

# HPM 通訊

第九卷 第十一期 目錄 (2006年11月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）  
 助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）  
 黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）  
 陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）  
 英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 無盡的懷念
- 《測量圖解》導讀
- 分數教學分析：概念和運算
- Reader's feedback:  
 閱讀雜誌與教學反思—HPM 通訊第九卷第十期  
 數學史閱讀報告

## 無盡的懷念

上海交通大學科學史與科學哲學系 紀志剛教授

十月的英倫，已是晚秋，暮色早早就將劍橋籠罩起來。每天在離開李約瑟研究所返回住處之前，照例查看一下郵箱。可這一次，一條消息扎進我的眼簾：李迪教授去世！這是羅見今老師 30 日當晚 10 點 17 分發來的郵件。真如驚雷炸頂，呆若木然。

怎麼會？這怎麼可能！！

今年 8 月 28 日，內蒙古師範大學隆重舉行了紀念李迪教授 80 壽誕和在內蒙古師範大學工作 50 周年的紀念大會。作為李迪老師的入室弟子，當應親臨盛會。可是我已訂好了 8 月 31 日飛倫敦的機票，無法分身，就委派研究生鄭方磊作為交大科學史系的“特使”前往。當然，這在另一層意義上展示了李迪老師學脈的傳承。我內心相信拜會吾師的機會總是有的，因為科學史每次重要的會議都會有他高大身影，都會聽到他洪亮的聲音（每次學術會議先生都必提交論文，有時甚至兩份）。來到劍橋後不久，東亞圖書館館長莫菲特去國內參加在雲南召開的第八次少數民族科技史會議（9 月 21 日，大理），李迪老師可謂是國內少數民族科技史研究的正式開創者，我想老師一定要去的。誰知，莫菲特回來告訴我，李迪教授未能到會，因腦血管梗塞住院了。這是一個不詳之兆，我只有在心裏默默為老師祈禱，期盼他早日康復。

可是等到的卻是噩耗……

1986 年 9 月，我開始在李迪老師的指導下做數學史的碩士研究生。那一年正好是老師的 60 壽辰，但沒有任何紀念形式。老師親自為我們開設了《中國數學史》、《中國科學史》和《科學史文獻學》。每次上課，先生都是大包小兜帶來許多珍貴的古籍、資料，每次課後，老師照例都要留下若干道“作業題”——其實，也就是論文題目。我們把老師授課的特點概括為“史料先行，問題殿后”。正是這種訓練，使我們儘快地走進了研究前沿。記得我的一篇作業《北朝科技特點芻議》，得到了老師的肯定，當然和嚴厲的批評：什麼資料沒有用上，什麼文獻應該引用，什麼觀點還需提煉。幾經修改後，被學報錄用，後來還為人大資料全文轉載。這樣的耳提面命，真讓我終身難忘！

記不清老師獲得了多少榮譽與獎勵，老師把它們看的非常之淡。可他經常說到在他的

生命中有兩樣東西最爲珍貴：學術與學生。老師學術視野之開闊、研究領域之廣泛，在國內科學史界鮮有人可與之比肩。老師的研究工作雖沒有“花樣翻新”方法和“咄咄逼人”的理論，但每項工作都是踏踏實實之作。這裏我不得不提到老師豐富的藏書，特別是他收藏的古籍數量，可謂“首屈一指”。更重要的是研究生們可以隨時去家中翻閱，甚至借出複印，我至今還保留著華蘅芳《合數術》手抄本的一頁複印件！至於老師的學生，真可謂中國數學史界的一個“奇跡”，不用細數，只是每次數學史的會議，似乎都會是“李門”師生的大聚會。老師並沒有把學生視爲自己的“私有”，他對學生的研究工作給予了極大的尊重。如在老師《中國數學史簡編》（1984）中有兩條可能不曾爲人注意的註腳，一條稱“本部分吸收了李兆華同志的成果”（第 269 頁），另一條說“以下吸收了羅見今的研究成果”（第 339 頁）。此書是文革後出版的第一部中國數學史的專著，產生了很大的影響。而當時的李兆華和羅見今兩位師兄，不過是剛剛畢業的碩士，出版社的責編曾向老師建議去掉這兩條註腳，而老師的回答是：不去，寧可不出此書！現在這部書已經拓展爲三卷本的《中國數學通史》（上古到五代卷，1997；宋元卷，1999；明清卷，2004；江蘇人民出版社），展卷翻閱，墨香襲人，可誰能想像到這是老師 70 歲以後推出大作呢？

