HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十五卷 第十二期 目錄（2012年12月）

解析幾何之為用：以橢圓平行弦中點共線為例

洪萬生
台灣師大數學系退休教授

一、前言

最近上「數學史」課程時（**2012** 年底），曾與選修學生討論「橢圓平行弦中點共線」問題，陳秉君與黃書豐立即連結到仿射變換（**affine transformation**）。緊接著，黃書豐又提及純解析幾何之證法，簡潔又有洞見，值得在此引述。

目前有關圓錐曲線之討論，已經逐漸在高中課綱中淡化，從數學教育不只是強調技能傳授的觀點來看，實在相當可惜。這是因為一般人願意多少參與數學知識活動（或至少不排斥）數學的主要原因之一，顯然是它的有趣而非有用面向。此一有趣面向可以訴求數學知識的美學經驗，從而激發一般學生的好奇心。當然，如果連一點起碼的好奇心都付諸闕如時，那麼，我們只好仿效孔老夫子：「舉一隅而不以三隅反，則不復也」。

在本文中，我除了討論橢圓的例證之外，也打算論及拋物線，並藉此說明在仿射幾何（**affine geometry**）的脈絡中，拋物線與橢圓或圓是「不同類」的幾何圖形。同時，我們也試圖說明這種「仿射思考」（**affine thinking**）是我們的生活經驗的一部份，因此，當然值得我們深入掌握。

二、橢圓平行弦中點連線

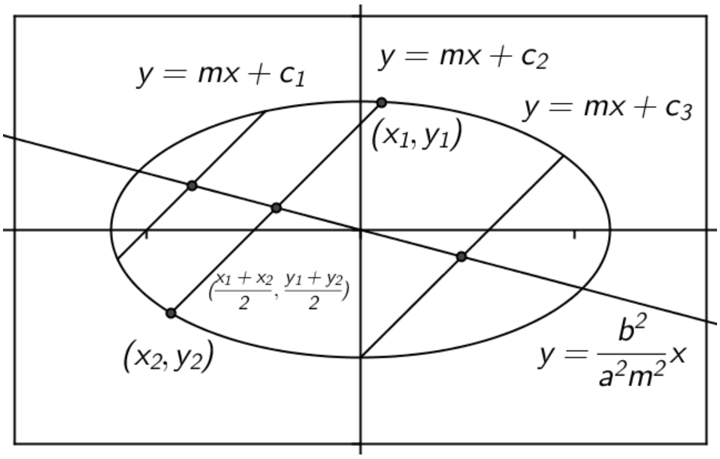
在座標平面上，給定一個橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，及一條直線 $y=mx+c$，參看圖一。假設此一直線交橢圓於兩個交點 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，則兩個交點之間的線段構成橢圓的一條弦，當 c 值變動時，即可構成橢圓的一組平行弦。現在，這個弦的中點座標 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ 如下：

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-(\frac{a^2m}{a^2m^2+b^2})c \text{ ， } \frac{y_1+y_2}{2}=(-\frac{a^2m^2}{a^2m^2+b^2}+1)c$$

由於這個點一定會落在直線

$$\frac{y}{x}=\frac{(1-\frac{a^2m^2}{a^2m^2+b^2})c}{(\frac{a^2m}{a^2m^2+b^2})c}=\frac{1-\frac{a^2m^2}{a^2m^2+b^2}}{\frac{a^2m^2}{a^2m^2+b^2}}=\frac{b^2}{a^2m^2} \text{ ，}$$

