HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中） 陳啓文（中山女高）
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心) 傅聖國 （北市萬福國小）
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第九卷 第六期 目錄（2006年6月）

《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》跋文

台師大數學系 洪萬生教授

《算數書》於 1983 / 1984 年出土後，由中國湖北省荊州市博物館館長彭浩教授負責整理。他經過長時間的細心爬梳之後，終於在公元 2000 年 9 月，將它的釋文發表於《文物》月刊第九期。當月，筆者從中國科學院自然科學史研究所郭書春教授處獲贈此一文獻，立刻邀請七位年輕的朋友蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚與葉吉海等，共同學習校勘與解讀，並及時地將研究成果發表在《HPM 通訊》第三卷第十一期（2000 年 11 月出版，以《算數書》專輯問世）。幾乎在這同時，筆者也已經差不多另行完成了三篇論文：〈《算數書》初探〉、〈《算數書》vs.《九章算術》〉與〈《算數書》的幾則論證〉。後來，又進一步撰寫了〈關於《算數書》體例的一個備註〉。

現在，我們利用這些研究報告爲基礎，再結合中國學者如郭書春、郭世榮、鄒大海、彭浩，日本學者大川俊隆團隊，以及美國學者道本周 (Joseph Dauben) 與英國學者古克禮 (Christopher Cullen) 的研究成果，我們乃得以完成本書之撰寫。此外，劉鈍、徐義保（中國學者）、林力娜 (Karine Chemla)、馬若安 (Jean-Claude Martzloff)（法國學者) 與 Alexei Volkov（俄羅斯學者）等人，在秦漢算學史研究方面都很有建樹，也是我始終仰望的北辰。

除了有關《筭數書》文本內容之解讀之外，我們還倚重了考古學家與史學家有關秦漢墓所入葬的簡牘之研究成果（這，當然多虧了倉億在搜尋資料與文獻方面所下的基本功夫）。所有這些，特別是有關秦漢簡牘、法制史與醫學史的研究，都在我們拍照《筭數書》的『寫真集』時，提供了不可或缺的背景或脈絡。誠然，本書之寫作，主要讓『文本』(text) 得以安放（回）在它原生的『脈絡』(context) 之中，以便述說一個比較有趣的故事。不過，限於本書的『普及』體例，我們顯然不須要『言必引據』，同時，在綜合諸家論點時，也可能掛一漏萬，禮數不周在所難免，在此總請『眾家路數（線）』諒察與包容就是了。總之，筆者在間隔大約 25 年之後，還有機會以本書之寫作進路，來呼應 1980 年左右所撰寫的〈重視證明的時代－魏晉南北朝時代的科技〉，對於相關的學界貢獻，始終中心存敬意。我想本書只不過提供了一種敘事手法，將考古學家、秦漢史家以及數學史家的研究成果，編織出一個以《筭數書》爲主角的歷史圖像而已。拋磚引玉，當然有所期待於可畏的後生！

本書之撰寫，始於公元 2003 年 8 月。當時，筆者申請了一年的教授休假，希望可以寫一本書留作紀念。沒想到到了 2004 年 7 月休假期滿，雖然寫了前四章，但第 5、6 兩章離完成階段還有一大段路。後來，就與『通訊團隊』(Tongxun Group，這是道本周教授對我們團隊的暱稱）伙伴商量，請他（她）們義助一把。於是，俊鴻協助撰寫第 5 章，倉億與惠玉合作完成第 6 章。由於他（她）們都曾參與《筭數書》的校勘工作，再加上他們已有相當成熟的的數學史研究心得，因此，一路寫來相當得心應手。另一方面，由於他（她）們的出身背景比較不被某些學問的門道或常規所限制，所以，他（她）們的論述，總是可以讓我們感受年輕人筆觸下所洋溢的熱情與活力。這種分享的喜悅，絕對是我完成本書之後的最大收穫！

最後，感謝盧金城先生的推薦，以及李俊男先生的編輯協助（書名是他的建議，希望讀者喜歡)。當然，台灣商務印書館原意出版發行本書，也是我們團隊的榮幸。無論如何，我們誠懇地歡迎專家學者與讀者的批評與建議。

記蕭文強教授來訪

蕭文強教授趁訪台之便，應邀於 5 月 25 日蒞臨本系發表演講，講題爲：「數學史與數學教學的融會：『知易行難』抑或『知難行易』？」與會同仁與研究生都相當興奮，並與他進行了非常難得的學術互動。其中論及 HPM 的切入點時，蕭教授特別分享了他參觀朱銘美術館所獲得的心得。他認爲當我們試圖將數學史融入數學教學時，看似無門徑可入，然而，對於有心人而言，卻是處處可以切入。誠所謂：處處無門處處門！


數學史與
數學教學的融會
—「知易行難
「知難行易
香港大學數學系
mathsiu@hkucc.hku.hk


2. 這些並不是數學！
3. 即使我講了，怎樣考試？
4. 這不能改善學生成績！
5. 學生不喜歡數學史！
6. 學生認為那是歷史，他們討
7. 學生覺得數學史和數學一樣沉
8. 學生缺乏普遍文化知識，難以
數學史！
9. 數學發展是要把五花八門的
統處理的例行操作，為何回到
沌呢？
10. 很缺乏數學史的教學材料！
11. 很缺乏數學史的教師培訓！
12. 我不是數學史專家，怎樣判斷
料是否可靠的？
13. 真正歷史發展過程往往迂迴曲折
着去敘述不只說不清楚，反而
亂！
14. 閱讀原典十分困難，真的有助嗎？
15. 會不會引發"文化沙文主義"和

中點弦

成功高中游經祥、劉國莉老師

壹、前言

高二數學教材中有『中點弦』之單元。本文作者之一劉國莉講解相關例題：

設點 $P(2,1)$ 為橢圓 $\Gamma: x^2+4y^2=16$ 內的一點，一直線過點 P 且交橢圓 Γ 於兩點 A, B，若點 P 為線段 $\overline{AB}$ 的中點，求直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式。

有一位學生提出補教界的解題秘方如下：

以點 $P(2,1)$ 代入橢圓的切線方程式 $x_0x+4y_0y=k \Rightarrow 2x+4y=k$，點 $P(2,1)$ 在此直線上 $\Rightarrow k=2\times2+4\times1=8$，得直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為 $2\cdot x+4\cdot1\cdot y=8 \quad \Rightarrow x+2y=4$。

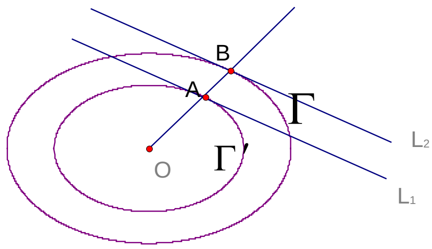
然而，該學生不知其解題的道理爲何？於是，劉國莉下課後，遂與另一作者游經祥老師討論，最後，我們歸納下列應相互連結的教學單元，希望可以提供解題的所以然之故：

