HPM通訊

第一卷 第二期 目錄(1998年11月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

HPM 隨筆（一）

洪萬生
臺灣師範大學數學系教授

誠如 HPM 所主張，數學史的確值得引進數學課堂之中，儘管它『如何』有助於教師教學與學生學習，仍然眾說紛紜，見仁見智。所謂 HPM 是指數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics），它隸屬於國際數學教育委員會（ICMI, International Commission on Mathematics Education），專門推動數學史在數學教育上的應用工作。正因為如此，在數學課堂上運用數學史，就成了 HPM 成員十分關注的目標了。

根據多年來在很多場合 -- 包括台灣師大數學系所『數學史』課程、數學教師暑期進修班、數學教師短期講習班，以及應邀為初、高中數學教師演講 -- 討論 HPM 課題時，筆者總是再三強調在課堂上，教師運用數學史至少可以分成三個層次：

1) 說故事，對學生的人格成長會有啟發作用；
2) 在歷史的脈絡中比較數學家所提供的不同方法，拓寬學生的視野，培養全方位的認知能力與思考彈性；
3) 從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想。

至於運用之妙，當然存乎教師個人的慧心了。不過，筆者也一直被要求針對這些 HPM 課題，提供範本或手冊。本文之作，用在拋磚引玉，讀者萬勿照本宣科才是。

關於第一層次，很多人直覺地認為『數學史』就等於數學故事。不錯，教師說說故事提振學生的上課情緒，尤其是在夏日午後正好眠時，數學家或數學界的遺聞軼事，大概都可以達到提神醒腦的作用。在台灣師大就讀時曾修過『數學史』課程的教師，都一再向筆者表示她 / 他們的學生實在太愛聽故事了，簡直叫人窮於應付。事實上，數學家故事對學生的人格鼓舞與啟發尤其值得我們重視。譬如說吧，十八世紀法國女數學家蘇菲 姬曼（Sophie Germain, 1776-1831），就是受到阿基米德（Archimedes）故事的『煽動』，迷上數學而終生無怨無悔。她童年時正值法國大革命發生，為了排遣難耐的孤獨與寂寞，遂被數學史家莫度西亞（J. E. Montucia）的【數學史】所記載的阿基米德傳奇所吸引。相傳阿基米德正沈醉在一道幾何問題時，對已經陷城的羅馬士兵渾然未覺，就莫名其妙被殺死了。這個悲劇讓百無聊賴的蘇菲神醉心痴，她想幾何學若真有這種魅力，那真地值得探索一番了。於是，她終於走

上數學研究的不歸路了。

讓我們再提供另一個女數學家的故事。十九世紀俄國女數學家桑雅 卡巴列夫斯基（Sonya Kovalevsky, 1850-1891），多才多藝、文理兼美，在數學上她固然成就非凡，而在十九世紀俄國文壇杜斯妥也夫司基、普希金等大師輩出的年代裡，在文學方面她也著作甚豐，頗富盛名，真是讓我們見識到數學家甚少為人所知的一面。同時，她雙方面的成就也告訴我們：原來數學研究與文學想像力並不相悖，而是正好可以相輔相成。事實上，正如桑雅的偉大師傅卡爾 外爾斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815-1897 ）的洞見：「傑出的數學家不可能不是心靈上的詩人」，數學與文學一樣，它是一門需要大量想像力的學問。針對她自己在數學與文學之間的隨意轉換，桑雅的自白是很值得轉述的：

> 對我來說，詩人只是感知了一般人所沒有感知到的東西，他們看得也比一般人深。其實數學家所作的不也是同樣的事嗎？就我自己來說吧! 我這一輩子始終無 法決定到底哪個偏好較大些，是數學呢？還是文學？只要我的心智逐漸為純抽象的玄思所苦，我的大腦就會立即偏向人生經驗的省察，偏向一些美好的文藝作品；反之，當生活中的每一樣事開始令我感到無聊且提不起勁來時，只有科學上那些永恆不朽的律則才能吸引的興緻。
>
> 至於這個故事應該如何『改編』，有請各自隨意斟酌。無論如何，這是一個具有多方面啟發性的數學家故事（哪幾個方面？），值得喜歡說故事的教師善加利用。