而且此一直線（方程式）只與原直線的斜率 m 有關，而與其截距 c 無關，因此，得證此一平行弦的中點，都落在最後這一條通過橢圓中心的直線上。



圖一

三、仿射變換的觀點

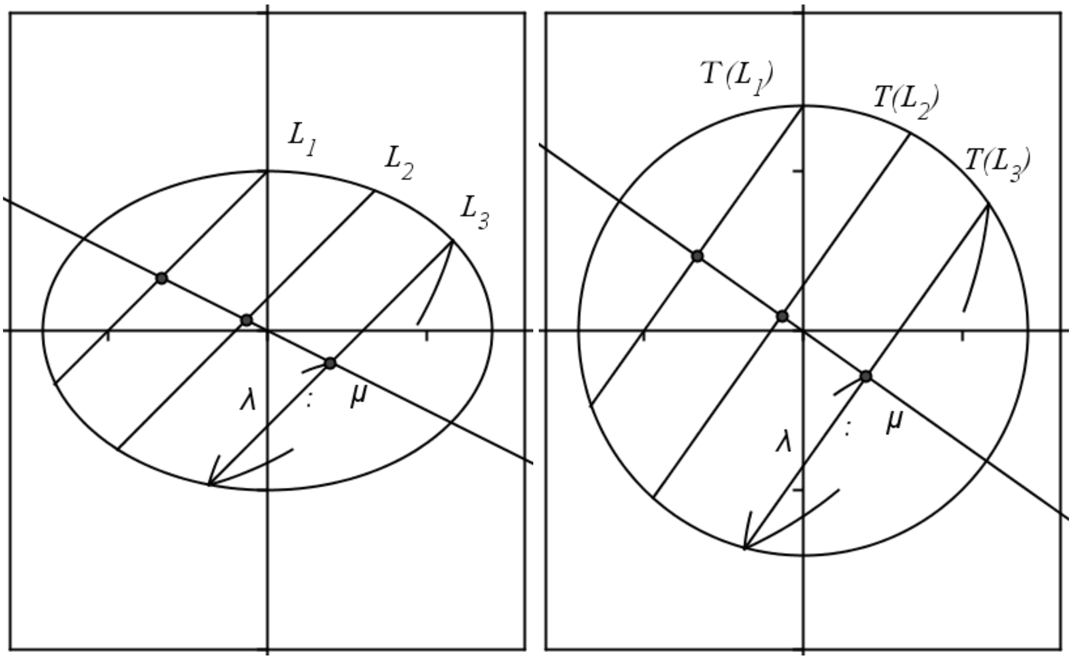
從座標平面（定義域）到另一座標平面（對應域）的仿射變換

$$T:R^2\to R^2$$

可以表現為如下形式：

$$T(x,y)=(ax+by+e,cx+dy+f)$$

由於上述橢圓中心落在座標原點，故吾人可取 $e=f=0$ 。吾人可利用此一變換將這個橢圓映成另一座標平面上的一個圓。



圖二

現在，由於仿射變換可將平行線映成平行線，在定義域中的同一直線上比值為 $\lambda:\mu$ 的兩線段，會映成對應域中的兩個比值相同的線段，所以，橢圓的一組平行弦一定會映成圓的一組平行弦。後一組平行弦（在圓中）的中點必定共線 －亦即圓的某直徑上，這是圓的性質之一。最後，利用前述仿射變換的逆變換，將此圓及其平行弦拉回原橢圓的平行弦，即可得其所證。

運用仿射變換，吾人不僅獲得一個觀看的高觀點，讓較低層次的數學問題，變得更容易入手，同時，也讓我們掌握了克萊因（**Felix Klein**）愛爾郎根綱領（**Erlanger Programme**）的結構統合進路。這是他將幾何學定義為變換群不變量（**invariant under transformation group**）的一種實踐！在本例中，所謂的仿射幾何，就是研究仿射變換不變量的一種幾何學。至於歐氏幾何學，則被他定義為研究剛體運動（**rigid motion**）不變量的一種幾何學了。不過，我們也要特別注意：長度與角度並非仿射變換下的不變量（**invariant**），因此，相關的歐氏幾何命題或定理在仿射幾何脈絡中，就無法成立！

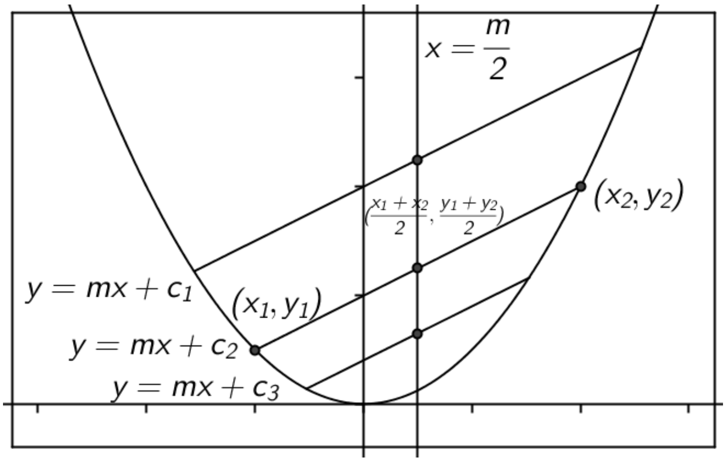
再者，由於一般的仿射變換乃是一個非奇異（或一對一）線性變換（**non-singular linear transformation**）再加上一個平移向量的結果，因此，仿射幾何乃至於歐氏幾何之研究，也自然地可以運用線性代數這種極有威力的工具。這或許也解釋了何以線性代數（**linear algebra**）之學習，必須在中學數學教師的培育過程中，扮演一個關鍵的角色。

