HPM通訊

第九卷 第五期 目錄（2006年5月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啓文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心) 傅聖國 （北市萬福國小）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

重訪 Oberwolfach 數學研究中心

台師大數學系 洪萬生教授

2006 年 4 月 30 日，我再度造訪 Oberwolfach 數學研究中心 (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, http://www.mfo.de)。我應邀參加由 Hans Niels Jahnke、Fulvia Gheringhetti 與 Jan van Maanen 所召集的 HPM 迷你工作坊。它的主要目的，是探討數學原始典籍 (primary sources) 在數學教育中的角色與功能。議程請參考本文附錄。此一相關研究計畫，我早在 1999 年在國科會的贊助下，就曾主持過『古代數學文本在課堂上的應用』。不過，這一次有幸與國際 HPM 同行分享研究與教學經驗，還是相當興奮，特別是我又再一次造訪了這一座落在德國黑森林區的數學研究聖地。

我曾在 1998 年 10 月參加由 David Rowe 與 Ivor Grattan-Guinness 所召集的研討會，那一次主題是：“History of Mathematics: Mathematics in the Americas and the Far East:

1800-1940”。當年我抵達時，秋意正濃，略覺寒氣，滿山紅楓與墨綠色的松樹相映成趣。這一次我抵達時，春寒則尚未消退，不過，綠意洋溢著寧靜的山谷，還是令人流連忘還。

這一次工作坊共有 16 位學者參加（見上附照片），其中包括了 Hans Niels Jahnke、Jan van Maanen、Abraham Arcavi、Evelyne Barbin、Luis Radford、David Pengelley、Costas Tzanakis，與 Björn Smestad 以及一些年輕學者或中學教師。除了 Smestad 報告他針對挪威課程與 TIMSS Video 相關分析報告之外，其他的與會者，都深入地分享了他們引進數學文本以促進教學的研究經驗，既豐富了我們的論述，也拓寬了我們的視野。

至於我自己，則主要利用本刊第 9 卷第 4 期『海龍公式』專輯內容，說明『海龍公式』之教學所引出的教師反思與學生之回饋。我隨身攜帶的 20 本本期通訊，剛好足以發放給每位與會者，這個『獻寶』讓他們驚豔了好久，Costas（現任 HPM 主席）特別請我以後在每一期的 *HPM Newsletter*（全年三期）上，披露我們的出版資訊。此外，他們也對我們『通訊團隊』的活力留下了十分深刻的印象，譬如 Jan 就特別提到我報告中的雙 Su（按即蘇俊鴻與蘇惠玉），非常搶眼。

最後，我要藉此機會向 Jan van Maanen 表達最誠摯的祝賀，這一位 HPM 的前主席 (1996-2000) 將從 2006 年 6 月 1 日起，接任荷蘭 Utrecht 大學 Freudenthal 研究所所長。我想，他有機會擔此重任，應該與他曾任教中學數學 16 年有關，還有他的數學史與 HPM 背景，也絕對是關鍵因素之一。此外，Jan 為人風趣睿智，學識相當淵博，始終願意與人為善，恐怕也有助於最後的出線。他出身 Utrecht，指導教授是著名的數學史家 Henk Bos（甫獲 2005 年國際數學史委員會的 Ken May medal），而 Bos 則師承 Hans Freudentahl，所以，Jan 的繼任所長，也算是一脈相成、實至名歸了。

附錄

Mini-Workshop at MF Oberwolfach (May, 1 to 5, 2006):
Studying Original Sources in Mathematics Education

Monday

9.00 – 10.00: Welcome, Planning Session

10.00 – 12.00: Abraham Arcavi and Masami Isoda

“Learning to listen: from historical sources to classroom practices”

15.30 – 18.00: David Pengelley

“A multi-week project on mathematical induction and combinatorics for university students, based on Pascal's *Traité du Triangle Arithmetique*”

Tuesday

9.00 – 10.00: Peter Rasfeld

“The problem of points - with pupils on the traces of Pascal and Fermat”

10.00 – 10.15: Break

10.15 – 11.15: Björn Smestad

“Curricula, textbooks and teachers - their role in making history of mathematics part of mathematics education”

11.15 – 11.30: Break.

11.30 – 12.30: Adriano Dematté

“A collection of documents for secondary school students a brief originals' anthology addressed to secondary school students (aged 12-18)(A. Demattè (ed.), 2006”

15.30 – 17.15: Caroline Bardini & Luis Radford

“Unknowns, Variables, and Parameters.”