就『說故事』的實施來說，教師有沒有一點從容的心情或『雅興』，絕對是主要關鍵。也就是說，教師只要平時喜歡閱讀數學家傳記，然後在課堂上多加練習，久而久之大概就可以出口成章了。這種『雅興』嚴格說來無關數學或數學史『素養』! 然而，如果我們希望教師在課堂上運用數學史時可以提升到第二層次，那麼，她 / 他們擁有一點數學史的專業修養，就變得不可或缺了。

筆者身為專業數學史家，為了強調上述這種 HPM 的特殊關懷不是所謂的『老王賣瓜』，在很多場合演講時，筆者總喜歡以畢氏定理的三個證法為例，來說明數學原典（或文本 text）上的記載，對學生的人格薰陶、認知啟發以及（多元）文化關懷，如何可以帶來深刻的影響。按照歷史順序，第一個方法當然必須是古希臘歐基里得（Euclid）【幾何原本】（The Elements）第一冊命題 47，這即是所謂的『面積證法』，至於筆者所選擇的版本，則是徐光啟、利瑪竇（Matteo Ricci）所翻譯、出版的明刊本（1607 年）。第二個是古中國三國時代趙爽註解【周髀算經】所提供的『弦圖證法』。第三個證法也出自【幾何原本】，是該書第六冊命題 31。根據 Proclus 的說法，這才是歐基里得的原創性貢獻，由於它是關於相似形的定理（事實上，第六冊討論的題材都是相似形），它的的證法也因此運用了相似三角形的比例性質，於是被稱為『比例證法』。我們提供的圖形也是出自前述的明刊本。

在簡介了這三種證法之後，筆者通常會要求聽眾（教師或學生）表態，請她 / 他們挑選一個最愛。結果，聽眾大都會表示最喜歡第二個證法，因為它比較直觀 -- 事實的確如此，但也可能是由於文化的親和力使然。接著，筆者會說明『數學證明』（mathematical proof）的功能，及其在教學、學習上應該扮演的角色。在這個前提下，筆者進一步督促聽眾『對比』這三個證法之間的異同，並強調它們在認知啟發上的重要性。

我們相信如果教師善用這種教學策略，學生一定有機會培養全方位的認識能力與思考彈性。至於真正的成效如何，當然還有待教育研究。不過，教師要想進行實驗，則起碼的數學文本解讀以及比較

史學的初步修養，都是必要的數學史功夫，千萬馬虎不得。

另一方面，在第二個層次時，筆者已經刻意地鼓勵學生針對數學知識進行反省。一旦她 /他們認為數學除了可以而且必須『做（或學著『做』)』之外，原來也可以『鑑賞』！ 如此一來，教師或學生或有可能逐漸體會：數學是某脈絡中的一種知識活動（mathematics in context），亦即它也擁有豐富的歷史文化向度（或維度 dimension）。所以，學會了數學，不僅我們的生活經驗得以強化，同時，我們的文明品味也得以提升 -- 尤其，我們也可以在這樣的教學設計中，分享世紀末最令人矚目的『多元文化關懷』。如果教師有機會與學生分享數學的文化意義，那麼，HPM 的最終關懷乃至於數學教育的理想，也一定可以實現。這也正是我們上文所說的數學史運用的第三層次。有關這一方面的課題，我們可以論述得更深入一點，不過，這立刻會涉及更專門的數學文化史（cultural history of mathematics）或數學社會史（social history of mathematics），且讓我們以後再一一深入說明。

參考文獻

1. Fauvel, John and Jan van Maanen, "The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997-2000)," Mathematics in School 26 (3): 10-11.
2. Furinghetti, Fulvia, "History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains," For the Learning of Mathematics 17 (1) (February 1997): 55-61.
3. Kool, M., "Dust Clouds from the Sixteenth Century," The Mathematics Gazette 76 (475): 90-96.
4. Osen, Lynn, 【女數學家列傳】(彭婉如、洪萬生中譯)，九章出版社，1998。