四、拋物線平行弦中點的軌跡

考慮拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=mx+c$ 相交所得到的弦，參看圖三。當 c 值變動時，這一組平行的直線交拋物線成為一組平行弦。令這拋物線與直線的兩個交點分別為 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) ，則其中點之座標如下：

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2}\text{ ， }\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m^2}{2}+c$$

因此，這組平行弦的中點軌跡也形成一條直線 $x=\frac{m}{2}$ ，亦即拋物線的平行弦也共線。還有，這一條直線一定與拋物線的軸平行。（參看圖三）



圖三

根據上述最後一個事實，我們可以推知：拋物線與橢圓（或圓）並不互為仿射不變量（**affine invariant**），也就是，經由仿射變換，橢圓與拋物線無法互換，從而其各自的幾何性質也大都無法互推，所以，在仿射幾何的脈絡中，它們當然也就不能如同橢圓與圓一樣，視為同一種幾何物件（**geometric entity**）了。

五、結論

「橢圓平行弦中點共線」或「橢圓平行弦中點的軌跡為一直線」，哪一種提問方式較容易為解題者或學生所理解？顯然，前者可視為綜合幾何（**synthetic geometry**）問題，而後者因涉及軌跡，故應可歸類為解析幾何（**analytic geometry**）問題才是。因此，如果按上文所引之（高中）解析幾何的方法來求解，那麼，後一種版本似乎比較恰當。

不過，如果我們利用仿射變換來求解，則哪種提問似乎都無妨！這是因為在仿射變換下，直線自然會映成直線之故也。由此可見，仿射的高觀點之利基，真是不言可喻了。這或許也解釋了何以在仿射幾何中，圓與橢圓可視同一種幾何物件吧。

事實上，這種「仿射思考」也可以呼應我們的日常生活經驗，譬如，當我們斜視一個正方形或長方形桌面時，難道我們不都看成為平行四邊形嗎？在仿射變換下，這三個幾何圖形是沒有區別的。還有，當我們觀看一個很大的圓形水池時（譬如，台師大正門口那一個，圖四），我們也都是看到一個橢圓形。這些視覺經驗在我們表徵（**represent**）立體幾何圖形時，尤其有著極大的便利性，譬如圖示一個球體的赤道面時，我們通常使用了一個橢圓形，又如圖示一個正立方體時，我們通常將側視面畫成平行四邊形。這種

圖示方法與視覺經驗的合而為一，在初等幾何學的學習過程中至為重要。現在，我們則體會到原來這也與仿射思考息息相關！

圖四

另一方面，這個例子也啟發我們：當人類從不同的觀察系統（或座標系統）來觀看同一個幾何物件（**geometric entity**）時，在不同系統進行觀察的我們與他人，針對同一個物件，可能看到共相與殊相，前者可以類比為前述之變換不變量，至於後者，則是無法共現在不同系統的「事實」。不過，由於按克萊因的幾何分類判準，歐氏幾何是仿射幾何的子系統（等價地，剛體變換群是仿射變換群的子群），一旦吾人擁有了仿射幾何高觀點的素養之後，我們就有可能優游出入這兩種幾何，而隨時發揮彈性與包容的思維能力。由此可見，彈性與包容可以自然地成為「客觀」思維能力訓練的一環，而這，竟然也可以從抽象的數學思維得到啟示，真是讓我們十分欣慰。