1. 定義相似橢圓。
2. 相似橢圓上切線的幾何關係及證明。
3. 相似橢圓上切點弦的平分關係及證明。
4. 橢圓中平行弦中點共線性質及此直線之方程式公式。
5. 切線公式在橢圓中的幾何意義及證明，作爲切線公式在圓中的性質的推廣。
6. 實例應用。

貳、相似橢圓

我們定義：兩橢圓 Γ ：$b^2x^2+a^2y^2=l$ 與 Γ' ：$b^2x^2+a^2y^2=k,\ k>0, l>0$，爲相似橢圓。

其理由如下：如右圖（一），設兩橢圓



圖（一）

$$\begin{cases}\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=l\\ \Gamma': b^2x^2+a^2y^2=k\end{cases}, k>0, l>0$$

，中心點爲 $O(0,0)$，點 $B(x,y)$ 在橢圓 Γ 上，點 $A(x',y')$ 在橢圓 Γ' 上。設 $\overrightarrow{OA}=r\overrightarrow{OB}$，即

$x'=rx$，$y'=ry$，代入方程式 $b^2x'^2+a^2y'^2=k,$，得 $b^2r^2x^2+a^2r^2y^2=k \Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=\dfrac{k}{r^2}$ 與 $\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=l$ 比較常數，得 $\dfrac{k}{r^2}=l \Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}$。因此，$\overrightarrow{OA}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}\overrightarrow{OB}$，即 $x'=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}x$，$y'=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}y$。

當兩共中心的橢圓 $\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=l$，$\Gamma': b^2x^2+a^2y^2=k\ (l,k>0)$ 的圖形關係是 Γ 與 Γ'

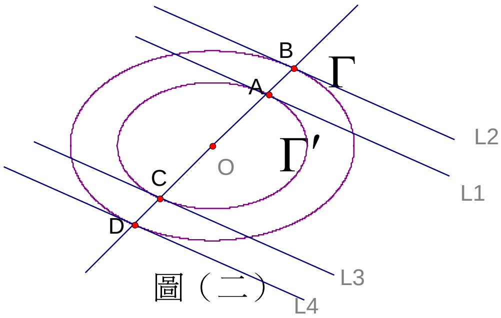
可以互相伸縮而得到重合者，我們就定義Γ與Γ'為*相似橢圓*，且Γ伸縮到Γ'的伸縮倍數為$\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}$。

參、相似橢圓的切線關係

觀察過中心的直線與兩相似橢圓Γ、Γ'的四個交點，而過此四點分別作Γ與Γ'之切線將會平行。我們寫成定理 1 如下：

定理 1：如圖（二），設Γ、Γ'為兩相似橢圓，過中心點 O 的任意直線 L 交Γ、Γ'於 B、D、A、C，且分別作Γ與Γ'的切線L_1、L_2、L_3、L_4，則$L_1 // L_2 // L_3 // L_4$。

證明：如圖（二），設兩相似橢圓$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=l$，$\Gamma': b^2x^2+a^2y^2=k\ (l,k>0)$，點 B 坐標為$(x_0,y_0)$，則過點 B 的切線方程式$L_2$：$b^2x_0x+a^2y_0y=l$。因$\overrightarrow{OA}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}\overrightarrow{OB}$，點 A 坐標為$\left(\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}x_0,\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}y_0\right)$，則過點 A 的切線方程式$L_1$：



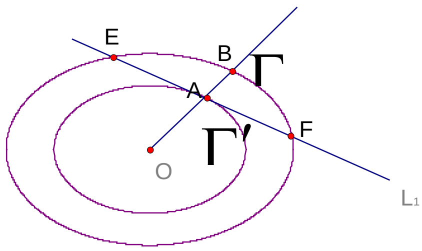
圖（二）

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}b^2x_0x+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}a^2y_0y=k \Rightarrow b^2x_0x+a^2y_0y=\sqrt{kl}$$，得證$L_1 // L_2$。同理，利用$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}}\overrightarrow{OB}$，可分別推得$L_2 // L_4$，$L_3 // L_2$。因此，$L_1 // L_2 // L_3 // L_4$得證。

肆、相似橢圓的切點弦關係

觀察參中之圖（二），設過橢圓Γ'上的一點 A 的切線交橢圓Γ於兩點 E、F，猜測點 A 為線段$\overline{EF}$之中點。我們寫成定理 2 如下：

定理 2：如右圖（三），Γ和Γ'為兩相似橢圓，設直線L_1為過橢圓Γ'上點 A 的切線，且L_1交橢圓Γ於兩點 E、F，則點 A 為弦$\overline{EF}$的中點。反之，若$\overline{EF}$為橢圓Γ的弦，且點 A 為弦$\overline{EF}$的中點，則存在一相似橢圓Γ'，使直線$\overleftrightarrow{EF}$為過橢圓Γ'上點 A 的切線。



圖（三）

證明：設橢圓$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=l$，$\Gamma': b^2x^2+a^2y^2=k\ (l,k>0)$，點$A(x_0,y_0)$在橢圓$\Gamma'$上，則直線$L_1$的方程式為$b^2x_0x+a^2y_0y=k$，若$y_0\neq 0$，利用$y=\dfrac{k-b^2x_0x}{a^2y_0}$，代入$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=l$

$$\Rightarrow b^2x^2+a^2\left(\frac{k-b^2x_0x}{a^2y_0}\right)^2=l\quad\Rightarrow a^4b^2x^2{y_0}^2+a^2\left(k-b^2x_0x\right)^2=la^4{y_0}^2$$

$$\Rightarrow a^2b^2\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)x^2-2ka^2b^2x_0x+a^2k^2=la^4{y_0}^2$$ --------------------(1)式

設點 E 和點 F 坐標分別 $E\left(x_1,y_1\right)$ 、 $F\left(x_2,y_2\right)$ ，則式(1)的兩根爲 x_1,x_2 ，由根與係數的關係可知 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2ka^2b^2x_0}{2a^2b^2\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)}=\dfrac{kx_0}{k}=x_0$ ， $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k-b^2x_0x_1}{a^2y_0}+\dfrac{k-b^2x_0x_2}{a^2y_0}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2k}{a^2y_0}-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x_1+x_2\right)\right)=\dfrac{k}{a^2y_0}-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{k}{a^2y_0}-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}x_0=\dfrac{a^2{y_0}^2}{a^2y_0}=y_0$ 。因此，點 A 恰爲線段 $\overline{EF}$ 的中點。若 $y_0=0$，直線 $L:b^2x_0x=k$ 爲一鉛直線，設 L 和橢圓 Γ 的交點爲 E、F，則易得知點 A 爲線段 $\overline{EF}$ 的中點。

