HPM通訊

第十五卷 第六期 目錄（2012年6月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

高觀點、HPM 與拱心石課程

洪萬生
台灣師大數學系退休教授

一、前言

在因應新時代的教師教育之新挑戰中，美國 **CBMS** 對於大學數學系鄭重呼籲，希望他們負起培育數學教師的重責大任。他們主要的建言之一，就是：州立大學數學系應該

> **支持一個拱心石課程序列 (capstone course sequence) 的設計、發展與供應，在此一序列中，中學數學的概念性之困難、根本理念和技巧，都要從高觀點 (advanced standpoint) 加以檢視。**[1]

基於類似關懷，以及**Hans Freudentahl**的「垂直數學化」**(vertical mathematisation)** 之主張，我們曾經執行一個有關「縱深統整」的研究計畫，[2]針對類似如下之問題進行研究：

> **九年如何「一貫」？國小圓面積公式 ＝ 3.14 ×半徑×半徑，國中圓面積公式 ＝ π ×*r*×*r*（*r* 為半徑），為什麼將 3.14 改成為 π？國中學生有此一問時，教師如何回答？教師需要有高觀點 (advanced viewpoint) 嗎？教師需要「垂直」思考的能力嗎？**

或者，我們更應該追問：大學數學系微積分課程中有關圓面積公式的「重訪」，譬如，運用定積分 $2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 來計算或驗證半徑 ***r*** 的圓面積等於 πr^2，如何有助於此一問題的釐清與恰當回應？

---

[1] 引 CBMS (2000), p. 123。他們認為這一課程理念對於未來教師之培育尤其有價值。此外，它對數學學習所提供廣泛的歷史文化視野以及洞察力，對於其他的數學主修也極有幫助。

[2] 參考洪萬生，《中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路》(NSC 93-2521-S-003-015-, 2004/08/0-2006/07/31)。

當然，上述這個問題值得提出，乃是由於我們的中學數學教學評量，似乎總是被國中基測試題牽著鼻子走，[3]以致於雖然多數教師仍然非常堅持數學論證（譬如國中幾何證明）的重要性，但是，他們的聲音在基測分數錙銖必較的對比下，往往顯得微不足道。在這種情況下，一般人的數學經驗不是恐懼，就是不知所云，「最好的」回憶，頂多如同下引某明星大學一位高材生的經驗談：高中（甚至國中）解題教學的零碎化！這出自她在閱讀《數學女孩：費馬最後定理》之後的反思：[4]

> **看完這本書，闔上最後一頁時，我的第一個想法是：我高中的數學課都白費了！我會這樣想不是因為我完全不懂本書的數學內容；相反地，就是因為我可以理解大部分的內容，才會有這樣的愧疚。為什麼我都知道各個章節—畢氏定理、質數、倍數、公因數、複數、同餘等，以前對數學參考書上各種題型也瞭若指掌，可是卻從不知道原來他們都是可以串在一起的！說自己是數星星的人也許還太好聽了，還不如說自己是在房間裡看著天文書「念」星星的人，連真正的天空都從未好好仰望過。**

按：這部數學小說由日本作家結城浩所寫，[5]其中，他藉由勾勒費馬最後定理證明的推論「地圖」，而不斷強調高觀點的結構面向之重要性。

上引這位學生的心得，顯然是基於以數學知識結構為尚的《數學女孩》之啟發。對於數學教師或未來教師來說，我們究竟可以經由哪些進路，來強化或重建他們對於所授知識的結構完整性呢？我想解決或因應之道，就在於仿照克萊因（**Felix Klein**）的《高觀點下的初等數學》(***Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint***)（古典的），或是（摩登的）**MAA** 的拱心石課程（**capstone sequence course**）理念。再不然，我們的「縱深統整」計畫成果也不妨參照。以下，我們依序簡介克萊因的高觀點、**MAA**（**Mathematical Association of America**，美國數學協會）的拱心石課程，微積分基本定理的拱心石意義以及我們自己的「縱深統整」，歡迎讀者參照比較，並惠賜指教。

二、從高觀點看初等數學

德國偉大數學家克萊因（**1849-1925**）是十九世紀哥廷根學派的掌門人，他除了數學研究貢獻卓著之外，也是一位身體力行的教學名師。顏志成在他的〈哥廷根學派的領導人－ 克萊因 **(Felix Klein)**〉中，曾指出克萊因：