致謝：本文圖形由黃書豐協助繪製，另外，台師大門口水池由黃俊瑋拍攝，謹此申謝。

過圓與橢圓外一點求作切線

黃書豐、陳秉君、黃俊瑋[1]
國立臺灣師範大學數學系

一、過圓或橢圓外一點求切線

已知圓外一點求切線問題，是高中圓與直線相關單元之中，相當重要的主題，在現今課程綱要之前的舊課程綱要與舊版本之中，也討論了過拋物線、橢圓與雙曲線一點求其切線的問題。而討論的方式，主要是將圓與直線放入坐標系，亦即透過解析幾何的脈絡，利用圓與直線的方程式，以及相關性質與工具來處理該問題。譬如在圓的例子，可透過討論下列聯立方程組：

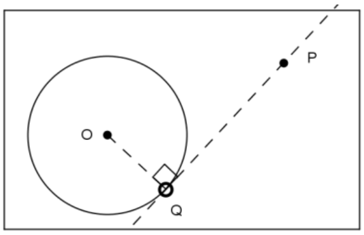
$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \end{cases}$$

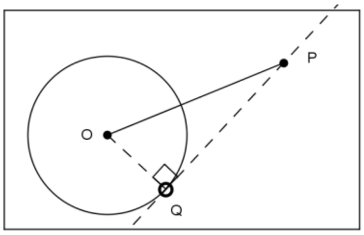
代入整理得到交點的一元二次方程式。這時可以利用相切時只相交於一點（重根），亦即判別式等於 **0** 來求解。同理，可求通過橢圓（或其它圓錐曲線）外一點之切線（方程式）。

然而，目前的高中教材裡，並不討論存在性與可否作圖性的問題，而是直接從圖形上直觀地假設了過圓外一點可作圓或橢圓的（兩條）切線──亦即假設了存在性。同時，上述處理的過程，主要依賴著代數式化簡、運算與求解，雖能順利求得切線方程式，也解決了問題，卻無法切確地告訴我們怎麼做切線。

不過，當我們脫離坐標系的框架時，回到古典幾何的世界，整個問題便離不開尺規作圖與綜合論證。究竟過圓外一點，如何以尺規作圖的方式作其切線呢？

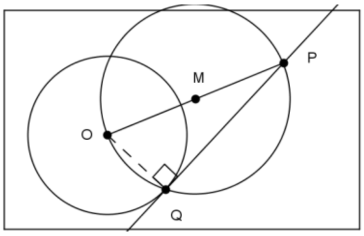
我們先來分析一下。如果可以畫出這條切線，那麼，它應該會是什麼樣子？





1. 假設圓O外一點P可作切線$\overline{PQ}$，由圓切線性質可以得知交點Q所成的半徑$\overline{OQ}$會與$\overline{PQ}$垂直。
2. 那麼，現在的問題變成「如何利用尺規作圖找到這交點Q」，才能夠把我們假設出的切線畫出來。
3. 畫出一條輔助線$\overline{OP}$，從圖形中可以看到ΔOPQ是直角三角形，且弦長$\overline{OP}$與股長$\overline{OQ}$為已知（雖然Q點的位置是未知，但已知Q點（切點）在圓O上，故可確定$\overline{OQ}$長等於半徑長）。
4. 尺規作圖中利用 **RHS** 全等性質作出

[1] 黃書豐、陳秉君為台師大數學系四年級學生，黃俊瑋為台師大數學系博士班學生。



的直角三角形的方法，主要是利用其外心在斜邊中點上的性質作圖。

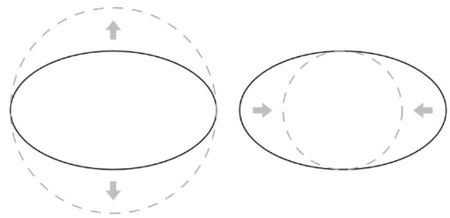
5. 所以我們應作出個以斜邊$\overline{OP}$的中點M為圓心、且過 **O**、**P** 兩點的圓，在這圓上找到Q點滿足股長是$\overline{OQ}$的直角三角形。
6. 而這Q點(切點)應會落在圓O與圓P上，自然是這兩圓的交點了，至此我們確定了Q點的位置，也自然能夠將切線$\overline{PM}$作圖出來。