委派鄭方磊參加 8 月的紀念會，我曾寫了一個簡短的賀信。說到“……作爲李迪教授的學生，深感由衷地自豪與驕傲。二十多年來，自己在學術上的每一點進步，無不歸功於老師當年知識的傳授、方法的示範、思想的啓迪。老師堅守塞外，淡泊名利，以學術爲神聖使命，是我們人生的楷模；老師不顧高齡，探索不懈，高論迭現，更鞭策我們奮力前行。……”當時，我還想出一幅“對聯”，但感覺不是很妥當，就把它刪掉了。今天，在遙遠的青城（呼和浩特）舉行向老師的告別儀式，我孤身英倫，甚至無法在老師的靈前獻上一朵小花，就把這兩句“對聯”作爲永遠的紀念吧：

桃李無言下自成蹊滿庭芳菲達中外  
啟迪後人搜古練今謹研篤實譽園宇

（後記：江曉原教授來信告訴我李迪老師的追到會將於 11 月 4 日舉行，他委派陶培培專程前往，並囑咐我寫一點紀念文字。定下心來，老師的音容笑貌不斷在腦海中閃現，而寫出的文字卻是蒼白無力，但這是內心真實感情的流露。）

2006 年 10 月 4 日 15 時 30 分（GMT）  
李約瑟研究所，劍橋



李迪教授在第 22 屆國際科學史大會做報告（2005 年 7 月 26 日，北京科技館，紀志剛攝）



左起：李迪，馬丁玲（上海交大博士生），大橋由計夫（日本），第一屆《絲路數學傳播國際會議》，2005 年 7 月 31 日于西安。紀志剛攝

# 《測量圖解》導讀

台師大數學系碩士班研究生 陳春廷

## 一、南秉吉的生平與其著作簡介

南秉吉，亦名相吉，字元裳、子裳，號惠泉、六一齋、晚香齋，本貫宜寧。生於朝鮮李朝純祖二十年（1820），卒於高宗六年（1869）。南秉吉於憲宗十四年（1848）增廣別試文科乙科及第，又在哲宗元年（1850）增廣文科殿試中以丙科及第，並且先後曾任黃海道觀察使、刑曹判書、議政府左參贊、水原留守…等官職。

南秉吉的算學著作有：《緝古演段》、《無異解》、《測量圖解》、《算學正義》、《勾股述要圖解》（又名《劉氏勾股述要圖解》）、《九章術解》、《玉鏡細草詳解》；而在天文學方面的著作有：《中星新表》、《恒星出中入表》（又名《推步法》）、《量度儀圖說》、《時憲紀要》、《星鏡》、《推步捷例》（又名《七政步法》）、《春秋日蝕考》、《太陽更漏表》（又名《太陽出入表》）；其他的著作則有：《選擇紀要選》、《晚香齋詩崇》。

關於南秉吉的算學交遊，主要是與其兄長南秉哲的互動，以及中人算家李尙懌也有密切的接觸。南秉吉曾為南秉哲的著作《海鏡細草解》寫序文，而李尙懌的著作也有多篇的序文是由南秉吉執筆，例如：《算術管見》、《翼算》…等書。他們在算學上的交流與貢獻可說是在東算史上的一段佳話！

## 二、中韓算學交流

大約公元 114 年，《九章算術》通過樂浪傳入高句麗。此後，《九章算術》注、《海島算經》、《綴術》、《孫子算經》、《五經算術》、《張邱建算經》等算學書籍，亦皆陸續傳入了朝鮮。約在公元 1304 年左右，崔誠之赴元朝學習《授時歷》，回國時將《測圓海鏡》、《算學啓蒙》與《四元玉鑑》等中國算學書籍帶回韓國。正祖在位時（1777~1800），《幾何原本》和《數理精蘊》也傳入了朝鮮。正祖在位時（1777~1800），《幾何原本》和《數理精蘊》也傳入了朝鮮。

雖然朝鮮看似一直被動接受中國的算學知識，但是由東算學者的著作來看，他們並非是一味接收而已，其實也是有自己的思想，並且將此寫入著作當中。以南秉吉的《測量圖解》為例，整理融合中國幾本算書有關測量內容的部份，此外還加以『圖解』，此番『新意』為中國古算題給出另一種理解方式。