另一方面，設橢圓 $\Gamma:b^2x^2+a^2y^2=l$ 上兩點 $E\left(x_1,y_1\right)$ 、 $F\left(x_2,y_2\right)$ ， $\overline{EF}$ 的中點 A 爲 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，則點 A 在相似橢圓 Γ' ： $b^2x^2+a^2y^2=b^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+a^2\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2$ 上。可知過點 A 的切線 L 方程式爲 $b^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)x+a^2\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)y=b^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+a^2\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2$ ，切線 L 的法向量 $\vec{n}=\left(b^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),a^2\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\right)$ ，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{FE}=\left(b^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),a^2\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\right)\cdot\left(x_1-x_2,y_1-y_2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left[b^2\left({x_1}^2-{x_2}^2\right)+a^2\left({y_1}^2-{y_2}^2\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left[b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2-\left(b^2{x_2}^2+a^2{y_2}^2\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(l-l\right)=0$ 。因此，可知切線 L 與直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行（或重合），又切線 L 與直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 同時包含點 A，故直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 與切線 L 重合。因此，若線段 $\overline{EF}$ 爲橢圓 Γ 上的弦，且點 A 爲弦 $\overline{EF}$ 中點，則存在一相似橢圓 Γ' ，使直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 爲過橢圓 Γ' 上點 A 的切線。

伍、橢圓中平行弦的中點性質探討

在橢圓上畫一組平行弦，觀察其各弦之中點該是共線，而且過中心。我們寫成定理 3 如下：

定理 3：橢圓上任意一組平行弦的中點共線，且此直線會通過橢圓中心。設橢圓 $\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，平行弦之斜率為 m，則所有斜率為 m 之平行弦的中點連線方程式為 $x=\frac{-a^2my}{b^2}$。（若為鉛直的平行弦中點連線，則恰為橢圓的對稱軸 $y=0$；若為水平的平行弦中點連線，則恰為橢圓的對稱軸 $x=0$。）

證明：設平行弦之方程式為 $y=mx+k$，$-\sqrt{a^2m^2+b^2}\le k\le\sqrt{a^2m^2+b^2}$。將 $y=mx+k$ 代入

$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，得 $b^2x^2+a^2(mx+k)^2=a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mkx+a^2k^2-a^2b^2=0$。

再設此 x 的二次方程式的兩根為 x_1，x_2，則 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2}$，

$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{mx_1+k+mx_2+k}{2}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)m+k=-\frac{a^2m^2k}{a^2m^2+b^2}+k$。因此

$\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2} \\ y=\left(1-\frac{a^2m^2}{a^2m^2+b^2}\right)k=\frac{b^2}{a^2m^2+b^2}k \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{-ma^2}{b^2}$。因此，所有斜率為 m 之平行弦的中點連線方程式為 $x=\frac{-a^2my}{b^2}$。

陸、橢圓切線公式的幾何探討

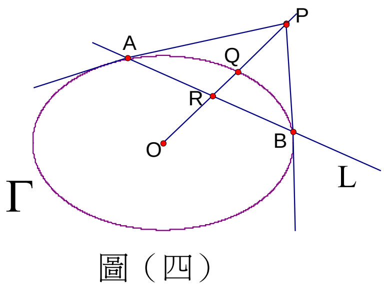
在《HPM 通訊》第九卷第二、三期合刊第五版中，我們曾經發表一篇〈點與圓、球的關係〉，以下定理是延續該篇的性質，將圓的性質推廣到橢圓，並且可以用在中點弦的計算上；我們寫成定理 4 如下：

定理 4：設橢圓 $\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，點 $P(x_0,y_0)$（其中 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$），直線 $L: b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$，則

(1) 當點 P 在橢圓 Γ 上時，直線 L 為過點 P 且與橢圓 Γ 相切的切線方程式。

(2) 如右圖（四），當點 P(x_0,y_0) 在橢圓 Γ 外時，

(a) 自點 P 作橢圓 Γ 的切線，得兩切點 A、B，則直線 L 為過切點 A、 B 的直線方程式。



圖（四）

(b) 設$\overline{OP}$和橢圓Γ、直線 L 分別交於點 Q、R，則$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$。

(c) 若線段$\overline{OP}$與橢圓Γ相交於點 Q，且在線段$\overline{OP}$上取一點 R，使$P-Q-R$，且

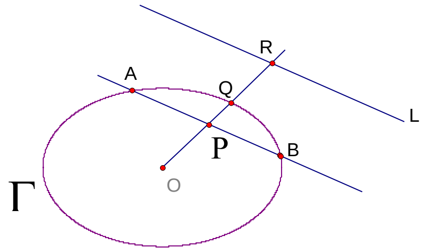
$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$，則直線 L 恰爲以點 R 爲中點的弦所在的直線方程式。

(3) 如右圖（五），當點 P 在橢圓Γ內時，

(a) 直線 L 爲一和橢圓不相交且平行以點 P 爲中點弦的直線方程式。

(b) 設射線$\overrightarrow{OP}$和橢圓Γ、直線 L 分別交於點 Q、R，則

$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$。



圖（五）

(c) 若射線$\overrightarrow{OP}$與橢圓Γ交於點 Q，且在射線$\overrightarrow{OP}$上取一點 R，使$P-Q-R$，且$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$，則以點 P 爲中點弦所在之直線，即爲自點 R 作橢圓Γ切線的兩切點的連線。

證明：

(1) 直線 L 恰好爲過橢圓上的點的切線公式，證明略去。

(2)(a)當點 P(x_0,y_0)在橢圓Γ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$外（$\therefore b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2>a^2b^2$）如圖（四），自點 P 作橢圓$\Gamma$的切線$\overleftrightarrow{PA}$和$\overleftrightarrow{PB}$，設切點爲$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，則過切點$A(x_1,y_1)$的切線方程式爲$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$，因點 P$(x_0,y_0)$在此切線上，可得

$b^2x_1x_0+a^2y_1y_0=a^2b^2$--------(1)。

同理，過切點$B(x_2,y_2)$的切線方程式爲$b^2x_2x+a^2y_2y=a^2b^2$，因點 P(x_0,y_0)在此切線上，可得$b^2x_2x_0+a^2y_2y_0=a^2b^2$---------(2)。由(1)式和(2)式可知：點$A(x_1,y_1)$和點$B(x_2,y_2)$在直線$L:b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$上，即直線 L 爲過兩切點 A、B 的直線方程式。

(b)設$\overline{OP}$與橢圓Γ、直線 L 分別交於點 Q、R，且$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OP}=(tx_0,ty_0)$，點 Q 在橢圓

$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上$\Rightarrow b^2t^2{x_0}^2+a^2t^2{y_0}^2=a^2b^2 \quad \Rightarrow t^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}<1$。(因

$b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2>a^2b^2$)