「國中數學史教學」經驗談之一

謝新傳

五常國中教師

數學發展史是人類文化活動的重要部分，也是數學教育中最人性化的部分，我覺得要讓學生他們喜歡上數學課，老師也喜歡教數學，就一定要讓數學史料成為教材的主要部分(數學系應當是必修學分，中小學教育更要如此—而且要把它編成故事書、漫畫書，不知有何不可？)，我記得我念國中的時候，班上最喜歡上的是地理課，原因並非是我們對地理的求知慾，而是因為那個地理老師很會講歷史故事能引人入勝，所以我們每週都在期待地理課的來臨，很諷刺地，最討厭的卻是歷史課，因為那個歷史老師居然上歷史課可以不講歷史故事而且還經常考試。

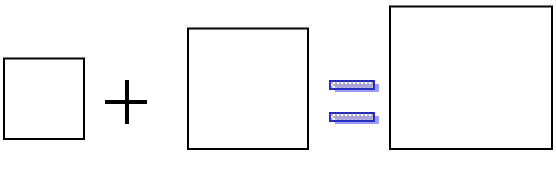
洪萬生教授到五常國中演講之後，我才開始「淺」讀數學史並且指定幾本書給學生當寒暑假讀物(《數學奇觀》、《阿草的葫蘆》)，學生也很有心閱讀。說起來很慚愧，因為從開始自修之後我才知道劉徽是那個時代的人，甚麼又是「青出朱入圖」。數學史、數學家故事很多可以編寫(改編也可以啊！只要能讓青少年喜歡就好了)並安排在教科書中，因此，對目前國編版國中數學課本的編寫，我有一點小小建議：活潑的漫畫是可以引起學習動機，但如果能以數學史料作主題就更美好了。

為了彌補目前教科書中數學史教材的缺乏，我和學校其他老師編輯五常國中數學校刊「五常數學」，內容包括數學家故事、數學百科及一些數學有獎徵答，目前已經有 30 期了，愈來愈受讀者(還包括其他科老師及學生家長)喜歡，簡直欲罷不能。雖然我們很辛苦而且沒有任何報酬，可是一想到能為學生服務、為教育奉獻也很值得。

現在，針對我個人在學校中與學生一同遭遇「數學史」的經驗，提出來與讀者一起分享。前一陣子，我在給學生上選修上冊 1-3「畢氏定理逆定理」證明時，因為有同學問起畢氏定理如何證明，我一下子就從歷史上搬出五種證法 show 了一下，並且讓他們比較：三國時代的趙爽面積證法、公元三世紀的劉徽、公元 12 世紀的印度數學家 Bhaskara、清朝的梅文鼎甚至於美國第 20 任總統 Garfield 在當眾議員時想到的簡單梯形面積算法，在講解這些圖形的剪貼時就得到不少掌聲，這也是我第一次把「數學史教材」在國中課堂上講解，我覺得這是種新的嘗試。

最後，我們來看看學生如何活用這些素材！本校第 25 期的「五常數學」，出了一道題目以有獎徵答的方式給學生作腦力激盪，題目如下：

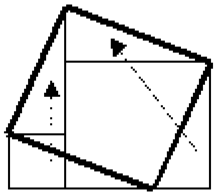
【題目】用剪貼的方式，把兩個正方形剪貼成一個大正方形，其面積要等於原來兩個小正方形面積的總和。



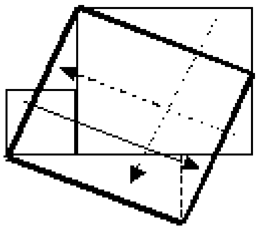
結果，學生表現不錯，大部分學生都會想到要使用商高定理，先作出以兩個小正方形之邊長為兩股之直角三角形，再作出以斜邊為邊之正方形，然後再用剪貼方式慢慢去填滿正方形。