17.15 – 17.30: Break

17.30 – 18.30: Evelyne Barbin

“The different readings of original sources: an experience in a pre-service teaching”

Wednesday

9.00 – 10.30: Costas Tzanakis

“Some examples and comments on integrating original mathematical texts in mathematics education”

10.30 – 10.45: Break

10.45 – 12.30: Karin Reich

“The historical roots of vector calculus: J. W. Gibbs (1839-1902)”

Afternoon: Excursion to the neighbouring village.

Thursday

9.00 – 10.00: Katja Peters

“Perceiving history of Mathematics”

10.00 – 10.15: Break

10.15 – 11.15: Kathy Clark

“Using Original Sources in Teaching: One Teacher's Experience with Personal Study and Curricular Inclusion”

11.15 – 11.30: Break

11.30 – 12.30: Evelyne Barbin

« Présentation de Sources »

15.30 h – 17.00 : Michael Glaubitz

“The use of original sources in the classroom. An Empirical Study. Reading Al-Khwarizmis Treatise on Quadratic Equations with 9th-graders”

17.00 – 17.15: Break

17.15 – 18.30: Wann-Sheng Horng

“Teaching Heron’s Formula in Context”

Friday

9.00 – 10.15: Hans Niels Jahnke

“Students working on their own ideas. Bernoulli’s lectures on the differential calculus (1692) in grade 11”

10.15 – 10.30: Break

10.30 – 11.30: Jan van Maanen

“Original Sources. Projects, Lessons and Lectures”

11.30 – 12.30: Michael Glaubitz

“Videotaped lessons”

15.00 – 16.00: Round Table

“Aims and pedagogical concepts in working with primary sources”

16.00 – 16.15: Break

16.15 – 18.00: Katja Peters & Peter Rasfeld

‘Results of work by pupils”

矩形面積公式與柱體體積公式

台師大數學系 黃文達教授

一、矩形面積公式

矩形的面積爲長乘以寬，這是眾人皆知的公式，但是，往下追問這個公式是如何得來的？多半的學生會回答是老師說的！大家可以回想一下，我們何時推導出矩形面積公式。我們是如何推導出矩形面積公式呢？

在大家的記憶裏，我們是從邊長爲 1 的正方形（它的面積爲一平方單位）開始，利用點數的方式，而導出矩形的邊長是正整數時，其面積是長×寬，或是寬乘以長。至於邊長是有理數時，我們依次作如下的處理：

1. 長為 1 單位，寬為 $\frac{1}{m}$ 單位時，矩形的面積是 $1\times\frac{1}{m}$；
2. 長為 $\frac{1}{n}$ 單位，寬為 $\frac{1}{m}$ 單位時，矩形的面積是 $\frac{1}{mn}$；
3. 長、寬均為分數時，處理矩形的面積有兩種方法，一是帶分數相乘，利用乘對加的分配律，用切割方式導出矩形面積，如

$$2\frac{2}{3}\times 4\frac{1}{2}=(2+\frac{2}{3})(4+\frac{1}{2})=2\times 4+2\times\frac{1}{2}+4\times+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\text{；}$$

另一種方法是假分數相乘，如

$$2\frac{2}{3}\times 4\frac{1}{2}=\frac{8}{3}\times\frac{9}{2}=\frac{72}{6}=72\div 6$$

然則我們又如何處理實數邊長的矩形的面積公式？我們幾乎未曾見過任何教本處理過這些問題。爲了數學的邏輯結構，數學教材的架構，以及學習理論的架構，我們有必要設計一個教學或學習活動，以彌補我們對矩形的面積概念的完整性的落差。

在設計教學活動時，這一主題涉及下列各數學概念：

（1）在數線上如何描出有理數的點？

分數有下面各種意義：

$$\frac{1}{2}=1\div 2,\quad \frac{3}{2}=3\div 2=1+\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2},$$

$$\frac{m}{n}=m\div n=m\times\frac{1}{n}$$

$$\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}=q+r\times\frac{1}{n}$$

一是堆疊方式：因 $\frac{m}{n}\times n=m$, n 段長為 $\frac{m}{n}$ 的線段可拼出長為 m 的線段，因此，如將 0 到 m 的線段 n 等分，即可獲致 $\frac{m}{n}$；二是切割方法：因 $\frac{m}{n}=m\times\frac{1}{n}$，先將單位長 n

等分，再用$\frac{1}{n}$的長度量取 m 次，即可獲致$\frac{m}{n}$。

例題：試說明如何在數線上描出分數$\frac{3}{2},\frac{m}{n}$所在的點？

（2）在數線上給定一點，試說明如何找出這個點所代表的數？

活動：一支原子筆的長度為一個單位，那麼，一根粉筆的長度是多少單位呢？如果皮尺只有公分刻度，要如何才能量出一支原子筆的長度？

（3）兩實數相等的定義是兩實數間找不到任何分數介於其間。

給定相異兩實數 a<b，如何找出在 a 與 b 之間的分數呢？

如何找分母 n？因為$\frac{1}{n}<b-a$，所以 n 必需滿足 n×(b-a)>1，因此可將單位線段平分再平分 k 次，直到分割出的線段小於 b-a 為止，此時可取$n=2^k$