## 三、《測量圖解》內容摘要

《測量圖解》是南秉吉在公元1858年完成的著作，在書的序文之中可以看出他寫此書的動機與目的：

古者用矩之術，可以尋墜緒於萬一者，惟九章重差一書，而算經十書以《海島算經》為九章重差，孔繼涵以為九章勾股篇末有望遠度高測深七術，或析之曰「九章重差」。今勾股篇末原有望遠等八術，而《海島算經》自為一卷，則重差之目未詳孰是，蓋勾股篇末諸術固九章重差，而劉徽因其術引伸觸長，遂造《海島算經》也歟。然其術則望遠諸術亦只是勾股，非重差也。舊圖已缺，戴東原之補圖、李淳風之注釋尚不能闡其理，而語之詳未足為發之資矣。六一齋南學士，按節海藩政，清民淳公餘多暇，遂取二篇圖而解之，靡有餘蘊，且秦九韶《數書九章》測望類，設問頗有可觀，而立

術既多舛訛，亦有舍簡就繁者，故逐條審正，一例圖解附之卷末，名曰《測量圖解》。

以上文句的標點符號為筆者自行加記，如有不妥敬請見諒！

在序言之中可以發現南秉吉對於中算書的態度，學習數學必須要有懷疑求知的精神，所以南秉吉對於古書之中的錯誤勇於提出改正，並且發表自己的想法。

全書在序言之後分為三個部份：「九章重差」、「海島算經」與「《數書九章》測望類」，以下分別簡介：

### ◎「九章重差」

這個部份有八道題目，皆取自《九章算術》卷九的「勾股」章，《九章算術》是中國古代最重要的數學經典，魏劉徽所作的注以及唐初李淳風的注釋，更是促使《九章算術》發展成為中國古代數學的支柱。

前五題都是關於「邑方」的問題，例如：「今有邑方不知大小，各中開門。出北門三十步有木；出西門七百五十步見木。問邑方幾何？」。後三題則列出如下：

有木去人不知遠近。立四表，相去各一丈，令左兩表與所望參相直。從後右表望之，入前右表三寸。問木去人幾何？

有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木東三里，望木末適與山峰斜平。人目高七尺。問山高幾何？

今有井徑五尺，不知其深。立五尺木於井上，從木末望水岸，入徑四寸。問井深幾何？

除了第七、八題將题目的起始字句由『今有』省略成『有』為開頭，其餘的字句皆未更動，而『答曰』是提供答案，『術曰』為解題過程（含有劉徽注），皆與《九章算術》如出一轍，

創新之處在於南秉吉加上了『圖解』，以附圖再加以說明解釋解題運用之原理。

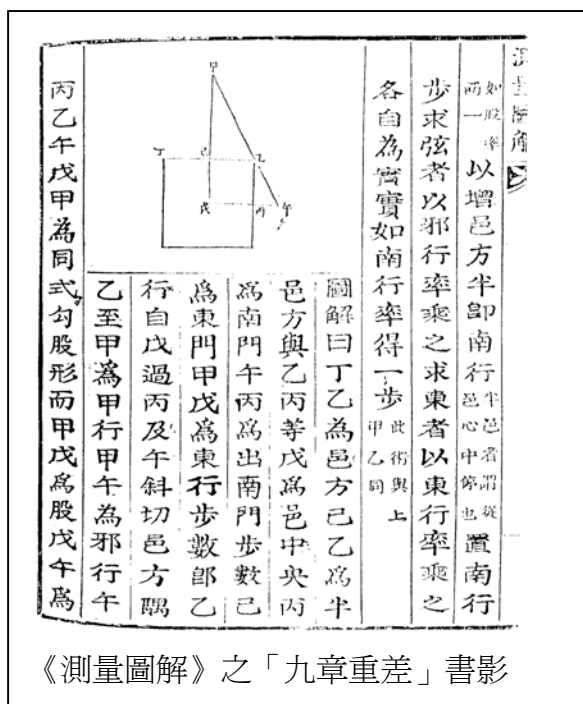
### ◎「海島算經」

《海島算經》原是劉徽為了解釋「重差術」而附在《九章算術》勾股章之後的一些問題，直到公元七世紀左右才被抽離出來成為一部獨立的著作，因為第一題是關於測量海島高和遠的問題，所以就被稱為《海島算經》。

南秉吉的《測量圖解》一書將《海島算經》的九個問題都收入，文字都保留原貌未改動，筆者在此就不一一列出。而在體例方面則是將引用的算題（『今有』為起始文字）與術文（答曰、術曰）皆列出，最後再附上『圖解』（依照題意繪出圖形，輔助說明解題的過程）。