但是二年七班卻有三位同學，表現令人刮目相看，他們的作法竟然是在數學史文獻上找出數種解法：

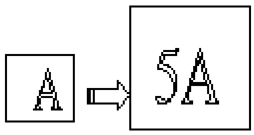
解一：這是清朝數學家梅文鼎的勾股弦定理的證明，國中生竟然能用來剪貼。

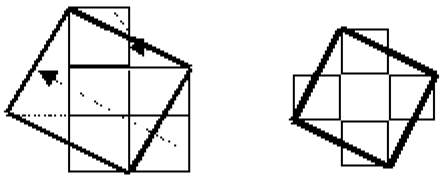


解二：(圖二) 是中國古代數學家劉徽的勾股弦定理的證明，本校學生也會活用。



在「五常數學」第 26 期中，有一題目要求用剪貼方法，作一正方形使其面積為已知正方形之 5 倍。上面提及的幾個學生研究的結果，得到如(圖三)的作法，看起來是三國時代數學家趙爽勾股弦定理的證明，也是學生用方格紙自行想出來的，真是令人嘆為觀止。





這些學生會自動從歷史文獻中搜尋劉徽、趙爽及梅文鼎的解法，可見「數學史教學」確能引起學生興趣及廣泛討論，所以將來應引入教科書。

負數的迷思

唐書志

台北市百齡國中教師

如果抽掉國中課本裡的負數，老師們將會同意今天看來漂亮完整的公式都會顯得支離破碎；不論是討論數學裡的一元二次方程式還是物理學的運動方程式，沒有了負數便左支右絀，無以為繼。也正因為負數大量出現在教材的各個角落，教師往往注意的是負數的運算性質，對於負數的認知卻著墨無多。什麼數字竟然會比 0 還小呢？為什麼要說一個遞減的等差數列有負公差呢？甚至於這個恆等式（a－b）（c－d）＝ac－ad－bc＋bd 又是怎麼算出來的呢？對於這一類問題，以往的觀點是認為一個「會教的」數學老師「必定」可以講得讓學生明白，而「會教」的定義往往取決於脈絡是否簡明、合乎數學的內在架構。

兩百年的困惑

18 世紀法國作家 Stendhal(1783-1843)對於老師「負負得正」的解釋顯然並不滿意。他回想從前學習負數的情況：

> 數學是不會矯柔造作的。在我的青春歲月裡，我相信那些使用數學做為工具的科學也必然同樣真確；別人這麼告訴我。但是當我發現沒有人能解釋負負得正(－×－＝＋)的原因時，你能想像我的感受嗎！（而這還是所謂「代數」的一項基本規則哩。）對我來說，這個沒有解釋的難題真是夠糟的了（它既然能導致正確的結果，無疑地也應該可以解釋）。而更糟的是，有人用那些顯然對自己都不清不楚的理由來對我講解。

他的老師顯然不能理解學生對於「負負得正」的抗拒，無論如何解釋，總是不能讓 Stendhal 信服；最後，只好搬出數學權威 Euler(1707-1783)與 Lagrange(1736-1813)：他們知道的也不比你多多少呀，可是都用得理所當然，你又何必鑽牛角尖呢？

> 我花了好長一段時間才知道：M. Chabert 根本不曾聽進我對於負負得正的抗拒，M. Dupuy 則老用縹緲的微笑回應，而那些我所請教的數學專家們總是報以嘲諷。我最後告訴自己：本來就必須負負得正嘛；畢竟，這個規則已經用了這麼久，而且導出的結果看來都無懈可擊。

或許是後來很多場合都用得到吧！Stendhal 被這個問題（負負得正）困擾許久，最後只好接受它；然而這個學習經驗卻使他感受深刻，一度還動搖了對於數學與數學教師的信心。

> 我摯愛的數學難道是個黑盒子嗎？我不知道該怎麼做才能到達真理；噢！那時是多麼熱切地想在邏輯或文藝上面吸收各種接近真理的方法啊！最終我以我可憐的、卑微的智力做出結論：M. Dupuy 可能在說謊；而 M. Chabert 則是一個自我欺騙的可憐蟲，完全不能理解旁人的抗拒心理。……我就教於 d'Alembert 在百科全書(Encyclopedia)中的數學文章，但他們自大的語氣以及對真理的傲慢卻令我排斥厭惡；而且，我對它們一點也不能瞭解。