如何找分子 m？，因為$\frac{m}{n}=m\times\frac{1}{n}\Rightarrow a<m\times\frac{1}{n}<b$，用$\frac{1}{n}$連續量 m 次，直到分點$\frac{m}{n}$座落於 a 與 b 之間為止。

（4）如何刻畫兩實數間沒有有理數？

若有一分數比其中一實數大，則必大於另一實數；

若有一分數比其中一實數小，則必小於另一實數；

若有一分數等於其中一實數，則必等於另一實數。

（5）堆疊法：試說明有四個量 a, b, c, d， a：b=c：d 的條件為

對於任意正整數 m, n，

若 na>mb 則 nc>md； (分數$\frac{m}{n}$若小於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也小於$\frac{c}{d}$)

若 na<mb 則 nc<md； (分數$\frac{m}{n}$若大於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也大於$\frac{c}{d}$)

若 na=mb 則 nc=md。 (分數$\frac{m}{n}$若等於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也等於$\frac{c}{d}$)

（6）切割法：試說明有四個量 a,b,c,d， a：b=c：d 的條件為

對於任意正整數 m, n，

若 $\frac{a}{m}>\frac{b}{n}$ 則$\frac{c}{m}>\frac{d}{n}$；（分數$\frac{m}{n}$若小於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也小於$\frac{c}{d}$）

若$\frac{a}{m}<\frac{b}{n}$ 則 $\frac{c}{m}<\frac{d}{n}$；（分數$\frac{m}{n}$若大於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也大於$\frac{c}{d}$）

若 $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ 則 $\frac{c}{m}=\frac{d}{n}$。（分數$\frac{m}{n}$若等於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也等於$\frac{c}{d}$）

（7）試證明：等寬兩矩形面積之比恰為長之比。

基本事實：等寬的兩個兩矩形，長度越長面積就越大。

設甲乙兩個同寬的矩形，甲矩形的面積為 U，長度為 a；乙矩形的面積為 V，長度為 b。今任給定兩個正整數 m,n， 將甲矩形放大為 n 倍，乙矩形放大為 m 倍，比較兩個矩形的面積與長度可發現，面積較大者長邊亦較長，亦即

若 na>mb 則 nU>mV；

若 na<mb 則 nU<mV；

若 na=mb 則 nU=mV。

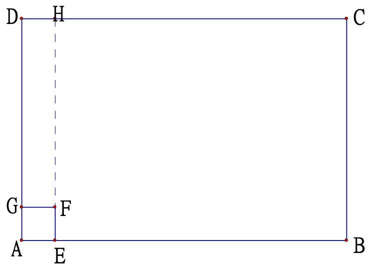
這個結果表示：分數$\frac{m}{n}$若小於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也小於$\frac{U}{V}$；

分數$\frac{m}{n}$若大於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也大於$\frac{U}{V}$；

分數$\frac{m}{n}$若等於$\frac{a}{b}$，則分數$\frac{m}{n}$也等於$\frac{U}{V}$。

也就是說$\frac{a}{b}$與$\frac{U}{V}$之間找不到任何一個分數，因此我們得到結論：$\frac{a}{b}=\frac{U}{V}$。因此得證：等寬兩矩形面積之比恰為長之比。

（8）試證明：矩形面積與單位正方形面積之比，為長乘以寬與 1 之比。



$$\frac{\square ABCD}{\square AEFG}=\frac{\square ABCD}{\square AEHD}\times\frac{\square AEHD}{\square AEFG}=\frac{AB}{AE}\times\frac{AD}{AG}=AB\times AD$$

（9）設單位正方形面積為 1，則矩形面積的面積為長乘以寬。

二、長方體的體積公式

引理：底面積相等的兩個長方體，其體積的比等於對應高之比。

因底面積固定的長方體高愈大，則體積亦愈大；反之，底面積固定的長方體體積愈大，則高亦愈大。

設長方體甲的體積為 A，長方體乙的體積為 B；長方體甲的高為 a，長方體乙的高為 b。今任給兩個正整數 m, n，若將甲長方體堆高為 m 倍，將乙長方體堆高為 n 倍，則比較兩個長方體的體積與高度，根據上述引理及其推論（底面積固定的長方體高愈大則體積亦愈大，反之，底面積固定的長方體體積愈大則高亦愈大），我們可得知下列事實：