### ◎「《數書九章》測望類」

《數書九章》（西元1247年）為南宋數學家秦九韶（約1202至1261年）所撰，全書分為大衍、天時、田域、測望、賦役、錢穀、營建、軍旅、市易等九類，每類九題，總共八

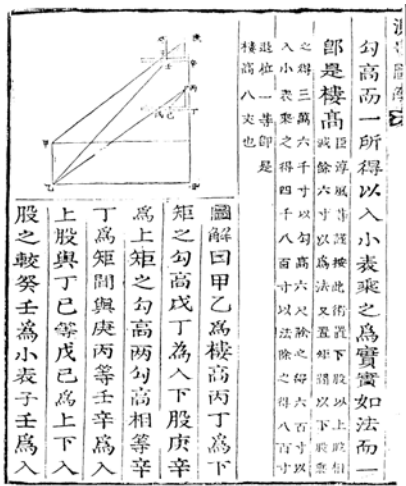


《測量圖解》之「九章重差」書影

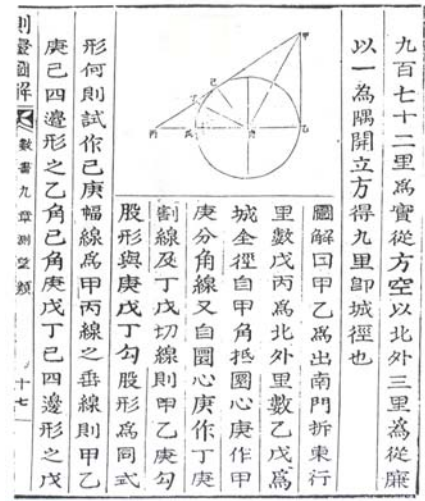
十一題。

南秉吉的《測量圖解》一書將《數書九章》測望類的算題都放入書中，依序分別為：望山高遠、臨臺測水、陸岸測水、表望方城、遙度圓城、望敵圓營、望敵遠近、古池推元、表望浮圖等九題。雖然名為「《數書九章》測望類」，但是特別的是南秉吉把軍旅類的『望知敵眾』一題也收入其中，所以總共有十題。

這個部分的體例為算題、『答曰』（提供答案）、『術曰』（解題的一般化過程）、『草曰』（計算過程），以及南秉吉自行加上的『圖解』。



《測量圖解》之「海島算經」部份書影



《測量圖解》之「《數書九章》測望類」部份書影

#### 四、整體分析

南秉吉的《測量圖解》是以一個主題為軸發展的一本分門別類的專書，他將中國著名古算書裡關於測量的部份抽離出來，整理合併在他的《測量圖解》一書之中，全書的形式使以題目為主，需要運用到的原理並沒有先行作整體的說明，而是分散在各個題目的解答過程之中。此外，閱讀此書必須具有「勾股」（直角三角形）、「比例」…等相關的先備知識，所以對於數學初學者而言是難度稍高。

若以為這樣子只不過是『收集題目』的動作罷了！那可就太小看南秉吉了！他提供了一種新的方式來解讀並且解答題目——『圖解』，這與傳統的文字敘述有相當大的差別！甚至非常接近現今中學關於『三角測量』的教學，教師必定會利用畫圖讓學生們更容易了解題意。筆者猜想南秉吉在研究古算題之時，他自己就是利用『圖解』的方式來理解，因而認為如此是有助於解題，所以著作內容也希望讓讀者群能夠用同樣的辦法來貼近算題。

在中國方面，清代李潢的《九章算術細草圖說》與《海島算經細草圖說》、沈欽裴的《重差圖說》…等著作都是強調『圖解』的方式來解題，但是筆者目前手邊的資料無法顯示南秉吉是否閱讀過這些中國的算書？雖然無從得知南秉吉有『圖解』這樣的創新是否參考其他人的成果，但是《測量圖解》綜合了「九章重差」、「海島算經」與「《數書九章》測望類」三個部份，在中國算書方面並沒有類似這樣的著作，可見南秉吉仍然是很有自己的想法。

相較於南秉吉的另一著作《劉氏勾股述要圖解》，《測量圖解》在『圖解』方面更是實至名歸，因為每一個題目都有不厭其煩詳細的『圖解』，沒有任何一題被省略。但是《劉氏勾股述要圖解》全書共有二百二十四題，卻只有十八個圖形而已，甚至有一些題目有二個『圖解』，其餘的都未提及『圖解』。