> **對於上課的主題，他會介紹給學生很多可供參考的資料，他教學的原則是讓學生自己去證明定理，他只提示一些方法，並且認為要學好課程的話，在課堂上一小時，在課堂外就需要花四小時來研讀 (Reid, 1986, p. 48)。此外，他講課擅長於綜觀全**

[3] 在十二年國教實施之後，國中基測即將走入歷史，不過，數學的評量方式是否可以喘一口氣呢？我們且走著瞧好了。
[4] 這位學生選修我所開授的「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」（台大通識課程，2011 年秋季班）。
[5] 有關本小說內容簡介及評論，參考洪萬生，〈數學女孩的故事〉，台灣數學博物館「數學小說」欄，2011/06/15 刊登。

局，「他能在絕然不同的問題中，洞察到統一的思想，並有一種集中必要的材料來闡明其統一見解的藝術。」（Reid, 1986, p. 48）。而他的學生 R. Fricke 在他 70 歲生日的紀念文上，也同樣提到他的講義組織嚴謹、確實、清晰和優美，並且以統合的精神為基調，來介紹數學知識的方法，是非常受學生歡迎的。事實上，克萊因認為討論班可以刺激學術研究，討論班的主要課題，通常是他正從事研究的問題。在討論班上，他那豐富而多采的思想以及處理問題的方法，完整地傳給了學生。

這種進路，當然也體現在克萊因針對中學數學教育改革所提出的主張，譬如，**1905** 年他在 **Meran** 會議所公布的中學數學課程大綱，其實就有了相當真實的呼應：

- 教材的選擇與安排，應適應學生學習心理的自然發展。
- 融合數學的各個分支，密切地聯繫與其他各學科的關係。
- 不忽略邏輯訓練，實用方面也應置為重點，以便充分發展學生對自然界和人類社會諸現象之數學觀察能力。
- 為達到此等目的，應養成函數思想和空間觀察的能力，作為數學教授的基礎。

為了聯繫初等數學課程和高等數學之間的關係，克萊因在**1908**年出版了他的數學教育名著《高觀點下的初等數學》，利用算術、代數、分析以及幾何的例證，深入說明他的數學教育思想。

根據黃俊瑋的介紹，[6]克萊因以「中學數學教學講義」為目的，為中學數學教師們寫作此書，從現代數學的觀點出發，向數學老師以及成熟的學生們介紹數學教學的內容及基礎。本書主要由其助手們，根據他在哥廷根大學的講課內容整理而成，（德文）原著分成了上卷「算術、代數、分析」以及下卷「幾何」。本書除了展示「數學家」的高觀點，進而統整初等數學知識之外，克萊因也順勢提出他有關數學教育的見解與主張。

譬如說吧，他在第一部份《算術》第四章介紹複數系時，就「先從歷史的觀點切入，卡當（**Jerome Cardan**，按即：**Girolamo Cardano**）解三次方程式的過程，首次用到了虛數，並隨著它的『有用』而逐漸獲得廣泛的使用。接著引入我們一般中學課程之中所熟悉的複數，說明從純形式的觀點來看，複數的運算保持相容性。然後，便引領〔讀者〕從幾何圖形的角度，了解複數運算法則背後的幾何解釋。接著，再進一步將一般的複數推廣，特別是四元數，並介紹了四元數的乘法與幾何上的旋轉與伸展之間的聯結和意義。最後，則回歸到中學課程之中的複數教學上。在結束『算術』單元之前，並安插了一篇附錄，說明了數學的現代發展與一般結構。」

還有，他在第三部份《分析》部份中，介紹相關理論的歷史發展，並期望讀者能全面地了解對數的理論。他建議教科書宜從積分與面積的角度，來定義自然對數的概念，同時，他也指出：「透過雙曲線下的面積而引出對數，此方法與其它任何數學方法一樣嚴格，但其簡單和清晰程度則超過了其它方法。」接著，回歸中學裡的對數理論，他也批判了中學