$mA>nB \Leftrightarrow ma>nb$

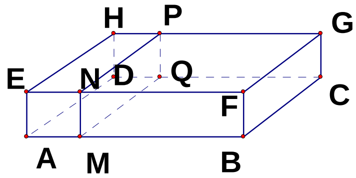
$mA<nB \Leftrightarrow ma<nb$

$mA=nB \Leftrightarrow ma=nb$

亦即 $\frac{m}{n}>\frac{B}{A}\Leftrightarrow\frac{m}{n}>\frac{b}{a};\frac{m}{n}<\frac{B}{A}\Leftrightarrow\frac{m}{n}<\frac{b}{a};\frac{m}{n}=\frac{B}{A}\Leftrightarrow\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$

因此可知兩個實數$\frac{B}{A},\frac{b}{a}$之間沒有任何分數，故可知$\frac{B}{A}=\frac{b}{a}$

引理二：高度為 1 單位的長方體，其體積為長×寬×1



證明：設 AM＝1，AE＝1

因

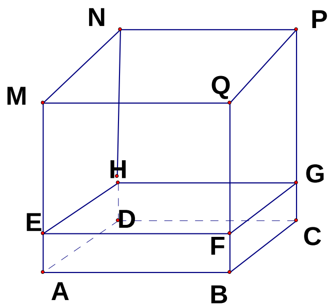
$$\frac{ADHE-BCGF}{ADHE-MQPN}=\frac{AB}{1}$$

$$\frac{AMNE-QPHD}{unit\ cube}=\frac{AD}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{ADHE-BCGF}{unit\ cube}=\frac{AB}{1}\times\frac{AD}{1}=AB\times AD$$

得證：高度爲 1 單位的長方體，其體積爲長×寬×1。

定理：設單位正方體的體積爲 1，長方體體積等於 長×寬×高。



設 AE＝1，因

$\frac{ABCD-QPNM}{ABCD-EFGH}=\frac{AM}{1}$，而長方體 ABCD-EFGH 之體積爲 AB×AD×1。

故知長方體 ABCD-MOPN 之體積爲 AB×AD×AM。

得證：長方體的體積爲長×寬×高。

三、結語

上述教學或學習的設計活動中，理論部分牽涉的難度甚高，一是兩實數相等的定義是兩實數間找不到任何分數介於其間，也就是說，相異兩實數間必可找出一個有理數。二是引自《幾何原本》第五冊兩個比相等的定義，與學生的認知有一段不小的差距。至於關鍵引理：等寬兩矩形面積之比恰爲長之比（參考《幾何原本》第六冊命題 1）的內涵：等寬的兩個兩矩形，長度越長面積就越大，面積就越大長度就越長，對學生而言反而不是一個大障礙。最後，我們利用利用面積之比恰爲長之比的事實，導出面積公式的技巧，則應該尙在學生可理解的範圍內。

楊輝算書與 HPM：以〈習算綱目〉為例

桃園縣立青溪國中 王文珮老師

就中國數學發展史而言，宋元時期的數學成就處於最輝煌的一頁，在中世紀時期的數學體系中，自有其不可忽視的地位。尤其是在十三世紀後期至十四世紀初，即南宋與金元並存之際，中國數學有著豐富的成果，以李冶、秦九韶、楊輝和朱世傑的著述最為引人注目。其中，楊輝算書雖然曾經散佚，至今流傳於世者仍有五種，於 1261 年到 1275 年之間，著書共計二十一卷：

《詳解九章算法》十二卷（1261）。
《日用算法》二卷（1262）。
《乘除通變本末》三卷（1274）。
《田畝比類乘除捷法》二卷（1275）。
《續古摘奇算法》二卷（1275）。

後人將最後的《乘除通變本末》、《田畝比類乘除捷法》以及《續古摘奇算法》共七卷，合稱為《楊輝算法》。

楊輝於《乘除通變本末》上卷開宗明義便提出了一份教學的計畫表〈習算綱目〉，本文就其內容與數學教學上的關聯性做一分析，試圖在現今的中學數學教學上獲得進一步的啓發。〈習算綱目〉從九九合數、乘除運算為首，一直到《九章算術》的內容都詳細列出每個單元的教學進度、學習重點及時程安排等說明，是中國古代數學教育史上，重要且珍貴的數學教學計畫資料。針對這份數學教學計畫大綱的內容，包含了以下幾個有關於數學教學面向的啓發：