從這段描述可以想見當時的 Stendhal 是多麼渴望求得心中疑惑的解答啊。時至今日，筆者猶記得班上同學拿著「（－5）＋3」四處問人，甚至放學跑來問老師的可憐眼神；雖然做是會做了，但仍然可以感受到她的彆扭與不安。時隔二百年，古今中外仍同樣有孩子為了讓自己接受負數的運算規則而困擾。

對於 Stendhal，數學這個黑盒子確實隱藏了太多，連大數學家 d'Alembert(1717-1783)都不得不拐彎抹角地陳述自己所認知的「負」概念哩 ：

> 負量與正量對合(The negative magnitudes are the counterpart of the positive ones)。負量始於正量所止之處。參見「正」條。
> 人們必須承認，要正確地勾畫負數(negative number)的想法並不容易；有的學者只是將他們不嚴密的說法加諸紛亂之上；說負數小於一無所有(negative numbers are below nothing)就如同在講一件無法想像的事情。……
> 為了使牽涉負量(negative magnitude)的代數運算能夠嚴謹與簡潔，人們傾向於相信與負量有關的正確想法必須簡單而且並非人造。假使人們想要展現此一真確概念，則須注意那被稱做負的、被誤認為在零的那一邊的量，常常是用真實量(real magnitude)表徵。這裡有個幾何學的例子，負直線與正直線的差異在於它們相對於某共同點上已知直線的位置。參見「曲線」條。由此可見計算(calculus)中所遇到的負數量(negative quantities)確是真實量(real magnitude)無誤。但是這些真實量必須賦予一種想法以有別於被接受者，例如：我們想找一個數字 x 的值，使之加 100 等於 50。根據代數規則，可以列 x+100=50，得到 x= －50。這表示 x 的量(magnitude)是 50，不過對 100 來說是減而不是加。也就是這個問題可以重新考慮如下：找某量 x 使 100 減之剩餘 50。如果問題真這麼寫，則可列式 100－x=50，x=50，x 的負形式將不存在。因此，負量確實表示假設置錯情境之正量。加諸量前之"－"號乃是做為消去運算以及修正假設中錯誤之提醒，一如前述例題。參見「方程式」條。
> 請注意此處所提及的只是諸如-a 或 a－b(b 大於 a)之孤立負量(isolated negative magnitude)。如果 a－b 是正的，換句話說，b 小於 a，則符號無論如何不會產生困難。
> 換言之，孤立負量並不存在於真實與絕對感覺(real and absolute sense)之中；抽象來說，-3 對於心靈沒有意義；當我說某人給另一個人-3 馬克(thaler)時，才意味著他從另一個人身上拿走了 3 馬克。……就現在的情況看來，要進一步發展這個想法是不可能的，不過這卻是一個簡潔得無可取代的方式；我相信，我能保證它對於所有牽涉到負量的可解問題都不會出錯。……

請注意 d'Alembert 提到「負數」與「負量」的不同態度。對他們而言，負數是一個「莫名其妙」的數，早在 Pascal(1623-1662)與 Descartes(1596-1650)的時代就這麼覺得了；Descartes 認為負根是方程式中錯誤的根，而 Pascal 則認為要從「一無所有」當中減去東西，更是門兒都沒有！所以 d'Alembert 必須賦予已經展現許多用處的「負量」一些額外意義；如同他所說的，「我相信，我能保證它對於所有牽涉到負量的可解問題都不會出錯」，但他也同樣認為「就現在的情況看來，要進一步發展這個想法是不可能的」。倘使一直堅持從現實量的角度去理解，Stendhal 終究要遇到這個不可解的困境：