《測量圖解》的特色除了『圖解』之外，筆者更看到其內容是以『比例』來貫穿全書。當時並沒有使用三角函數，但是相信沒有人會否認三角函數的本質與比例是有相關性，再加上當時南秉吉使用的數學知識包含：勾股形（直角三角形）、相似形與相似三角形（或稱為『同式形』，可以推出對應邊成比例）…等等，所以由此可知何以南秉吉在《測量圖解》之中會用『比例』來解題。

《算學正義》是南秉吉晚期的著作之一，這是一本類似數學百科全書的著作，羅列的範圍相當廣泛，從基礎的四則運算到天元術都包含在其中，而《算學正義》下編就安排了一個主題「測量」，筆者認為這是根據《測量圖解》一書來改寫，並且更加濃縮整理而成。由此可見南秉吉對於「測量」這個主題有一定份量的重視，否則怎麼會不忘將「測量」編入其中呢？

最後，筆者要強調《測量圖解》一書，雖然題目全是取自於中國古算書，但是南秉吉做了一番收集與整理的工作，並且在解題過程裡加入了『圖解』，這樣也算是賦予這些算學名題另一個全新的解讀方式，實屬難能可貴。

## 五、參考文獻

- 李儼，〈從中國算學史上看中朝文化交流〉，收入杜石然主編，《李儼錢寶琮科學史全集》第八卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998年)，頁559—563。
- 金容雲，〈《測量圖解》解題〉，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁5—7。
- 金虎俊，〈《九章算術》、《綴術》與朝鮮半島古代數學教育〉，收入李迪主編，《數學史研究文集》第四輯(呼和浩特：內蒙古大學出版社，台北：九章出版社，1993年)，頁64—67。
- 洪萬生，〈數學文化的交流與轉化：以韓國數學家南秉吉(1820—1869)的《算學正義》為例〉，《師大學報》第四十八卷第一期【人文與社會類】(2003年)，頁20—36。
- 張復凱，《從南秉吉(1820~1869)《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之「對話」》，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2005年。
- 韓國·南秉吉，《測量圖解》，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系·數學篇(5)》，首爾市：驪江出版社，1985年。
- 魏·劉徽注、唐·李淳風釋，武英殿聚珍版《九章算術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 魏·劉徽，武英殿聚珍版《海島算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 南宋·秦九韶，《數書九章》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一，鄭州：河南教育出版社，1993年。

## 分數教學分析：概念和運算

台北縣福和國中 黃清揚老師

鄭振初教授的《小學分數教學》(台北：九章出版社，2006，以下簡稱『本書』)討論小學數學中分數的教學，共分為六個章節，分別是第一章：分數的學習問題和教學原則、第二章：分數概念和教學、第三章：分數加法教學、第四章：分數減法教學、第五章：分數乘法教學、第六章：分數除法教學。筆者閱讀本書之後，發現它有幾項特點，特點之一，是立論及目標清楚明確。作者鄭振初教授先針對分數認識的研究及學習分數的問題，作了深入淺出的討論，並且還點出了分數教學的重要目標及教學原則。雖然小學所學的數學內容，大部分是計算教學，但正確計算只是數學學習目標的一小部分，最重要的，是要讓學生有內在的學習動力，所以，作者提出了數學教學原則是簡單概念教學和減少學生負擔(認知、心理、記憶、勞力)以及建立數學思維和數學結構。至於建立數學思維和數學結構，正是本書的重點所在。

特點之二，是舉例多樣化，例如分數的概念就介紹了七種例子，作者提出了一些常見及不常見的圖形讓學生可以學習分數，進而加強分數的概念。同時，作者也認為單一的練習容易變成機械化的過程，教學者使用不同的問題讓學生探究分數概念是必要的。第三個特點，則是作者將學生的迷思概念提出來並嘗試解決，例如  $\frac{1.5}{2.5}$  是不是個分數？很多學生

皆認為  $\frac{1.5}{2.5}$  不是一個分數，即使把  $\frac{1.5}{2.5}$  變成  $\frac{3}{5}$ ，仍有學生不相信  $\frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$ 。解決這類問題的方法，作者則提出了幾個方法來對應，從少部分學生能接受至大部分學生能接受方法來供讀者使用。除此之外，鄭振初教授也針對學生作答的答對率，來討論學生的迷思概念，這種寫法對讀者有很大的幫助，因為教學者在閱讀這部份內容之後，可以讓教學者預知學生的問題所在，而在教學上提早準備並因應，從而避免容易混淆學生概念的教學法。