(1) 悉心安排學習時程

首先提出一日學習乘法的例題及定位法，之後以五日復習乘法的習題，完成一位數至六位數的乘法運算：

學相乘起例並定位，功課一日。溫習乘法題目。自一位乘，至六位以上，並定位，功課五日。

接著，同樣安排一日來學習除法的例題及定位法，再花半個月的時間復習除法的習題，完成一位數至六位數的除法運算，以及做除法時定位變換的技巧：

學商除起例並定位，功課一日。溫習除法題目。自一位除，至六位除以上，並更易定位，功課半月日。

在學習乘除法的各項工作之後，便可取得適合初學者研讀的《五曹算經》與《應用算法》二本算書，並依照書上所提供的解法，每日理解其中的二、三個問題。初學時不必急

於窮盡其中的道理，先要理解如何提出問題、使用算法解題以及應用乘除運算於解法之中，待熟悉乘除法的基本運算之後，再回頭細讀其中的道理亦不嫌遲。如此，不超過兩個月便可將這兩本算書習得七、八成了。接著楊輝建議研讀自己的著作《詳解九章算法》第一卷，其中列有十三題與乘除相關的專門題問：

> 既識乘除起例，收買《五曹》、《應用算法》二本，依法術，日下兩三問。諸家算法，不循次第，今用二書，以便初學。且未要窮理，但要知如何發問，作如何用法答題，如何用乘除。不過兩月，而《五曹》、《應用》已算得七八分矣。《詳解算法》第一卷，有乘除立問一十三題，專說乘除用體，玩味註字，自然開曉。

為學習加、減、九歸等各種乘除捷法，分別為之安排了合適的學習時程指南。需要特別說明的是：文本中的「加法」指的是現在的乘法，有連加的意思；而「減法」為現在所說的除法，也就是有連減運算之意。首先以一日來學習乘法的捷算方法「加法」的例題及定位法則，以三日溫習「加一位」、「加二位」和「加隔位」的捷算法。接著，同樣以一日來學習除法的捷算法「減法」的例題及定位法則，並以五日的時間溫習「減法」的內容：

> 學加法起例並定位。功課一日。溫習加一位、加二位、加隔位。三日。
> 學減法起例並定位。功課一日。
> 加法乃生數也，減法乃去其數也，有加則有減。凡學減，必以加法題答考之，庶知其源。用五日溫習足矣。

在學習「九歸」方面，必須花費至少五至七日背誦四十四句口訣。但若能仔細研讀《詳解九章算法》書中「九歸題術」中的「注文」部分，可以縮短背誦時間，在一日內便可容易地記住九歸的口訣了：

> 學九歸，若記四十四句念法，非五七日不熟。今但於《詳解算法》九歸題術中細看注文，便知用意之隙，而念法用法，一日可記矣。溫習九歸題目。一日。

另對分數計算的重視：

> 治分乃用算之喉襟也，如不學，則不足以知算。而諸分並著《九章》方田，若以日習一法，不旬日而周知。更以兩月溫習，並能開釋。

開方法的技巧：

> 開方乃算法中大節目。勾股、旁要、演段、鎖積多用。例有七體：一曰開平方，二曰開（積）平圓，三曰開立方，四曰開立圓，五曰開分子方，六曰開三乘以上方，七曰帶從開方。並載少廣、勾股二章。作一日學一法，用兩月演習題目。須討論用法之源，庶久而無失念矣。

以及熟練《九章算術》中的題問，按章節的難易安排演算的時間：

> 《九章》二百四十六問，除習過乘、除、諸分、開方，自餘方田、粟米只須一日下編。衰分功在立衰。少廣全類合分。商功皆為折變。均輸取用衰分、互乘。每一章作三日演習。盈不足、方程、勾股用法頗雜，每一章作四日演習。

回到歷史的脈絡下來看，對現今而言算是容易的乘、除、開方法等基本運算，就當時所使用的計算工具及方法，都是需要花費較多精力的部分，在解題或是商業行爲上都扮演了關鍵的角色。楊輝在每一個數學課程上，都能夠悉心地爲學習者或者是爲教學者安排學習的詳細時程，實屬難能可貴。

(2) 提供學習參考書目

在這份數學教學的計畫大綱中，楊輝按照學習算法的內容，適時地爲學習者提供合宜的參考書目：《五曹算經》、《應用算法》、《指南算法》、《詳解九章算法》、《九章算法》及《議古根源》。

首先，楊輝對於「九九合數」、「乘法起例」和「除法起例」已有基礎的初學者，再給予他們進階的學習指引：

> 既識乘除起例，收買《五曹》、《應用算法》二本，依法術，日下兩三問。諸家算法，不循次第，今用二書，以便初學。且未要窮理，但要知如何發問，作如何用法答題，如何用乘除。不過兩月，而《五曹》、《應用》已算得七八分矣。《詳解算法》第一卷，有乘除立問一十三題，專說乘除用體，玩味註字，自然開曉。