作圖完畢

過圓外一點求切線的問題解決了，那麼橢圓呢？橢圓並沒有像圓這般，有著切線會與切點形成的半徑垂直，作橢圓切線似乎不是一件簡單的事。以下，我們提供兩個證明方法，證明過橢圓外一點的確可作其切線。並且在第二個方法之中，除了證明可作圖性之外，更進一步利用尺規作圖，作出此切線。

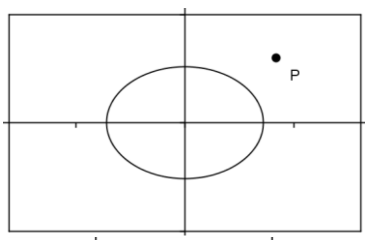
二、仿射變換的威力－連結圓與橢圓

有關圓的切線問題解決了，相反地，橢圓的情形似乎並不容易，也許你會好奇，我們是否能將「圓」與「橢圓」之間作一個連結呢？是否可以利用圓的可作圖性，來完成橢圓的可作圖性呢？答案是可以的。以下，我們透過仿射變換，[2]進一步證明：「過橢圓外一點，可以作此橢圓之兩條切線。」



Δ 橢圓和圓似乎存在某種連結

命題：給定一橢圓以及橢圓外一點P，求通過該點的兩條橢圓切線。



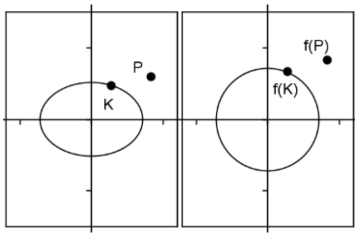
1. 為了討論方便，我們會先賦予它一個坐標系（如左圖），設橢圓方程式為
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{，其中}a>b>0\text{。}$$

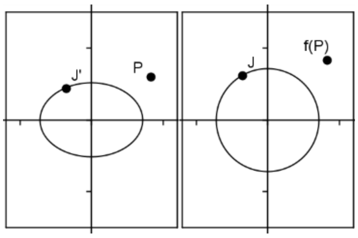
2. 令一仿射變換$f: R^2 \to R^2$為$(x,y)| \to (x,\frac{a}{b}y)$。[3]從函數中可以觀察出此變換是對$y$軸方向作伸縮的動作，這變換是否能夠讓我們將橢圓拉長成圓呢？

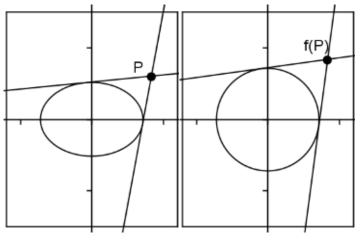
---

[2] 關於仿射變換，讀者們可以把它想像成將一張平面的橡皮膜沿著某個特定方向拉長或擠壓後，其上面圖形的變化。

[3] 此函數f是一個一對一且映成函數，其反函數$f^{-1}: (x,y)| \to (x,\frac{b}{a}y)$亦為一對一映成函數的仿射變換。







3. 任取橢圓上的一點K，其坐標可設為 $\left(x_1, \pm\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2}\right)$，經過 $\boldsymbol{f}$ 函數作用後的 $f(K)$ 坐標經簡化後可得到 $\left(x_1, \pm\sqrt{a^2-x_1^2}\right)$，是個與原點距離為定值$a$的點，在半徑為$a$的圓O上。
4. 上個步驟證明了橢圓經過$\boldsymbol{f}$函數作用後會落在圓上，但這還不足以說明橢圓會變成圓，有可能只是變成圓的某幾段弧而已，所以還必須說明，圓上的每一點都是從橢圓變換來的才行。
5. 任取圓 O 上一點 J 其坐標可設為 $\left(x_2, \pm\sqrt{a^2-x_2^2}\right)$，在$f$函數只會對$y$坐標作變化的特徵上，自然會去找橢圓中相同$x$坐標的點$\left(x_2, \pm\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2}\right)$，經確認，該點會經由 $\boldsymbol{f}$ 函數變換成J點。
6. 至此可以得知橢圓可以經由f函數變成圓，而且可以利用反函數f^{-1}再變回橢圓。
7. 既然我們找到橢圓與圓的關聯性，是否橢圓切線也能夠與圓切線作個連結呢？幸運的，由於仿射變換會將一直線變換至另一直線，[4]因此我們剩下要做的就是只要檢驗是否符合切線的定義。
8. 已知可以在圓外一點$f(P)$對圓作兩條切線L_1與L_2，由於L_1、L_2皆通過$f(P)$，所以 $f^{-1}(L_1)$、$f^{-1}(L_2)$ 皆通過P點，同樣的，L_1、L_2皆與圓相交於一點，所以 $f^{-1}(L_1)$、$f^{-1}(L_2)$皆與橢圓交於一點，[5]再加上直線的條件可以統括成「$f^{-1}(L_1)$為一條通過P點且與橢圓相交於一點的直線」，即為題目所求。