> M. Chabert[被 Stendhal 問到]沒有辦法的時候，曾經不太恰當地強調，要我們將負數量看成某人的欠債。可是這個人該怎麼把 10000 法朗的債與 500 法朗的債乘在一起，好得到 5000000─也就是五百萬法朗─的收入呢？

這，不合宜或不顯明的比喻(metaphor)，或許也是我們老覺得課本上（不論哪一種版本）「負負相乘」的例題奇怪的原因吧。

另類觀點

除非觀點有所轉變，否則似乎難有更進一步的想法出現。果然，19 世紀的數學家們經由形式上的探討，對於負數有了新的看法。以往來自量的束縛不再存在，當時 H. Hankel 這麼寫道：

> 要建構普適性算術的環境，必須脫離直覺，將數學當做純粹智慧與形式的產物。它並非量與數的合成，而是具有思維特性的實體(intellectual object)；存在於現實的東西與關係對應得到，但並非必要。

從此以後，似乎再也沒有必要去為數系找尋自然界的實例和比喻了；新數字不再被視為「發現」，而是被看成「發明」。這並非表示 Hankel 等人不關心數系與真實世界的連結，他們仍舊規定形式運算不能導致矛盾；一個免於矛盾的定義才是邏輯上可行(logically possible)的；同時，單只有邏輯上一致的規則還不夠，如果不將系統內容的詮釋與應用考慮在內，這些系統放在一起也是毫無意義的。透過「不變原則(principles of permanence)」，保持一些特定的規則不變，賦予適當的定義，得以建構出負數的「形式化」面貌。例如：一開始先「定義」負數 $-n$ 是從方程式 $x+n=0$ 的解而來，其中 n 為自然數；同時假定加法與乘法的結合律、交換律成立，分配律也成立（根據「不變原則」），於是可以進行論證。

$(-3)+3=0$

$(-4)+4=0$

$\therefore[(-3)+(-4)]+[3+4]=0$（前兩式相加的結果）

$\therefore[(-3)+(-4)]=-7$（因為 $3+4=7$，再套用負數的「定義」）

那麼乘法是否也可以如此定義呢？從 $0\times x=x\times 0$（成立）開始，

$[(-3)+3]\times 4=0\times 4=0$，i.e. $(-3)\times 4+3\times 4=0$

$[(-4)+4]\times(-3)=0\times(-3)=0$，i.e. $(-3)\times(-4)+(-3)\times 4=0$

根據定義，可以得到 $(-3)\times 4=-12$，$(-3)\times(-4)=12$（似乎有負正得到負、負負得到正的影子）。當然，這些只是大概罷了，嚴密的論證還需要一些充份的準備。（這個時候，有沒有嗅到本世紀中「新數學」運動的一點味道了呢？）

中國的負數概念又是一條不同的路。根據李繼閔的說法，負數之所以很早為中算家所引進，乃是由於古代傳統數學中，「算法」高度發達和籌算「機械化」的成果。劉徽在《九章算術》的注文中提到：「今兩算得失相反，要令正負以明之」，所以負數在中國古代是一種與西方截然不同的概念，人們可以透過算籌的「正負術」推演解題；李繼閔指出，有些題目（例如方程章第三問）要不是因為籌算的緣故，用今天的眼光看，根本不必引入「負數」就可以解出答案。

單從這些例子，我們就看到完全不同於先前具體取向的兩種負數經驗：一個是西方的形式主義，一個是東方的籌算文化。漸漸地，西方部份數學家還瞭解到，負數的「相對」意義不見得非丟開不可；幾何的坐標化、向量的引介，以及負的電量、負的速度、負力……等等，往往因負數而使人類開展更廣闊的思考空間。人們不再將擴充數系的「正當性」訴諸現實，而是反過來，利用數去描繪現實情境與各種量。使用負數讓我們可以更有效率地解題：當代數學史家 Wagenschein 便說：「負數的運算法則是一種發明，但是卻是一種很好用的發明」。