在這一階段的教學目標，是能夠將乘除的運算法則應用於實際問題。楊輝提供的有《五曹算經》和《應用算法》二本適合初學者的參考書目，要求學習者應「依法術，日下兩三問」，強調《詳解算法》第一卷有「乘除立問一十三題，專說乘除用體」，可以看出楊輝除了爲學習者提供適合的書目之外，還能夠悉心地挑選書中合適的章節，力求配合學習單元的內容。

除此之外，楊輝還提到更深一層的「加法」、「減法」、「九歸」及「求一」[1]等乘除捷法的算學書目《指南算法》，他認爲《指南算法》是學習乘除運算必備的算書，豈有不知之理：

> 乘除者，本鉤深致遠之法，《指南算法》以加、減、九歸、求一旁求捷徑，學者豈容不曉宜兼而用之。

對於學習「九歸」的部分，除了「記四十四句念法」之外，還建議學習者應仔細研讀《詳解九章算法》書中「九歸題術」中的「注文」部分，如此便可以更容易記住九歸的口訣了：

> 學九歸，若記四十四句念法，非五七日不熟。今但於《詳解算法》九歸題術中細看注文，便知用意之隙，而念法用法，一日可記矣。

分數的計算也是基礎算學的重要課題，楊輝建議學習者研讀《九章算術》的方田章，不逾三月便可通曉其中的道理：

> 治分乃用算之喉襟也，如不學，則不足以知算。而諸分並著《九章》方田，若以日習一法，不旬日而周知。更以兩月溫習，並能開釋。

除了分數的運算之外，各式的開方法也常在「勾股」、「旁要」、「演段」、「鎖積」等運算、解法中被使用，因此，開方的技巧更是不可或缺的學習課題。並提到《九章算術》中

「少廣」及「勾股」兩章，對開方法有以下的說明：

> 開方乃算法中大節目。勾股、旁要、演段、鎖積多用。例有七體：一曰開平方，二曰開（積）平圓，三曰開立方，四曰開立圓，五曰開分子方，六曰開三乘以上方，七曰帶從開方。並載少廣、勾股二章。

楊輝所寫早於〈習算綱目〉的著作《詳解九章算法》的卷末中，便是依據題目的解法將《九章算術》的問題予以重新分類，特別撰述了「纂類」這一卷。因此，楊輝在此也特別指出原本《九章算術》中各個章節在內容上所需注意的重要解題技巧，再加上仔細研讀《詳解九章算法》中「纂類」這一卷的內容，便能夠通曉《九章算術》的精義：

> 《九章》二百四十六問，除習過乘、除、諸分、開方，自餘方田、粟米只須一日下編。衰分功在立衰。少廣全類合分。商功皆為折變。均輸取用衰分、互乘。每一章作三日演習。盈不足、方程、勾股用法頗雜，每一章作四日演習。更將《九章》纂類消詳，庶知用算門例，《九章》之義盡矣。

楊輝認為解二元方程式的重要讀本為劉益《議古根源》，並推崇書中所介紹的「帶從開方法」及「益隅開方法」是劉益的一大創舉：

> 劉益以勾股之術，治演段鎖方，撰《議古根源》二百問，帶從、益隅開方，實冠前古。

另一方面，楊輝也認為：「《議古根源》原無細草，但依術演算，亦不知其旨。」所以他在後來的著作《田畝比類乘除捷法》下卷，特別選引《議古根源》中的二十二題，為之「詳註圖草，以明後學」。由此可看出楊輝除了提供合適的參考書目之外，也能夠體貼地為學習者作詳註及圖解，其目地只為使學習者更能夠理解書中的真意。

在教學的過程中，教學者認知為理所當然者，有時在學生的角度看來是艱澀而難以切入的概念。楊輝能夠花費更多的時間為學生作詳註，從更多元化的面向切入主題、解釋術文，以圖解的方式與算法相互交錯運用，有時在教導高層次學習者的眼中或許是可有可無的作法，但在中等程度的學習者眼中，可能就是導引他們進入數學學習大門的一盞明燈。

在學習算法的各階段中，楊輝曾不只一次地提到《九章算術》是一本必備的數學學習參考讀物。由以下的引文便可看出楊輝視《九章算術》在算學領域中居於何等重要的地位：

> 《九章》猶儒者之《六經》，醫家之《難》、《素》，兵法之《孫子》歟。是故勉學者知《九章》矣。

同樣地，楊輝亦認為《九章算術》的內容雖然重要，但卻是初學者所難以理解的學習門檻。所以，楊輝在作〈習算綱目〉之前已著《詳解九章算法》為《黃帝九章算經細草》作了詳解。在《詳解九章算法》序文中可以得知楊輝說明自己撰寫詳解的原因：「靖康以來，古本浸失，後人補續，不得其真致，有題重法闕，使學者難入其門，好者不得其旨。」