設$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}=(sx_0,sy_0)$，又點 R 在直線 L 上$\Rightarrow b^2s{x_0}^2+a^2s{y_0}^2=a^2b^2$

$\Rightarrow s=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}<1$。因此，可得

$\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OR}\right|=s\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}\left({x_0}^2+{y_0}^2\right)=t^2\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2$。

(c)若線段$\overline{OP}$與橢圓Γ相交於 Q，且在線段$\overline{OP}$上取一點R，使$P-Q-R$，且

$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$。假設$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OP}=\left(tx_0,ty_0\right)$，$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}=\left(sx_0,sy_0\right)$，利用$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$，

可推得$t^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}=s$。由（a）部份可知，自點 P 作橢圓$\Gamma$的切線，得切點$A\left(x_1,y_1\right)$、

$B\left(x_2,y_2\right)$，直線$L: b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$爲過切點 A、 B 的直線方程式。將點 R$\left(sx_0,sy_0\right)$（其

中$s=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}$）代入直線$L: b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$的方程式，得

$b^2s{x_0}^2+a^2s{y_0}^2=s\left(b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2\right)=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}\left(b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2\right)=a^2b^2$。因此，點 R 在直線 L 上。

切點$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$同時在橢圓$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$及直線$L: b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$上。

若當$y_0\neq 0$，利用$y=\dfrac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0}$代入$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，得

$$b^2x^2+a^2\left(\frac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0}\right)^2=a^2b^2\Rightarrow a^4b^2{y_0}^2x^2+a^2\left(a^2b^2-b^2x_0x\right)^2=a^6b^2{y_0}^2$$

$\Rightarrow a^2b^2\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)x^2-2a^4b^4x_0x+a^6b^4=a^6b^2{y_0}^2$。 因$x_1,x_2$爲此方程式的兩根，由根與係數的關係可知 A、B 中點的 x 坐標爲$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2a^4b^4x_0}{2a^2b^2\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)}=\dfrac{a^2b^2}{a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2}x_0=sx_0$，

恰爲點 R 的 x 坐標。A、B 中點的 y 坐標爲

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{y_0}-\frac{b^2x_0x_1}{a^2y_0}+\frac{b^2}{y_0}-\frac{b^2x_0x_2}{a^2y_0}\right)=\frac{b^2}{y_0}-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{b^2}{y_0}-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}sx_0$$

$=\dfrac{b^2}{y_0}-\dfrac{b^2{x_0}^2}{a^2y_0}\left(\dfrac{a^2b^2}{a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2}\right)=\dfrac{b^2}{y_0}\dfrac{a^2{y_0}^2}{a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2}=sy_0$。因此，點 R 的 y 坐標亦爲 A、B 中點的 y 坐標。因此，點 R 恰爲兩切點 A、B 的中點，也就是直線 L 恰爲以點 R 爲中點的弦所在的直線方程式。

另一方面，若當 $y_0=0,$ 則 $x_0\neq 0$，點 $P(x_0,0)$，點 $\mathrm{R}(sx_0,0)=\left(\dfrac{a^2}{x_0},0\right)$

（$\because s=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}=\dfrac{a^2}{{x_0}^2}$），直線 $L:b^2x_0x=a^2b^2\Rightarrow x=\dfrac{a^2}{x_0}$ 與橢圓 $\Gamma:b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的交點 A、B 爲 $\left(\dfrac{a^2}{x_0},\pm b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{{x_0}^2}}\right)$，可得 A、B 的中點恰爲點 R。因此，直線 L 恰爲以點 R 爲中點的弦所在的直線方程式。

(3)(a)當點 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 在橢圓 Γ：$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 內（$\therefore b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2<a^2b^2$），如圖（五）。設 $\overline{AB}$ 爲以點 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 爲中點的弦，其中：點 $A(x_1,y_1)$ 和點 $B(x_2,y_2)$ 在橢圓 Γ：$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上。因此，$b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2=a^2b^2$ --------(1)，$b^2{x_2}^2+a^2{y_2}^2=a^2b^2$ --------(2)，(1)式減(2)式得

$b^2({x_1}^2-{x_2}^2)+a^2({y_1}^2-{y_2}^2)=0\Rightarrow b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$ --------(3)，因 $\overline{AB}$ 爲以點 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 爲中點的弦，得 $x_1+x_2=2x_0, y_1+y_2=2y_0$ 代入(3)式，可得

$b^2(2x_0)(x_1-x_2)+a^2(2y_0)(y_1-y_2)=0$。

若 $y_0\neq 0$，線段 $\overline{AB}$ 的斜率 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 和直線 $L:b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$ 的斜率相同，故直線 L 爲一平行以點 P 爲中點的弦的直線。

考慮橢圓 $\Gamma:b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 及直線 $L:b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$ 的聯立方程，利用

$y=\dfrac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0}$代入$\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$　，得$b^2x^2+a^2\left(\dfrac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0}\right)^2=a^2b^2$

$\Rightarrow a^4b^2{y_0}^2x^2+a^2\left(a^2b^2-b^2x_0x\right)^2=a^6b^2{y_0}^2$

$\Rightarrow a^2b^2\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)x^2-2a^4b^4x_0x+a^6b^4=a^6b^2{y_0}^2$。

此方程式的判別式爲

$4a^4b^4{x_0}^2-4\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)\left(a^4\right)\left(b^2-{y_0}^2\right)=4a^4\left[b^4{x_0}^2-\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2\right)\left(b^2-{y_0}^2\right)\right]$

$=4a^4{y_0}^2\left(a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2-a^2b^2\right)<0$（$\because b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2<a^2b^2$，$y_0\neq 0$）。因此，若$y_0\neq 0$，直線 L 爲一和橢圓不相交且平行以點 P 爲中點的弦的直線方程式。

若$y_0=0$（則$x_0\neq 0$），$\overline{AB}$爲以點$\mathrm{P}(x_0,0)$爲中點的弦，由(3)式可知直線$\overleftrightarrow{AB}$爲通過點 P 的鉛直線。直線$L: x_0x=a^2\Rightarrow x=\dfrac{a^2}{x_0}$，與橢圓中心$O(0,0)$的距離爲$\left|\dfrac{a^2}{x_0}\right|>a$（$\because 0<|x_0|<a$）。所以，此時直線 L 爲一與橢圓$\Gamma$不相交且平行以點 P 爲中點弦的直線方程式。

(b)與 2(b)證法相同，故省略。

(c)若射線$\overrightarrow{OP}$與橢圓Γ交於點 Q，假設$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OP}=\left(tx_0,ty_0\right)$，則$t^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}>1$。在射線$\overrightarrow{OP}$上另取一點 R，使$P-Q-R$，設$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}=\left(sx_0,sy_0\right)$，且點 R 滿足$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$（$\therefore \overline{OR}=\dfrac{\overline{OQ}^2}{\overline{OP}}=\dfrac{t^2\overline{OP}^2}{\overline{OP}}=t^2\overline{OP}=s\overline{OP}\Rightarrow s=t^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}$）。因點$\mathrm{P}(x_0,y_0)$在橢圓$\Gamma$：$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$內，所以點$\mathrm{R}\left(sx_0,sy_0\right)$在橢圓外。