非結論

不管以哪一種方式看待負數，今天都會運用它做很多事。然而令人好奇的是，學習者在學習過程中究竟是採取什麼樣的觀點面對負數呢？會像 Stendhal 一樣凡事去生活中找對應意義嗎？還是像 d'Alembert 一樣賦予「運算」額外的解釋呢？是像劉徽一樣把焦點放在「算法」上？還是像 Hankel 一樣任由心智去建構一個理想圖像呢？

對於部份數學教師而言，教完整數的加減法後，$(-5)+3$這樣的題目便幾乎不大可能再單獨出現了；負負得正的規則往往也只是一句口訣。但是對於學習者而言，一切真有那麼簡單嗎？也許他們的內心也正如 Stendhal 一樣正在天人交戰哩！教師是否曾經停駐自己的腳步，傾聽一下學生的聲音呢？當然，也許孩子們只需要一個簡單有趣的「遊戲規則」哩！誰知道？又是怎麼知道？

無論如何，我們大可以放膽試著從歷史實例中「考察認知特徵」，與學生身上所「觀察」到的相互「對照」；畢竟歷史不應該只是供我們做為新課程的話引或課餘的閒聊話題而已。德國數學家與教育家 Felix Klein 在 1908 年語重心長地告訴大家：**如果我們現在帶著批判的眼光去看中學裡負數的教法，常常可以發現一個錯誤，就是像老一代數學家如上指出的那樣，努力地去證明記號法則的邏輯必要性。……我反對這種做法，我請求你們別把不可能的證明講得似乎成立。大家應該用簡單的例子來使學生相信，或有可能的話，讓他們自己弄清楚。**

即使是近一世紀後的今天，無論是努力為學生「證明」記號法則還是努力教同學去「背」記號法則的老師，這些話都仍然受用。「會教」的老師讓自己和同學們聽得明白，也會讓自己和同學們想得明白、滿心歡喜。

參考文獻

1. 李繼閔(1992)：九章算術及其劉徽注研究。台北：九章出版社。
2. 郭書春匯校(1990)：九章算術。瀋陽：遼寧教育出版社。
3. 趙文敏: 數學史第一卷。
4. Klein, Felix (1996): 高觀點下的初等數學第一卷（舒湘芹、陳義章、楊欽樑譯）。台北：九章出版社。
5. Kline, Morris (1983): 數學史上冊、下冊（林炎全、洪萬生、楊康景松譯）。台　　北：久章出版社。
6. Boyer, Carl B. (1985): A History of Mathematics. New Jersey: Princeton University Press.
7. Hefendehl-Hebeker, Lisa (1991): Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. For the Learning of Mathematics, 11, 1, 26-32.

數學小故事

台北市長安國中 林倉億老師
台北市五常國中 邱靜如老師
高雄市中山高中 余酈惠老師

上帝和月球—6 vs. 28 完全數

上帝利用 6 天的時間創造了世界；月亮繞行地球只須 28 天；6 和 28 的數字是否有無特別之處呢？古希臘人以〝完全〞來替 6 和 28 命名，因為他們認為這些數是最完美的，為什麼呢？

畢達哥拉斯及其門徒稱 6 及 28 為完全數(或稱為完美數)，因為它們都是其真因數的和：

6 的真因數：1，2，3 其和$1+2+3=6$

28 的真因數：1，2，4，7，14 其和為$1+2+4+7+14=28$

所以，一個正整數的真因數和是本身，我們就稱它為完全數！

古人只知道四個完全數，分別是 6、28、496 和 8128，因此他們做了幾個有趣的猜測：

一、由於前四個完全數的末位數字不是 6 就是 8，而且還是依次出現，所以所有的完全數的末位數量都是 6 或 8，甚至是輪流出現的！

二、第一個完全數 6 是一位數；第二個完全數 28 是二位數；第三個完全數 496 是三位數；第四個完全數 8128 是四位數；所以第五個完全數一定是五位數，以此類推！這些有趣的猜測結果是對還是錯呢？讓我們先來看看如何找出完全數！