(3)　層次分明的程序性教學

從〈習算綱目〉的全文看來，楊輝按照學習數學知識的程序，由淺入深、循序漸進地

交待欲說明的主題、學習時程及參考書目。由基礎的九九合數開始，依次爲乘、除、加、減、九歸、求一等乘除捷法的入門運算技巧，再針對分數計算給予特別指導，打穩這些基礎之後，開方法是算學中的另一個重要單元，最後必將《九章算術》246 問作全盤的理解和演算。形成一個完整數學知識體系的學習歷程。

(4) 重視基礎知識及學習細節

楊輝對於各種基本運算技巧的時程安排極爲細心，即使是最基礎的乘除法例題及定位法則也不放鬆：

> 學相乘起例並定位，功課一日。溫習乘法題目。自一位乘，至六位以上，並定位，功課五日。

> 學商除起例並定位，功課一日。溫習除法題目。自一位除，至六位除以上，並更易定位，功課半月日。

另對籌算的布列方式也有所交待：

> 諸家算法，用度不出乘、除、開方三法，起例不出如、十二字，下算不出橫、直二位。

其中的「橫」、「直」應是指籌算的縱橫排列。算書中的註文也受到楊輝的重視：

> 《詳解算法》第一卷，有乘除立問一十三題，專說乘除用體，玩味註字，自然開曉。今但於《詳解算法》九歸題術中細看注文，便知用意之隙，而念法用法，一日可記矣。

綜觀以上所言，楊輝爲算學的各個學習階段，提出了全面性且細微的書目，顯示了身爲教師的悉心其對此算學領域的專業性。〈習算綱目〉顯示了楊輝在數學課程安排上的用心程度，可以說是在學習前提供學習者一個明確的願景；對教師而言，是一份有效率的教學時程表，同時兼備了教與學的數學課程指導方針。

註解：

1. 「求一法」是使用「折半」或「加倍」的方式，將乘數或除數的首位改爲 1 的運算技巧。其目的在使得乘、除法的計算更爲便捷。

新書推介：《萬物的尺度》

北一女中　蘇俊鴻老師

書　名：《萬物的尺度：一個理想、兩個科學家、七年的測量和一個公制單位的誕生》(The Measure of All Things)
作　者：亞爾德(Ken Alder)
譯　者：張琰、林志懋
出版社：貓頭鷹出版社
規　格：單色 / 平裝 / 長 21cm*寬 15cm / 384 頁
出版日：2005-08-09
ISBN：9867415604 / EAN：9789867415608

如果請《HPM 通訊》的讀者們回想一下，是否記得當年國中數學是由什麼開始學起？應該有許多人和我一樣，都是由單位的換算開始的吧。(不小心就透露了自己的年份)或許你也和我一樣，依稀記得當時與那些單位換算奮戰的點滴與滿腹不解的疑惑：這些單位換算有什麼好記、好算的呢？沒有人提及度量衡的重要性，年幼的自己也未曾意識到。直到在閱讀《萬物的尺度》這本書時，重新讓我對於度量衡單位有了較為深刻的了解。不過，在分享閱讀的心得前，讓我們先來看兩件事實：

事實一：身為全球主要經濟體之一的美國，官方在度量衡單位的規定上仍採用英制(English Units)，是世界上少數仍未採用國際單位制(公制，Metric Units)的國家之一，其中美國人民的反對是最主要的因素。事實上，英國在一九六五年宣佈要有十年的公制過渡時間，卻直到西元二千年一月，因加入歐盟之故，正式宣佈販售物品採用公制單位。

事實二：西元一九九九年九月二十三日，火星軌道者號氣象觀測太空船進入環繞火星軌道，當太空船繞行至火星的背面後，從此接收不到任何訊號。經過調查後發現，原因可能是因為一組工程人員測量距離時以英制為單位，而另一組工程人員則採用公制為單位，在計算距離上產生錯誤，導致太空船燒燬於火星大氣層，這樣的疏失讓美國太空總署損失了一顆價值一億二千五百萬美元的人造衛星。