由(2)(a)中可知：自點$\mathrm{R}\left(sx_0,sy_0\right)$作橢圓$\Gamma$切線的兩切點的連線（設爲$L'$）方程式爲$b^2sx_0x+a^2sy_0y=a^2b^2$。設線段$\overline{AB}$爲以點$\mathrm{P}(x_0,y_0)$爲中點的弦，其中$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，由(a)部分的證明可得直線$\overleftrightarrow{AB}$的斜率$m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，直線$L'$的斜率

$m=\dfrac{-b^2sx_0}{a^2sy_0}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，可知直線$\overleftrightarrow{AB}$與直線$L'$平行或重合（若$y_0=0$，則易看出兩者皆鉛直線）。直線$L'$的方程式爲$b^2sx_0x+a^2sy_0y=a^2b^2$（其中$s=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}$）。將點$\mathrm{P}(x_0,y_0)$代入得$b^2sx_0x_0+a^2sy_0y_0=s\left(b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2\right)=\dfrac{a^2b^2}{b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2}\cdot\left(b^2{x_0}^2+a^2{y_0}^2\right)=a^2b^2$，故點 P 在直線$L'$上。因此，直線$L'$和直線$\overleftrightarrow{AB}$皆過點 P，故直線$L'$即爲以點 R 爲中點弦所在的直線。

柒、實例應用

根據以上的結果，我們重新回到前言中所提到的問題，逐一以不同的方法解題，一併展現這些定理的美妙應用。

設點$P(2,1)$爲橢圓$\Gamma: x^2+4y^2=16$內的一點，一直線過點 P 且交橢圓Γ於兩點 A,B，若點 P 爲線段$\overline{AB}$的中點，求直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式。

解法 (1)：設過$\overleftrightarrow{AB}$的直線方程式爲$y=mx+k$（先驗證$\overleftrightarrow{AB}$不爲鉛直線），代入$\Gamma: x^2+4y^2=16$，得$x^2+4(mx+k)^2=16\Rightarrow\left(1+4m^2\right)x^2+8mkx+4k^2-16=0$。再設點$\mathrm{A}(x_1,y_1)$，點$\mathrm{B}(x_2,y_2)$，已知$P(2,1)$爲$\overline{AB}$的中點$\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{1+4m^2}=4$，

$y_1+y_2=m(x_1+x_2)+2k=4m+2k=2$，將兩式聯立

$$\begin{cases}\dfrac{-8mk}{1+4m^2}=4\\4m+2k=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+4m^2=-2mk\\2m+k=1\end{cases}\Rightarrow 1+4m^2=-2m(1-2m)\Rightarrow 1+4m^2=4m^2-2m\Rightarrow m=-\frac{1}{2},$$

$k=1-2m=2$。因此，直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式爲$x+2y=4$。

解法 (2)：設點$\mathrm{A}(x_1,y_1)$，點$\mathrm{B}(x_2,y_2)$，A、B 在橢圓Γ上$\Rightarrow {x_1}^2+4{y_1}^2=16$，${x_2}^2+4{y_2}^2=16$，將兩式相減得

$({x_1}^2-{x_2}^2)+4({y_1}^2-{y_2}^2)=0\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，又點 P 爲$\overline{AB}$的中點，得$x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=2$。因此，上式可化爲$(x_1-x_2)\cdot4+4(y_1-y_2)\cdot2=0\Rightarrow$直線$\overleftrightarrow{AB}$的

斜率$m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{2}$。可得直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式為$\dfrac{y-1}{x-2}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow x+2y=4$。

解法 (3)：根據定理 2，點$P(2,1)$為橢圓$\Gamma: x^2+4y^2=16$內一點，則存在一相似橢圓$\Gamma': x^2+4y^2=k$，使的點 P 在相似橢圓Γ'上，且直線$\overleftrightarrow{AB}$即為過點 P 的切線方程式。因$P(2,1)$在橢圓$\Gamma': x^2+4y^2=k$上，得$k=2^2+4\cdot1^2=8$。故橢圓$\Gamma': x^2+4y^2=8$，且直線$\overleftrightarrow{AB}$即為過點$P(2,1)$的切線方程式$2\cdot x+4\cdot1\cdot y=8\Rightarrow x+2y=4$。此即為補教秘方的作法；因此，定理 2 就是該學生所須"知其所以然"的道理所在。

解法 (4)：根據定理 4，設射線$\overrightarrow{OP}$交橢圓Γ於 Q，再設$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OP}=(2s,s)$，點 Q 在橢圓$\Gamma: x^2+4y^2=16$上$\Rightarrow 4s^2+4s^2=16\Rightarrow s=\sqrt{2}$。在射線$\overrightarrow{OQ}$上找一點 R，使$\overline{OP}\times\overline{OR}=\overline{OQ}^2$ $\Rightarrow \overrightarrow{OR}=s^2\overrightarrow{OP}=2(2,1)=(4,2)$。根據定理 4(3)(c)，可得直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式為以點 R(4,2)代入定理 4 中之直線 L 方程式，即得$4\cdot x+4\cdot2\cdot y=16\Rightarrow x+2y=4$。

捌、結論

在本文中，我們主要以高中生較易理解的方法提出論述。當然，中點弦還是可以引用隱函數微分的方法來處理，但那是高中生較難理解的工具，我們不打算推薦。其實，本文的方法，多少可以呼應 Richard Skemp 有關學習系統的觀點。在他的《數學學習心理學》(1995) 中，Skemp 曾提到學習心理學中的理論系統，可分為視覺系統與言辭系統。其中，言辭系統不只包含口中發出的聲音，還包含寫在紙上或黑板上的字。而視覺系統最好的例子，則是畫圖形、動畫、影像。若能結合此兩種系統，將會使學生對數學學習產生意想不到的興趣，更能加強學生的深刻印象。

在本文所提供的定理中，我們先畫出圖形結構給學生『感覺』，真的可能會有如此的結果。接著，再進一步說明如何證明由圖形得到的『感覺』，最後再完成證明過程。難怪諾貝爾獎得主 Bragg 在八十歲生日時說：「我自己總是對事物先有視覺上的影像，然後才產生新靈感。」這些定理我們在課堂上都已經講解過，大多數學生皆能得到深刻的體會。學生在市面上的多元學習，常會遇見『知其然而不知其所以然』的情形，這是數學學習上的重大不足。現在，藉此一問，能為學生釐清一些疑惑，且以淺白方式，提出有助於引導學生解題方法與思考方向的策略，這是我們在數學教學上應該努力強化的工作。