如此，我們利用仿射變換，以及已知過圓外一點可作兩條切線的性質，我們得證過橢圓外一點，同樣可作橢圓的兩條切線。

三、重新擁抱尺規作圖與古典幾何

或許你會認為，前述利用「變換」的方式太過抽象，對於一般中學生而言更非易事。接下來，我們先利用尺規作圖在已知一橢圓與橢圓外一點 **P** 的條件下，作出過 **P** 點的直

---

[4] 請讀者自行檢驗。

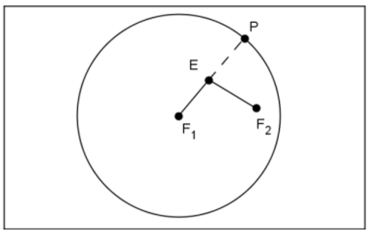
[5] 令$L_1 \cap$圓 O與$L_2 \cap$圓 O分別為L_1、L_2與圓 O 的交點集，其各含唯一一點，在一對一且映成函數下，$f^{-1}(L_1 \cap \text{圓 O}) = f^{-1}(L_1) \cap f^{-1}(\text{圓 O}) = f^{-1}(L_1) \cap$ 橢圓，即$f^{-1}(L_1)$與橢圓相交於唯一一點，L_2亦同。

線，最後，再以綜合幾何（**synthetic geometry**）的進路，證明該直線確實與橢圓相交於唯一一點，符合切線定義。

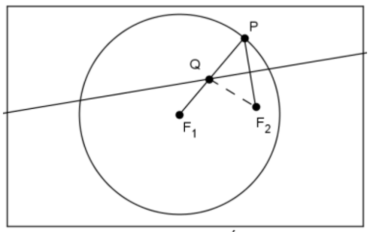
但是，在開始討論切線之前，我們必須先思考我們是如何利用尺規作圖作出圓錐曲線的，這是個很有趣的問題，畢竟從「規矩成方圓」的說法來看，並不包含圓以外的曲線作圖，但是利用橢圓的定義，[6]可以利用尺規作圖作出橢圓上的點，以此為突破口，使我們能夠在尺規作圖中討論圓錐曲線。

橢圓是與兩焦點距離合為定值的點集合，而在尺規作圖中談的定值，往往會令人聯想到圓半徑、平行線距等等，接下來的作圖法中便是以圓半徑作為定值來繪製橢圓圖形。

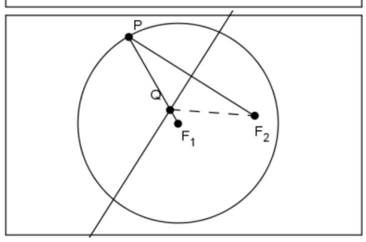
訴求：利用尺規作圖，繪出橢圓。



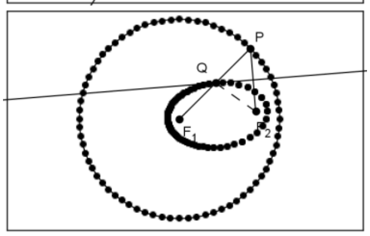
1. 給定一圓F_1以及圓內一點F_2。如果橢圓上一點E至F_1與F_2的距離和等於圓F_1的半徑，將會有何性質呢？我們接著看下去。
2. 延長$\overline{F_1E}$交圓F_1於P點，由假設，$\overline{F_1E}+\overline{F_2E}$等於半徑$\overline{F_1P}$，可以得出$\overline{F_2E}=\overline{EP}$，所以$E$點應會落在$\overline{\mathrm{PF_2}}$的中垂線上。



