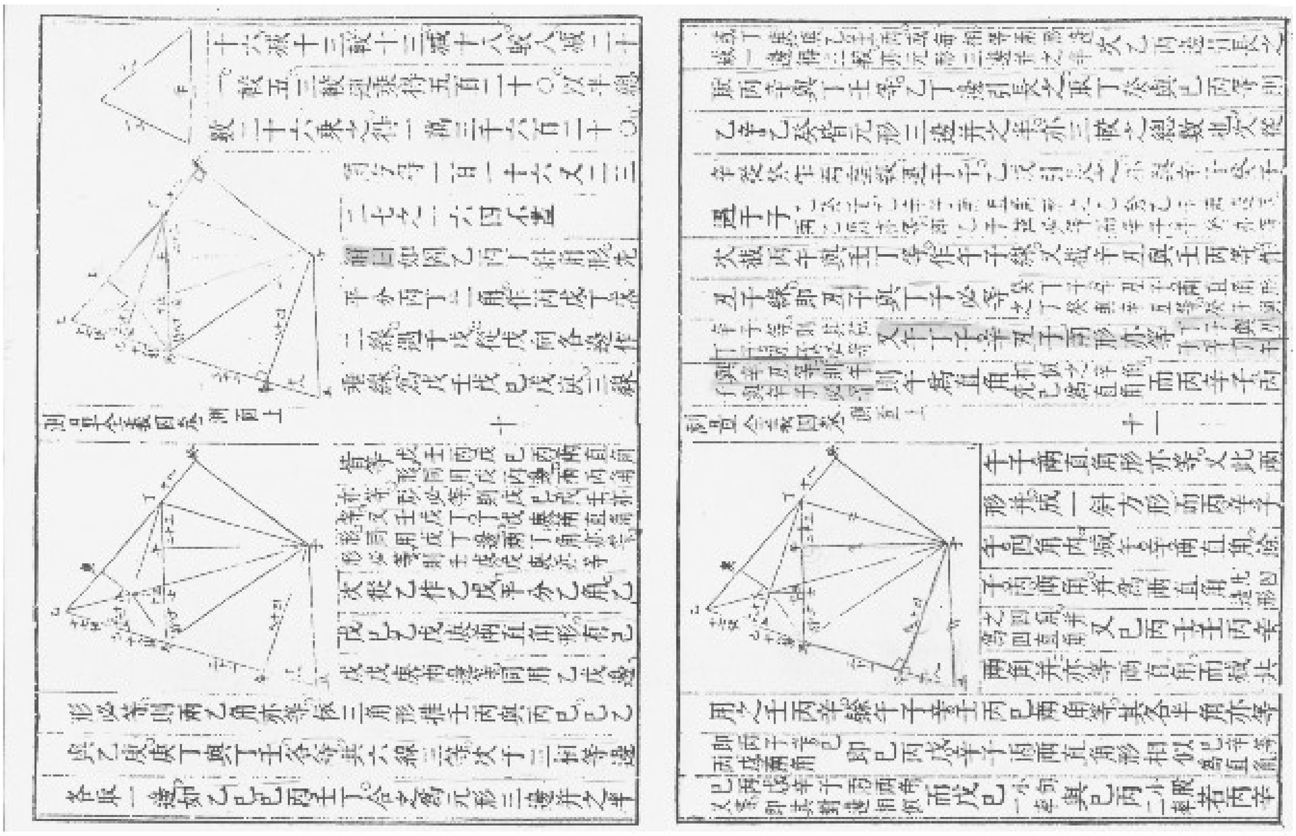
甲乙丙三角形心為所容平圓之心心丁心戊心己為三邊之垂線俱相等甲丁甲己乙丁乙戊丙戊丙己俱兩兩相等即兩兩各等于三較心子與甲丙平行心丑與甲乙平行心寅心卯與乙丙平行心丑子與甲乙丙同式心戊子與心己寅同式亦同積心戊丑與心丁卯同式亦同積故心丙心乙俱為四等邊形