π 案叫絕論劉徽

台師大數學系四年級 林德政、王懷智

一. 前言

中國數學史上有許多優秀的數學家，其中最令人稱道的，當推西元三世紀的劉徽。劉徽注解《九章算術》，在一般人認爲以實用爲主的中國社會裡，對於許多已知的數學公式給予理論的証明。譬如，他提出圓面積公式的証明，並因此發展出了求圓周率的方法。因此，少了劉徽的注解部份，《九章算術》或許將顯得微不足道。

劉徽當然不是求圓周率的第一人，其後也有許多人求得比他更精確的圓周率近似值，然而，劉徽所提出的方法，卻讓中國數學進入一個新的階段，也讓後代的人在求圓周率時有更好的依靠。因此，在本文中，我們希望探討劉徽注解《九章算術》的目的及其背後意函，從而對『割圓術』更進一步闡述，並說明它對於後世數學家造成的影響。

二. 劉徽與九章算術

《九章算術》於東漢成書，內容是有關當時官員所需要的計算知識。在重視實用知識的中國，劉徽的作法無疑是跨越了一道鴻溝，把中國的數學知識，推到了理論發展的階段。或許因爲劉徽研讀《九章算術》時，獲得了深刻的體驗：『觀陰陽之割裂，總算數之根源，探賾之暇，遂悟其意。」同時，「算在六藝，古者以賓興賢能，教習國子。雖曰九數，其能窮纖入微，探測無方。至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共，非特難為也。」可惜，『當今好之者寡，故世雖多通才達學，而未必能綜於此耳。』在劉徽眼裡，《九章算術》是極爲重要的學問，然而，他當時身處三國亂世，時人對於算學並不重視，因此，激起他爲《九章算術》作注解的想法。

探討劉徽的割圓術，要先知道他如何確信圓周率是一個常數。原來，《九章算術》（作者不詳）已經提供了圓面積的計算公式，也可以知道中國人相信『周三徑一』這個事實由來已久。在劉徽之前，劉歆、張衡等人都做過圓周率的研究，也因此劉徽確定知道圓周率是一個定值是不容置疑的，他也知道圓周率取三是爲了計算上的方便。劉徽既然希望透過「析理以辭，解體用圖」的方法，來爲《九章算術》做注解，那麼，圓周率的更加精密求法，也就成了他無法避免的問題。

三.『以圓出方』及割圓術

在《九章算術》的『圓田術』中，出現了四個圓面積公式，分別是：1. 半周半徑相乘得積步；2. 周徑相乘四而一；3. 徑自乘，三之，四而一；4. 周自相乘，十二而一。趙爽及劉徽也都在《九章算術》看到了「圓出於方」以及「周三徑一」這些事實。然而，趙爽只是對圓出於方做一個形式上的演示，並且接受圓周率爲三這個事實。而劉徽注解《九章算術》，則說明圓面積公式，成了注解『圓田術』第一步。事實上，劉徽利用了所謂的『割圓術』，證明圓面積公式爲「半周乘半徑」，也發現了『周三徑一』是不夠精密的：「若夫觚之細者，與原合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。以一面乘半徑，觚而裁

之，每輒自倍。故以半周乘半徑而為圓冪。此以周徑，謂至然之數，非周三徑一之率也。周三者從其六觚之環耳。」

劉徽爲圓面積的算法及圓周率求法做了完美的注解，也在中國數學史上寫下美麗的篇章。他的割圓術，也隱含了「無限」的概念：「割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓合體無所失矣。」將劉徽的註解與歐幾里得、阿基米德的圓面積證明做比較，可以看到非常相似的方法。只是歐幾里得跟阿基米德都不敢走到『無限』這一步，這與東西方的數學發展過程有極大的關係。Zeno 的悖論使得西方數學家一直不敢碰觸無限這一個觀念，也使得歐幾里得、阿基米德的圓面積公式無法走到最後一步。然而，在中國的戰國時期末年，名家公孫龍就曾提出這樣一個有趣的命題：「一尺之棰，日取其半，萬世不竭」，可以看出無限的概念，其實是被中國人所接受的。

至於劉徽如何割圓呢？他從圓內接正六邊形出發，割六邊形爲十二邊形，以至於二十四邊形、四十八邊形、九十六邊形最後做到一百九十二邊形，劉徽用了極大的篇幅在介紹割圓的方法，可見，他對於割圓術的重視(也或許對於自己創見的自得)。對於劉徽說明割圓術的過程，因篇幅過多這裡就不多作介紹了。不過，劉徽的割圓術中用到的數學知識倒是可以討論的。

劉徽的割圓術運用了四個個重要的數學方法：

・圓內正六邊形每邊長與半徑相等；

・箏形的面積爲兩對角線相乘積之半；

・商高定理；

・設 S_n ，S_{2n} 爲圓內接正 n 邊形及正 2n 邊形之面積，S 爲圓面積，則 $S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$。

圓內接正六邊型邊長與半徑相等，是劉徽做出六觚之冪的先決條件，也是劉徽割圓術的開端。至於劉徽如何知道這件事實，在他的注解裡並沒有請楚的寫出。割六觚以爲十二觚，「以六觚之一面乘半徑，因而三之，得十二觚之冪。」即是運用箏形面積爲對角線乘積之半，將圓內接正十二邊形式爲六個箏形，則得出圓內接正十二邊形之面積。接著利用商高定理求出正十二邊形的邊長，由此再運用前一方法求出二十四觚之冪，最後求出一百九十二觚之冪。然而其中最令人驚艷的，是劉徽由圓內接正一百九十二邊形及圓內接九十六邊形面，找出圓面積的範圍：

> 得冪三百一十四寸、六百二十五分寸之六十四，及一百九十二觚之冪也。以九十六觚之冪減之，於六百二十五分寸之一百五，謂之差冪。倍之，為分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田九十六所，謂以弦乘矢之凡冪也。加此冪於九十六觚之冪，得三百一十四寸、六百二十五分寸之一百九十六，則出於圓之表矣。

劉徽用此方法求出圓面積介於 3.141024 與 3.142704 之間，如此相較於阿基米德用圓內接正多邊形與圓外切正多邊形去逼近圓面積，顯得更加簡單了。

四. 劉徽、祖沖之、趙友欽

要想談論這三位數學家，就必須讓我們回溯到被認定成書於東漢的《九章算術》。現在，就讓我們再討論一下劉徽注解《九章算術》的背後意涵！劉徽被認定爲第三世紀中國

最偉大的數學家，究其原因之一，無疑是他對圓周率近似值的追求，以及在注解《九章算術》時，提出『半周半徑相乘得積步』這個命題的獨到註解：『案：半周為從，半徑為廣，故廣從相乘得積步也』。而給這個註解強而有力的後盾者，即爲令後世爲之瘋狂的『割圓術』！