3. 那麼現在讓我們反向操作，取圓上任一點P，作$\overline{\mathrm{PF_2}}$的中垂線交$\overline{\mathrm{PF_1}}$於Q點，[7]一樣可以得到$\overline{F_1Q}+\overline{F_2Q}=\overline{F_1Q}+\overline{QP}=\overline{F_1P}$。



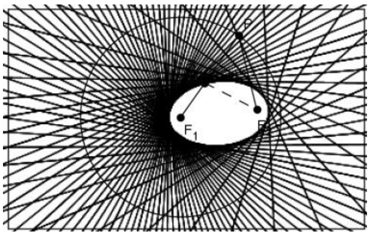
4. 接著嘗試看看圓上的其他點，利用同樣步驟，也能夠得出$\overline{F_1Q}+\overline{F_2Q}=\overline{F_1Q}+\overline{QP}=\overline{F_1P}$。



5. 如果我們把圓上的每一點P都使用同樣步驟作出Q點，而且每個Q點都會符合$\overline{F_1Q}+\overline{F_2Q}$ =半徑$\overline{F_1P}$，我們便可以作出以F_1、F_2為焦點且與兩焦點距合為定值$\overline{F_1P}$的橢圓。

[6] 平面上到兩個固定點的距離之和是常數的點之軌跡。

[7] 讀者可以自行嘗試如果點F_2在圓外，$\overline{\mathrm{PF_2}}$的中垂線交$\overline{\mathrm{PF_1}}$的延長線於Q點將會出現何種圖形。

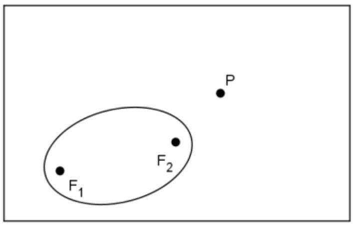


6. 特別的，每一條$\overline{\mathrm{PF}_2}$的中垂線都會像圖中般的包裹在橢圓的外面，它們都是橢圓的切線，而橢圓是它們的包絡線。[8]經由觀察得知，這些包絡線即為橢圓的切線。

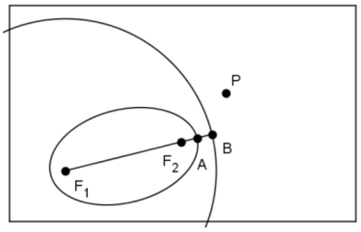
既然我們可以透過包絡線繪製出一個橢圓。那我們能不能反向操作，給定一個橢圓，求出它的切線呢？就讓我們延續這個想法，繼續下去吧。

命題：給定一橢圓以及橢圓外一點，求通過該點的兩條橢圓切線。

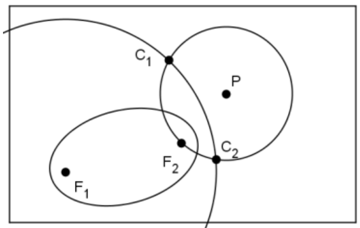
(一) 尺規作圖



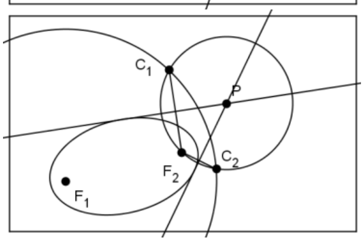
1. 給定一橢圓，F_1、F_2為其焦點以及圓外一點P。
2. 為了要利用剛才繪出橢圓的方法來作出切線，所以必須要作出以一焦點為圓心、橢圓上一點至兩焦點距的長度合為半徑的圓。
3. 作$\overline{F_1F_2}$的延長線交橢圓於A點，並在這條延長線上找到B點使得$\overline{BA}=\overline{F_2A}$，這樣一來$\overline{F_1B}=\overline{F_1A}+\overline{AB}=\overline{F_1A}+\overline{F_2A}$便是我們所要的半徑長，故以$\overline{F_1B}$為半徑作圓$F_1$。



4. 從之前的作圖中我們得知，此圓上任一點與F_2所作的中垂線便是橢圓的一條切線，而我們現在要找的切線必須滿足通過P點的條件，如此一來問題就變成「如何找到圓F_1上一點C，使得P點落在$\overline{CF_2}$的中垂線上」。