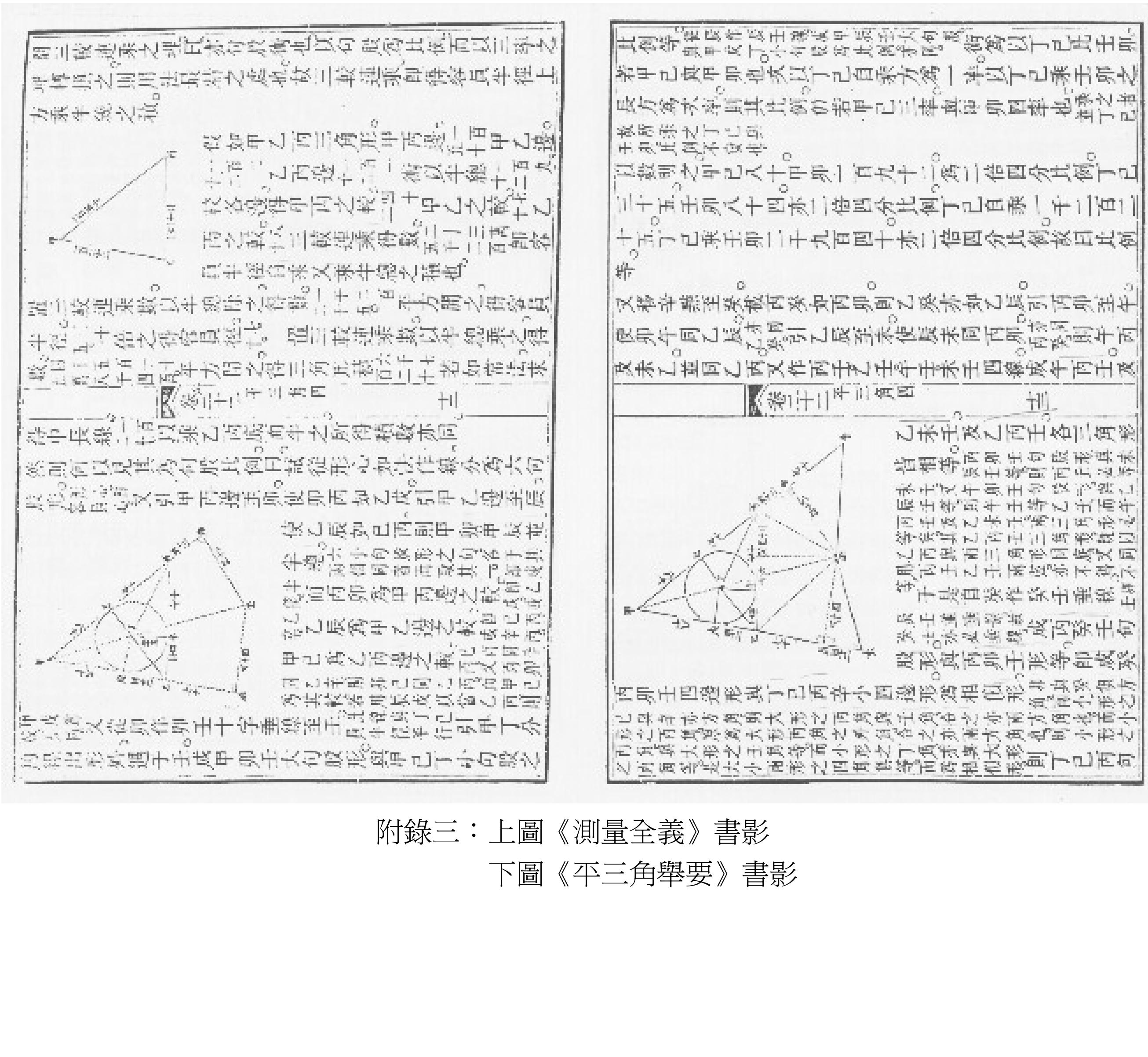
此解兩句弦和與底丙二較同比例

或問一

附錄二：左圖《數理精蘊》書影

上圖《天算或問》書影





附錄三：上圖《測量全義》書影

下圖《平三角舉要》書影

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得，尤其有關海龍公式的教學心得，懇請各位老師惠賜高見！