就本書的結構及內容而言，筆者認為可讀性很高，對中小學老師來說，是不可多得的一本好書。從目前現行分數的教材中來看，幾乎沒有辦法放這麼多樣的材料，當然也不可能放這些內容(不然教科書會是厚厚的一本)。教材上的制式方法，學生學習時也不一定完全接受。有鑑於此，小學老師不妨參考本書，擷取其中適合的教材，來給學生不同的學習歷程。

此外，作者在第一章所陳述的內容，有個地方可作為我們教學者的借鏡，那就是，在提到數學教育的目標時，本書特別指出最重要的是學會思維，而學生願不願意思維，主要是受到他們的數學觀和數學意識的影響。有些學生的數學觀認為數學是「法則」的學習，正確計算出題目所要的答案。著重在這種學習之下，學生通常不能充分理解數學內容，經年累月之下，不能理解的內容就愈來愈多。這點值得我們注意，筆者現階段的學生在學習數學時，往往著重於法則的運算，例如剛學畢氏定理，補習班就教學生海龍公式來計算三角形面積。所以，他們對於基本的題目皆可通過測試，可是，題目只要一經變化，就不知所措(例如三角形三邊長改為根號)。殊不知其本質上與上課所學的內容是相關聯的。所以，正如同本書作者所言，要把概念學習和計算相對應，學生才有機會能正確計算和推導



算式。這也是筆者所要努力的地方。

對於本書，筆者有以下的建議：作者可以在概念的聯結上作加強。之前有提到，本書一開始就提出了七種分數的概念，之後作者對於分數的加減乘除，也提出了各自對應的概念方法，不過，內容上大多是圖示（第一種）的概念，對於其它分數概念則較少提及。我認爲這部分很可惜，作者如能在加減乘除概念學習內容中，也提到這七種方法的使用，相信對於小學教師讀者在分數概念的教學上，會掌握更多的張力。因爲這些概念如果是可以操作的概念，對於學生的後續學習是正面的加分。如果能夠做到這點，那我們可以預見的是：小朋友可以自己建構分數的加、減、乘、除，這不就是大家所期待的數學學習嗎？

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳燁（東京大學）  
 台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）  
 蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章  
 （建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文  
 （百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）  
 林裕意（開平中學） 林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小）  
 台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦  
 和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹  
 林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹（及人中學）、羅春暉（二重國小）  
 宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）  
 桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（武  
 漢國中） 徐梅芳（新坡國中）、郭志輝（內壢高中）、程和欽（永豐高中）、鍾秀瓏（東安國中）  
 新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高  
 商）  
 苗栗縣：廖淑芳（照南國中）  
 台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）  
 台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）  
 嘉義市：謝三寶（嘉義高工）  
 台南縣：李建宗（北門高工）  
 高雄市：廖惠儀（大仁國中）  
 屏東縣：陳冠良（枋寮高中）  
 金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）  
 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。

台師大數學系碩士班研究生 黃俊瑋

郭慶章老師在其〈改弦易調說正弦〉一文中，先從數學史的角度切入，介紹了三角學的發展簡史，和與之相關的數學家及其貢獻，然後，再提到將圓內的弦長與對應角之正弦值作聯結的方法，用以證明並說明相關的三角公式，如和角公式、和差化積與倍角公式等，並可輕易地推出正弦定理，實有令人大開眼界的感覺。或者應該說是筆者個人實在才疏學淺，才會感到如此訝異。但它的確可引導學生如何思考正弦定理與其幾何意義的關聯，同時，也是提供教師從另一方面引入、介紹正弦定理的好教法。此外，我們或許可以嘗試證明與解釋其它的相關三角公式與性質，藉以了解此一方法在數學課的教學上與解決一般問題上的實用性與廣度。

而看了蘇俊鴻學長的〈餘弦定理怎麼教？〉後，大呼過癮、同時獲益良多，就自己過去的求學經驗以及本身的教學經驗而言，我發覺教師的角色總是站在說明、介紹數學概念與知識，單方面地把知識灌輸給學生，填到學生的腦中。過去的、制式的學法與教法，也潛在地制約了我現在的教學方法，所以，看了這篇文章，有一種恍然大悟的感覺，原來餘弦定理也可以這樣教。真的如洪老師所言，好好地讀完這二篇文章，教學功力定會大增，並從中激發了許多不同的教學想法與安排教材的巧思。