我們將歐幾里德和尤拉發現的結果寫成下面的定理：

設m是個偶數，則m是完全數的充要條件是存在一個質數p使得2^p-1是質數，且$m=2^{p-1}(2^p-1)$

這個定理告訴了我們如何去尋找這誘人的完全數，我們將$2p-1$這個數稱為梅聖尼數，而已知的梅聖尼質數只有 30 個，所以已知的偶完全數只有 30 個：前 24 個完美數是在 1975 年以前發現的，其中最後一個是$2^{19936}(2^{19937}-1)$，這是在 1971 年發現的，而這 24 個中有一半是在 1952 年以後發現的；而第 30 個完全數是在 1986 年 9 月被發現的！由上我們可以看出古希臘人的第二個猜測(第五個完全數一定是五位數，以此類推！)是錯的！不過關於第一個猜測（所有的完全數的末位數量都是 6 或 8，甚至是輪流出現的！）雖並不完全正確(因為 6 和 8 並未輪流出現)，不過，他們似乎猜對了一件事，只要是偶完全數，個位數不是 6 就是 8！為什麼呢？這是根據下面的定理：

對於任意的正整數n，令$a_n=2^{2n}(2^{2n+1}-1)$，則

若n是偶數，則a_n的個位數是 6 且十位數是奇數；

若n是奇數，則a_n的個位數是 8 且十位數是 2；

細心的讀者一定會發現：目前已知的完全數都是偶數，那有沒有 奇完全數呢？我們知道由歐幾里德公式所得到的完全數一定是偶數，那麼，不從歐幾里德公式可以找到任何一個完全數嗎？數學家們做了許多的努力，越覺得奇完全數存在的可能性越小！在 1973 年，數學家海琪斯透過電腦證明出

在 1050 以下沒有奇完全數的存在！他的證明全部有 83 頁，曾經由其他的數學家們予以詳細驗證，確定其過程是無誤的，所以，我們可以知道在 1050 以下，沒有奇完全數的存在！從 1973 年以來，其他的數學家依然透過電腦宣布在 10200 以下，沒有奇完全數的存在！(這並未經過數學家的詳細驗證！)

完全數如何求出？是否有無限多個？這兩個問題是數學家們在幾千年前就提出來了，然而，直到今日，這仍然沒有完整的答案，我們只能提出一部分的解答，更確切的說，我們只能說明那一種偶數是完美數，至於這種偶數是否有無限多個，及有無奇完美數的存在，這就有待後世的努力！

吵架的獨門解藥－220 vs. 284 親和數

跟好朋友吵架了，吵完後想要想要回復到以前那樣有說有笑的卻不知如何開始，教人十分苦惱！試試偉大的畢達哥拉斯的獨門解藥吧！拿出兩張薄薄的紙，一張寫上 220，另一張寫上 284，再揉成小丸子，兩人各吞一粒，之後就會雨過天青了！

你知道這獨門解藥的祕密嗎？讓我們用數學來一窺究竟吧！

220 和 284 我們稱之為親和數(或稱為親和數偶、友誼數、友善數)，所謂的親和數偶就是其中的每一個數的真因數(真因數就是不包括本身的所有正因數)加起來等於另一個數，以 220，284 為例：

$220 = 2^2 \times 5 \times 11$，
真因數：1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110，其和為 284
$284 = 2^2 \times 71$
真因數：1，2，4，71，142，其和為 220

如此〝你中有我，我中有你〞，難怪畢達哥拉斯會拿它們來做為治療友誼創傷的妙藥了！還有其他的親和數偶嗎？

其實親和數鍊也稱為交連數(sociable number)，1970 年，美國的 Steve Root 也從自然數 1 到六十六億中去找到好幾組交連數，其中大多都為四環親和鍊，所以數學家就推測可能有無限多組的四環親和鍊存在於自然數中，但僅止於推論，而沒有證明可以讓人信服這樣的猜測，現在大概只發現了四環親和鍊、五環親和鍊、28 環親和鍊，及一組兩個數的親和數！並沒有發現三環親和鍊，那到底有沒有三環親和鍊呢?如果有，是那組數呢？如果沒有，又怎麼證明呢？這是個至今仍未解出的一大難題！