倘若我們忽略《九章算術》中註解的部分，那整本書籍在某種程度上，就跟現今因爲考試制度所誕生的公式本一樣，毫無一點生命力可言。這樣的書，怎麼會值得劉徽這樣聰明的人去爲它作注呢？其實，當我們仔細思考九章的成書過程，它孕於秦、西漢而成書於東漢，有不少專家認爲就是《九章算術》產生的重要背景之一，便是帝國統一的外在環境需要吧！的確，若我們仔細思量九章的內容，會發現裡面果真有許多章節是爲了實用性的目的，諸如均輸、方田等等。再者，以當時的學習情況來看，九章乃爲官者必讀之書，何以爲官者必讀九章？爲官者須有德性，以及能明辨是非、管理的知識，不過，《九章算術》與德性無關，由此可之，《九章算術》乃爲了帝國統一的外在環境需要而產生。

回到我們的問題，劉徽究竟爲何替《九章算術》作注？筆者認爲乃是基於學者對嚴整理論的內在欲望，即純粹爲了『作學問而作學問』，非關其他因素。試想，在一般史家所認爲以實用導向的中國數學傳統中，劉徽爲何要去證明一個類似像圭田這種至少已經有150 年歷史，學者們深信不移的『半廣以乘正縱』這個鐵則呢？既然計算上完全不會有誤差，那何需證明！無論如何，答案全指向一個理念：爲學術而學術！這種想法不難從他的注序中窺之一二：

> 徽幼習九章，長再詳覽。觀陰陽之割裂，總算術之根源，探賾之暇，遂悟其意。是以敢竭頑魯，采其所見，為之作注。事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本榦知，發其一端而已。又所析理以辭，解體用圖，庶亦約而能周，通而不黷，覽之者思過半矣。

而從注解中也可略知一二：『然世傳此法，莫肯精覈；學者踵古，習其謬失。不有明據，辯之斯難』。或有人認爲也許注書是爲了升官，但對劉徽來說，這應該不是他的主要目的。依照歷史記載，我們知道劉徽的官位應該不大，因爲史冊中記載劉徽的只有一行字，可想而知他並非大官。再者，若欲升官，那應該不是注解像《九章算術》這一類的書，而應該像祖沖之，制定曆律，這種影響整個國家的曆法，或是注解經史子集才說得通。由上文可知，劉徽的動機應是發至內心對學問的探索。相較於祖沖之，劉徽顯得更像學者，但祖沖之卻將圓周率的推算帶到另一個境界！

祖沖之一直是個家喻戶曉的名字，這當然與他顯赫的成就有關係。在數學史上，沒人可以忽略他將圓周率的值精準地算到小數點後六位這件事。由於祖沖之所寫的《綴術》已經失傳，所以，我們無法一窺他怎麼求出『祖率』，但就《隋書・律曆志》中有些許的線索：

> 宋末南徐州從史祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周數盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五，約率：圓徑七，周二十二。

我們不難發現，他也是利用逼近的方式，去求圓周率的近似值，故雖然祖沖之批評劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗等人的新率『未臻折衷』，但筆者卻不認爲祖沖之曾經使用了較好的方式。因此，筆者依然認爲他延用了劉徽的割圓術來逼近圓周率，只是方法可能略

加簡化而已。至於祖沖之的兒子祖暅，還是使用劉徽的割圓術去逼近圓周率，當然方法略有不同，但本質上應該是一樣的。雖說《綴術》深奧難懂，但在一脈單傳的中國社會裡，父親的學問會傳給兒子，所以，祖沖之的方法，應不至於連他的兒子，也是偉大科學家的祖暅也無法窺其面貌吧。總之，我們推測祖沖之並未提出更好的方法。然而提到祖沖之，就不免要提到他的約率與密率，史家紀志綱認為，祖沖之將 $3927/1250$、3.1415926 與 3.1415927 表為連分數展開式，然後，再各自求漸近分數始知：

$3927/1250$ 漸近分數為 $3/1$、$22/7$、$355/113$、$3927/1250$

3.1415926 漸近分數為 $3/1$、$22/7$、$333/106$、$355/113$、………..

3.1415927 漸近分數為 $3/1$、$22/7$、$333/105$、$355/113$、………….

我們可以清楚看到，三個數表為漸近分數時，有兩組分數三者共同擁有，即 $22/7$、$355/113$，故有史家認為選此兩數為『約率』與『密率』是很自然的！然而為什麼祖率是 $355/113$ 而非 $22/7$ 呢？這是因為當 $\left|\frac{355}{113}-\pi\right| \le \left|\pi-\frac{b}{a}\right|$，其中 $0<a\le 113$ 都成立！

事實上，我們無從得知祖沖之是如何算出『祖率』，對於他如何選擇『約率』與『密率』也無從得知。上文皆為推測而得，並無很強的佐證，中國古代數學家並未對連分數術進行深入的研究，也沒有需要用到連分數的數學題目。儘管祖沖之是一位偉大科學家，對於天體運行也有深刻的研究，但以此說明他在圓周率的求法上使用了連分數，未免過於牽強，再加上祖沖之的《綴術》失傳已久，使我們有著些許的悵然。

不過，幸運地，趙友欽卻在劉徽與祖沖之間搭起了一座橋樑，讓我們更有理由相信祖沖之的『祖率』極有可能是使用割圓術！他同樣在探求圓周率這個值，而他的做法也依然是割圓術，只是前人都是從圓內接正六邊形開始割，但這位老兄，他卻從圓內接正方形下手，再割成正八邊形、正十六邊形等等，當他割至正 16384（ $=4 \times 2^{12}$）邊形的時候，終於驗證了祖沖之圓周率值估計的正確性。

讀者至此可能會沒什麼感覺，認為祖沖之這段不是都在談論圓周率，趙有欽的做法跟前人沒太大差異，為何需要介紹他呢！其實，正是因為他的這項壯舉，使得祖沖之的祖率與劉徽的割圓術之間產生了聯繫！讀者可別忘了，祖沖之如何求得 $\pi=3.141592$？ 我們完全不知道！所以，趙友欽的做法讓我們了解到，原來用割圓術是有可能做到跟祖沖之一樣的結果！筆者初讀至此時反覆思量，才赫然發現這個重要的結論，於是，心中的陰霾，乃一掃而空！

這三人為不同朝代的人物，但都是在追求圓周率的近似值。他們三人儘管做法有差異，但殊途同歸，同時，『割圓術』把三人緊緊繫在一起。然則在三人的朝代間，是否有人用不同的方式去探求圓周率值？我們無從得之，但唯一可以確定的是，對圓周率值的探