我們知道，正弦定理可以用來求解三角形邊角的相關問題，但有些問題(特別是角度少時，使用正弦定理時會顯得困難與麻煩)，從而引進餘弦定理解決之。

然而，就以往的經驗(學習與教學的經驗)，教師引進餘弦定理後，通常只流於介紹定理的形式並要求學生記下來，接著，就是枯燥乏味的冗長證明。儘管證明有其必要性與重要性，可以達到說明、解釋、溝通等功能，但是，對於一些基礎與理解力和基本功不好的學生(尤其是非名校社會組的學生)，這真的是非常的折磨。尤其多數學生完全沒有(或嚴重缺乏)「證明的概念與經驗」，同時，對於證明當中繁瑣的文字符號莫名地感到害怕。由於我本身過去順利的求學經驗，對於學生如此地表現，總是深覺不可思議，然而，現在有了較多的教書的經驗，也累積面對更多的學生的困惑後，終於才慢慢了解、體會學生們在初初面對一大群抽象未知數時，心裡感受的困窘與恐懼的感覺。不過，話說回來，當年康熙皇帝學習符號代數時，不也是這樣被困擾著呢!!

然而，如同蘇俊鴻學長所設計的教法，引入待解問題後，先利用數字簡單的特例讓學生更容易從中理解，再逐步地將問題的各项條件一般化，除了達到讓學生重複地熟悉其推導與演算的過程，更能讓學生易於參與知識的發現與探索，而不再流於文字符號、未知數的證明與痛苦的公式之記誦。而利用可以加以一般化的特例，來代替抽象文字的證明的方法，這對於能力與數學基礎較差的學生而言，似乎比一般教科書中嚴謹的證明，更具有實質上的意義與幫助。

至於學長所提到的歐幾里得利用面積證明畢氏定理的方法，說明了畢氏定理與餘弦定理間的關係，這也是我過去沒有想到的。我一直只知道「畢氏定理是餘弦定理的特例，餘弦定理是畢氏定理的推廣」，但是從沒有深刻地思索，兩個定理之間差異的「 $-2abc\cos C$ 」這一項，到底有何代數上或幾何上的意義。從此一觀點加以介紹說明餘弦定理，顯然可以讓

學生將餘弦定理與先備知識中，也是一般學生最為熟悉的畢氏定理作一聯結，更能利用圖形的表徵，透過幾何意義的刻畫，進一步了解認識餘弦定理，從此，餘弦定理再也不是外太空掉下來的無字天書了。

雖然過去我總是自認為對於高中教材內容蠻熟悉，但是，拜讀了前輩們的文章後，才深深發覺自己在教材與教學上的不足與膚淺，過去只是讀到了、學到了一些教材的表面與皮毛，對於許多數學概念與數學主題，我其實並沒有真正深入進入到教材的核心與價值處，也忽略了許許多教材中細微處與關鍵之「眉角」處。這頗值得我日後加以深思，以求教學上的精進與突破。

此外，關於歐幾里得對於畢氏定理的這個證明內容有個小插曲。記得在我國三那年，自己在試圖證明畢氏定理時，猜測了和歐氏一樣的方法，將斜邊上的正方形分成兩個矩形，使其面積分別等於兩股所形成的正方形。當年一時無法證出後，便後來拿去請教數學老師，結果老師非但也證不出來，更澆了我一桶冷水，該老師認為我的猜測是不成立的。隔天，我花了不少時間，終於從圖形中找到了全等三角形，從而成功地證明畢氏定理，不過後來一直不好意思告訴該老師。

小插曲二，上過洪老師的數學史，在教學上真的非常實用，得到不少的感觸與啟發。大學四年級那年，剛好洪老師休假，沒機會修數學史，直到今年終於在許多課程之中排出時間來旁聽，且從中學到很多想法與新知，自己也試著多閱讀一些數學史相關的書籍與文獻。在上課時或是遇到與教材相關的內容時，便可和與學生分享和討論，學生們普遍還蠻有興趣的，也會引起一些不錯的反應與迴響。不過，礙於才第一年教書，而且我的相關經驗與知識仍然不足，還得來日慢慢累積與加強，其望有更好的效果。