5. 如果P點在$\overline{CF_2}$的中垂線上，則$\overline{PC}=\overline{PF_2}$。故以$\overline{PF_2}$為半徑作圓$P$，$C$點應同時落在圓$P$與圓$F_1$上，於是取圓$P$與圓$F_1$的交點$C_1$與$C_2$。



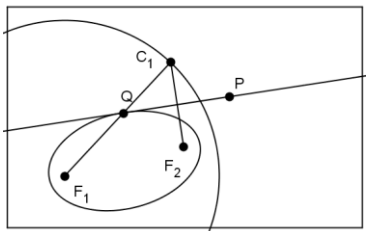
6. 作C_1F_2與C_2F_2的中垂線，便是我們所要求的通過P點之橢圓切線，至於為何這條線會是橢圓切線，將在後面詳細說明。

繪圖完畢

(二) 證明

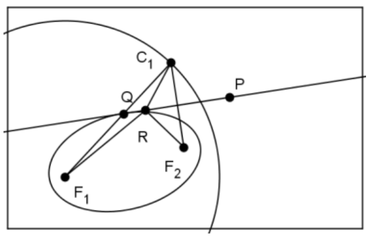
[8] 由一些曲線族構成的網絡圖案，它有一輪廓為一條曲線，這個輪廓的曲線我們稱為這曲線族的包絡線(envelope)，在這次我們所討論的曲線族便是這些$\overline{\mathrm{PF}_2}$中垂線的集合。

1. $\overline{C_1F_2}$與$\overline{C_2F_2}$的中垂線與橢圓「有」交點



作$\overline{\mathrm{C_1F_1}}$，並與$\overline{C_1F_2}$的中垂線相交於$Q$點，由於$Q$在$\overline{C_1F_2}$的中垂線上，故$\overline{\mathrm{QC_1}}=\overline{\mathrm{QF_2}}$，則$\overline{\mathrm{QF_1}}+\overline{\mathrm{QF_2}}=\overline{QF_1}+\overline{QC_1}=\overline{F_1C_1}$，意思是$Q$點至兩焦點距離合等於圓$F_1$半徑，而當初圓$F_1$的半徑便是從橢圓上的點至兩焦點距離和定出來的，故$Q$點該橢圓上，換句話說，$\overline{C_1F_2}$的中垂線與橢圓交於$Q$點。$\overline{C_2F_2}$的狀況亦同。

2. $\overline{C_1F_2}$與$\overline{C_2F_2}$的中垂線與橢圓交「唯一」一點



如果$\overline{C_1F_2}$的中垂線與橢圓除了交於上述的Q點外還交於R點，則R點同時符合中垂線性質$\overline{RC_1}=\overline{RF_2}$與橢圓性質$\overline{RF_1}+\overline{RF_2}=\overline{F_1C_1}$，經過代換後得到$\overline{RF_1}+\overline{RC_1}=\overline{F_1C_1}$這樣的等式，該等式描述了$\Delta\mathrm{C_1RF_1}$三邊長的關係，由於三角形任兩邊合大於另一邊，故$\Delta\mathrm{C_1RF_1}$不存在，意即$R$會落在$\overline{C_1F_1}$且在$C_1F_2$的中垂線上，也就是我們的$Q$點，得$R=Q$。

證明完畢。

四、結論

圓的問題易於處理，[9]推廣到橢圓時則不然，對於一般的中學生而言，若欲以尺規作圖作出過橢圓外一點的切線，恐怕需要一定的數學與幾何分析能力。而本文中，我們先從另一個角度切入，先利用仿射變換，將圓與橢圓連結，在解決了「給定圓外一點，求作切線問題」之後，利用變換的不變量（**transformation invariant**），即將圖形的交點（切點）映至交點（切點），進而解決此一問題。最後，我們也提供一個如何利用尺規作圖與綜合幾何，「作出」過橢圓外一點之切線，並證明其的確是切線。在這裡也鼓勵讀者們不妨嘗試找出一個新的方法，或許在嘗試的過程中會看見數學不同的視野，對數學也有不同層面的認識喔！

---

9 關於圓外一點求作切線，僅需 8 年級的相關數學知識即可。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瓊芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）
莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、
鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、
賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！