求方法，使得中國數學在全世界數學史中，佔有不可小覷的地位。

趙友欽的貢獻，讓我們看到劉徽與祖沖之的連結，或許可以稍稍彌補《綴術》失傳的遺憾。然而，『約率』與『密率』如何發現，則仍然是一個值得深入探討的課題。

五. 建議與評論

歷史上有關劉徽的記載非常少，對於劉徽注解《九章算術》，更只是短短的一句話「魏景元四年劉徽，注九章」帶過，這使我們只能從劉徽注九章的內容中尋找線索。然而，劉徽對於中國的數學、乃至於科學的貢獻，卻是不可抹滅的。如同前文所言，劉徽將中國數學知識由經驗公式，推展到理論發展的階段，光憑這一點，就足以讓他名留青史。可惜，他的作為並不被當時所重視，以至於我們失去了許多寶貴的資料。有關劉徽為什麼要注解九章算術，他的目的到底是什麼？前面做了一點推測，但我們仍希望能有更多的資料及研究，來說明這件事。無奈事與願違，只能從其言行中窺知一二。

劉徽除了在數學上的偉大貢獻，他對於數學本質的掌握，也可以是我們學習的對象。劉徽在注解《九章算術》的序文裡提到：『事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹者，知發其一端而已』，可見，他對於數學知識的敏銳洞察力，也點出了學習數學最重要的觀念。儘管如此，即使到了現在，還是很少人能了解劉徽的貢獻，相較之下，祖沖之似乎還更有名氣。不管是在數學或是歷史課堂上，教師如果想要講圓周率的故事，總會提到：祖沖之所算的圓周率準確到小數點後第六位。其實，如果教師願意花點時間去閱讀、說明劉徽的割圓術，那麼，有關圓周率的故事，一定可以講得更加精采。我希望以後的數學課堂上，中國數學史上求圓周率的主角會加上劉徽，而不再只有祖沖之。

另外，本文也提到祖沖之的《綴術》已經失傳，這是非常可惜的，說不定他割圓的方式也條列其中。但沒有資料留存，一切都是白說。我們相信祖沖之是繼劉徽之後，將中國數學推到另一個高峰的人物。無疑地，中國數學史少了祖沖之，將會留下許多的遺憾，因此，我們也期望將來能看到更多有關祖沖之的研究。

參考資料

李人言（李儼）(1990), 《中國算學史》，台北：台灣商務印書館出版（臺七版）。
洪萬生 (1994), 〈數學史上三個公式積圓面〉，《 科學月刊》第二十五卷第七期。
洪萬生 (2003), 〈魅力無窮的祖率〉，《HPM 通訊》6(4): 。
洪萬生 (2004), 〈三國 π 裡袖乾坤〉，《科學發展》384：69-74。
郭書春譯注 (1998), 《九章算術》，瀋陽：遼寧教育出版社。
錢寶琮 (1984), 《九章算經點校》台北：九章出版社。
錢寶琮 (1980), 《中國算學史》，台北：九章出版社。
數學知識網站http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_08/index.htmlT

新書櫥窗

溫柔與感傷的數學真理—閱讀《博士熱愛的算式》

西松高中 蘇惠玉老師

書名：博士熱愛的算式（博士の愛した数式）
作者：小川洋子　　譯者：王蘊潔
出版社：台北，麥田出版社
出版年份：2004
ISBN 986-7537-90-4
定價：240 元

「我的記憶容量只有八十分鐘」。

《博士熱愛的算式》是一本小說，主角是一位曾在大學裡教數論的博士，在 1975 年時因車禍影響，腦袋對記憶的容量像一只錄影帶一樣，只能容納八十分鐘，之後像錄影帶重新錄製一般，之前的記憶全部不見，他的記憶只存在 1975 年之前，每一天來照顧他生活起居的管家，不管工作了多久，對他而言，都是一個陌生人，博士只能用他自己的方式面對每天開門時的尷尬：

「你穿幾號鞋子？」「24 號」「多純潔的數字，是 4 的連乘（階乘）」；
「你家的電話號碼？」「5761455 嗎？真了不起。這是一億以下的質數總數」

數字的中性不具個人色彩，順利地幫博士保護了自己與隔離他人。

由於數學真理的不朽，所以能夠超越人類有限的記憶而存在，這就成了博士與別人獨特的溝通方式，藉由數學，博士和管家與她十歲的兒子建立了強烈的羈絆。博士稱管家的兒子「根號√ 」，因為他的頭頂平平的，很像根號，他說：「你是根號，這是一個面對任何數字，都不會有絲毫為難之色，以寬大的胸懷加以包容的符號，是根號。」因為管家的生日是 2 月 20 日(220)，博士腕錶的編號是 284，他跟管家解釋了何謂「友誼數」，並說：「這是一對友誼數，是很難得的組合喔。不管是費瑪還是笛卡兒（書中翻譯成迪卡爾），都只有找到一組而已，是在上天安排下結合的數字，你不覺得很美嗎？你的生日和刻在我手腕上的數字竟然有如此奇妙的關連。」

雖然這是一本小說，也可以看成是一本數學的科普書，書裡介紹了許多數論的知識，除了友誼數之外，博士所解釋的合成數、質數、等差級數求和，透過書中第一人稱管家的感受，對比於博士記憶的有限，更能讓人體會數學的美與純粹，同時卻也帶著一絲淡淡的哀愁。數學對我們這些長期浸淫其中的人來說，常因她的邏輯與理性而自豪，數學卻也因為理性與中性而顯得冰冷無情，作者透過高中休學的管家，將數學擬人化得柔軟了起來，例如歐拉公式 $e^{\pi i}+1=0$：

…來自宇宙的 π 飄然地來到 e 的身旁，和害羞的 i 握著手。他們的身體緊緊地靠在一起，屏住呼吸，但有人加了 1 以後，世界就毫無預警地發生了巨大的變化。一切都歸於 0。

歐拉公式就像是暗夜中閃亮的一道流星；也像是刻在漆黑的洞窟裡的一行詩句。

我很少看到一本小說容納這麼多數學元素，卻不顯得突兀的，作者自言她想要「呈現數字的永恆和人類有限的對比」，這一點，作者藉著創造博士這個人物，很巧妙的做到了。一個記憶只有八十分鐘的老人家，人類的一切技能，甚至是對摯愛友人的記憶都沒辦法保存時，卻能夠靠永恆的數學真理將感情緊緊聯繫。本書中同時利用第一人稱管家的感受，讓我們經歷一段奇妙的數學學習之旅，讓我們用不同的角度與更柔軟的心態來看待數學。這本書我不想將她定位為書背書評中所寫的「記憶與愛情之間關係的一個預言」，而是人類與數學之間的相處所綻放的光芒，因為短暫，所以珍貴。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂**PDF**電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京工業大學) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）
吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹 (及人中學)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
鐘啟哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
洪正川（新竹高商）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得，尤其有關海龍公式的教學心得，
懇請各位老師惠賜高見！