事實一告訴我們，國際單位制沒有我們想像中那麼地「國際」的通用。對於熟悉公制單位的你我來說，可能感到訝異，但不意外。因為我們日常生活在不同的情境中，有著各種非公制單位習以為常地進行，諸如一斤青菜、一磅咖啡豆、房子有三十坪等等。不過，卻可能沒有意識到度量衡單位的不一致，不僅是換算上的不便，導致的損失可能非常巨大，事實二正是這樣的例證。上述的事實也隱藏了下列的問題：為何美國人(或英國人)會抗拒公制的實行？亦或是我們在教育的過程中，熟悉了公制單位，但在日常的特定情境下仍然會使用非公制單位來度量？是三十坪，還是九平方公尺比較容易讓人想像它的大小呢？

也許是習慣使然，我們渾然不覺度量衡單位有何重要。它除了是一種度量的標準外，

也是人們相互溝通的基礎，更是經濟活動進行的要件之一，兩地的人們之所以可以交易，正是彼此度量單位的可以信賴及公度量之。想要回答上述的問題，可能得先從度量衡單位在人類社會所扮演的角色談起。如果從現代度量衡單位代表著測量事物的大小長短，用以決定其價值的標準意義出發，追溯各種度量單位的起源，會發現這些與生產活動習習相關的單位，都是源自人類需求與人類利益，並且有著『人體測量』的意涵。這裏的人體測量是有著多種意義的。一種是如同字面上所說，用人的身體當成測量的工具，像古埃及、巴比倫最重要的長度單位就是『腕尺』(一腕尺約爲 45.72 公分)，指的是從肘至中指尖的長。然而，有些時候，則是用來表示一個人在既定時間所能完成的勞動量。每個人的工作能力、技巧不同，所代表的工作價值(酬勞)就有所不同。同樣地，我們在裝修或粉刷房子時請師傅估量他所需的工作天數，這時他所考量不一定是依房子的大小，也會考量施工的難易程度，純然利用房間的大小來衡量就不見得符合需求。

因此，即使是當時公制單位的倡議者--法國，西元一八〇一年起，公制成爲正式度量衡制度，政府當局也印製說明單教導民眾，卻沒有改變當時人們利用舊制單位購物的習慣，反而公制單位的影響力還隨著政情逐之削減。直到西元一八四〇年，法國重新恢復使用，公制單位才算站穩腳步。

公制單位的實施，何以導致人民的激烈反彈、窒礙難行，不只是迄今的美國，或是當時的法國？箇中的因素，在本書《萬物的尺度》第五章、第十二章中，作者都提出相當深刻的觀察，值得大家一讀。

諷刺的是，促使當時公制單位制定的需求，卻是因應人們針對當時各地度量單位的混雜且分歧而阻礙知識的傳播與商業活動，所提出的陳請與要求。在法國大革命的背景下，「大革命宣告了所有人民的普世權利，大革命也應該宣告普世通用的度量單位。」(p. 20) 當時法國科學院的科學才士們 (savant，作者認爲這時的科學才士是不同於我們現稱的科學家)，提出他們認爲符合理性標準的度量衡制度，需要有以下的特點：

> (1) 自然界導出的度量標準才得以恆存；(2) 各種單位(長度、面積、容量、重量等等)應由一互通的系統精密連結；(3) 所有公制單位應依十進位法標示刻度，以及 (4) 字首術語(新的單位名稱)。(pp. 102-104)

經過一連串的折衝協調，當時負責的度量衡委員會，決定以北極到赤道距離的千萬分之一，作爲公尺的單位，並藉由對敦克爾克到巴賽隆納的這段經線的測量加以決定。

負責這項任務的是法國科學院的天文學家梅杉 (**Pierre Méchain,1744-1804**)與德朗柏 (**Jean Baptiste Joseph Delambre**, **1749-1822**) 兩人。二百年後，本書作者亞爾德重新尋訪兩人當年的足跡，翻查當年的測量紀錄。透過他『貼近』的觀察，我們得以重回公制單位誕生的那段歷史場景。在對比交替的敘事鋪陳中，讓我們體會兩人測量任務的辛苦經歷與堅持。在法國大革命的社會政治的動盪下，中央政府對兩人能夠提供的協助相當有限，各地方官員與人民對於測量工作也滿是猜測與質疑，以及天候因素的阻礙，兩人卻還是費盡千辛萬苦，耗時七年 (**1792-1799**)，完成敦克爾克經巴黎到巴賽隆納的經線弧長之測量。一項原本預計七個月就要完成工作，種種因素阻撓，卻延宕了七年之久，然則他們兩人何以能夠堅持到底呢？在那個變動的局勢下，科學才士們爲何堅持對於『不變』的度量衡標準的追求呢？這是在閱讀本書時，值得讀者們尋求與反思的答案。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至　suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文
（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹 (及人中學)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得，尤其有關海龍公式的教學心得，
懇請各位老師惠賜高見！