小插曲三，去年帶外系微積分，在習題研討時，竟然發現有學生不會解  $x-3=0$  這樣的方程式，而且不是只有一個學生，是同時有很多個。其中幾個學弟只是淡淡地告訴我，從國中開始，他們便不曾學過數學。想不到這樣混混混，也可以上師大，也和別人一樣修微積分，難怪台灣競爭力漸低落。也對於師大的未來，國家未來的師資感到擔憂。

不過，就我實習的經驗和今年接了二個高中社會組的班的經驗來看，發覺選讀社會組且為中後段學校的學生，多數數學基礎真的很低落(不少是國中就放棄數學的學生)，基本運算能力很不好，又慢又很容易錯，光是基本性質與定義就學得很吃力，要學好高中的數學龐雜的內容更是不容易。上面二篇文章的作者，所任教都是較為優秀的學校，然而，更多的學生是屬於數學程度與學習動機、學習能力低落的，在一般升學主義掛帥的數學教育之中，他們往往也成為犧牲品，因此，我們是否更該更加反思我們的教材與教學，能否對於這一大群孩子們的數學學習有所助益與意義呢？

## 數學史閱讀報告

HPM 通訊 910 【改弦易調說「正弦」 (建國中學 郭慶章)】、

【餘弦定律可以怎麼教? (北一女中 蘇俊鴻)】

台師大數學系大四學生 吳佳霖

這兩篇文章的主題與高中數學的三角函數相關，第一篇由簡述三角學如何奠基、經過長久年代、不斷變遷後，最後明確化三角函數的意義開始；接著以正弦函數的本質—求弦長，以另一種角度介紹各種合角、倍角、合差化積等等公式，強化了三角函數的幾何意義。第二篇是一篇得獎的教案，介紹如何引導學生由正弦定律的觀點（這樣的安排有點承第一篇的意味），來推導出餘弦定律，強調餘弦定律的發現脈絡，且與畢氏定理做結合，使學生對餘弦定律的了解能更深入、多元，不再流於單調的公式推導或計算。這兩篇都以「求弦長」為基本概念，以深入淺出、淺顯易懂的文字，著實讓我大開眼界。

其實在閱讀的一開始，直徑為 1 的圓上，「 $\sin \widehat{AB} = \overline{AB}$ 」這件事情讓我困擾了好久，後來發現原因出在  $\widehat{AB}$  在文中所指的是指「A、B 間的弧長」，而我誤認為 A、B 兩點間所夾的圓心角，難怪所得的數值總是差一倍。在認清作者所指後，對於以弧長代替的數值，代替他們所夾的圓心角感覺有點訝異，似乎又有一點理所當然，因為這是一件在尋常不過的事情，但我卻未曾把她視為一個三角函數運算的重要因子。就如同中國古代的「割圓八線圖」與梅文鼎的正弦定理論述，很多都是由最基本定義即可推導之，甚至圖說一體，但因為對於學習的觀念錯誤，造成只知其然，不知其所以然的窘狀。

在第一篇的最後則在提出了兩點，一是高中數學的出題思考方式，以函數聯想圖形的基本素養，來說明如何輕鬆的讓無理數經加減乘除後為有理數；二為餘弦定律與正弦定律的等價關係，第一篇裡以發人省思的方式拋出問題，讓我慚愧了一番，著手開始推演，而此問題在第二篇以教學的觀點來說明。

第二篇的教案一反過去中學教師對於餘弦定律純粹以文字推導說明的方式，以提取舊經驗—正弦定律、及逐漸的一般化，慢慢引導學生用「發現」的方式深化對餘弦定律的熟悉度。緊接著討論此一論述的完整性，讓學生體驗這些過程，在代數與幾何間巧妙的做了的聯結。

接著則進一步討論餘弦定律。作者先由畢氏定理的歐幾里得證法出發，漸漸的由圖形面積與邊長的關係，一步步將幾何意義與修正項一一呈現，但同時我也想著，如此複雜的圖形變換關係，是否在學生心裡真的能接受，畢竟圖形太過繁瑣，又是面積又是邊長，學生往往看了下一個圖就忘了上一個圖，因此在這部份應該得花費相當的心力，才能得到所期望的成效。

這兩篇文章所說明的一切都是讓人有著奇妙的感覺，所有的東西都那麼的理所當然，卻又充滿驚喜，或許就是因為我們在學習過程中，只汲汲營營於接收，卻忘了對所學的一切做歸納整理及聯結，我感受到溫故知新及閱讀的重要性，若不是多多閱讀相關的書籍，追根究底的探討，否則是不可能對這些來龍去脈如此熟悉，更不用談教學了。