[6] 參考黃俊瑋 (2010)，〈《高觀點下的初等數學》第一卷算術‧代數‧分析之評論〉，《HPM 通訊》13(9): 4-10。

課程「很少考慮所教定理在大學是否有了推廣，而往往滿足於今天也許夠用，但不能適應後所需要的定義」。

儘管如此，他還是在這一個關聯中，批判了大學數學系的師資培育工作：

近年來，在大學數學教師及其他理科教師中間，對如何更好地培養未來中學師資產生了廣泛的興趣，這確實是一種新的現象。在此之前，長期以來，大學裡的人只關心他們的科學本身，從來不想一想中學的要求，甚至不考慮與中學數學的銜接。結果如何呢？新的大學生一入學，他面對的問題，好像與之前學過的東西一點也沒有聯繫似的。當然，他很快就忘記了中學階段學過的東西。但是，他們畢業後擔任教師，又突然發現他們必須按中學教師的教法，來教授傳統的初等數學。由於缺乏指導，他們很快就墜入相沿成習的教學方法，而他們所受的大學訓練，則至多成為一種愉快的回憶，對他們的教學毫無影響。

因此，

我的始終之一的任務，是向你們點出一般課程中，沒有充分指明的各個數學領域中種種問題的相互聯繫，尤其是強調這些問題與中學數學問題的關係。我希望通過這種方式使你們更易於掌握從大量放在你們面前的知識中，汲取促進數學的養料之能力。而你們進行學術研究的真正目標，我認為就在於掌握這種能力。

換言之，他的「高觀點看待初等數學」，是在中學數學與大學數學之間，進行一個垂直面上的連結與統整（**vertical connection and integration**），從數學家所在的或者是大學數學課程的高觀點，將基礎數學知識與高等數學進行結構上的統整與連結，並訓練中學教師能從這一宏觀的視野，來看待數學知識，如此，才可望更適切而順利地引領學生之相關學習與思維。

最後，針對所謂的「科學的教學法」（**scientific pedagogy**）之意義，以及其與數學史之關連，克萊因為我們貢獻了極具前瞻的**HPM**洞識：

按生物進化**biogenetic**之基本原則，即人發展之程序，與種族發展情形，大體相同。……余思算學教育至少在一般情形下，必遵守此原則，一如其他事理然。教育之力，應使青年粗具之才能，漸導入高深事理，而終於抽象之形式；人類自簡陋原始狀態努力進達高深知識所取之途徑，即今日所當循守著也。此項原則所以時時提出者，乃因常有近於煩瑣哲學派之人士，每自最普遍之觀念，為教學之起點，迴護其法為「唯一之科學方法」。此理由實全無根據。科學之教育云者，乃能導人作科學方式之思考，而決非於開始時，即置冷酷之科學形式系統於其前也。此種極自然之真正科學教育，推行上有一主要障礙，即為歷史知識之缺乏，……余信已使君等必能瞭然一切算學觀念之如何逐漸完成；此等觀念之初現，大低（抵）皆類乎預言，必經長期之推展始結晶成堅固之型態，如有系統之敘述中所習見者。余切望歷史知識對君等教學之方式上，有

不可磨滅之影響焉。[7]

這一段「文言文式」的譯文，引自**1930**年代中國數學家余介石與倪可權的《數之意義》，這是他們從事數學教學之研究的貢獻，本書與《中等數學基本概念之高等觀點》等，都是他們多年在各屆暑期中等教師講習會想講學之心得。[8]顯然，這是**HPM**的**1930**年代版本，其中他們所引述的克萊因之揭示發生學重演法則（**recapitulation principle**）：「**人發展之程序，與種族發展情形，大體相同**」（**Ontogeny recapitulates phylogeny.**），仍然被**1970**年代以降的**HPM**社群奉為圭臬，俾便論述數學史如何可以介入數學教學。此外，根據數學史經驗，數學「**觀念之初現，大低（抵）皆類乎預言，必經長期之推展始結晶成堅固之型態，如有系統之敘述中所習見者**」，因此，他非常懇切地期待數學教師都能擁有數學史的素養。

三、MAA 的拱心石課程理念

在美國由**CBMS**（**Committee on the Mathematical Education of Teachers**）所主編、**MAA**所出版的《教師的數學教育》**(*Mathematical Educations of Teachers*, MET)** 文件中，[9]針對大學數學系為未來教師所提供的數學課程，可以轉述如下：

- **一年級：微積分、統計學導論、支持性科學課程（supportive science）**
- **二年級：微積分、線性代數、計算機科學概論**
- **三年級：抽象代數、幾何學、離散數學與統計學**
- **四年級：實變分析導論、拱心石與數學教育課程**

其中，有關拱心石課程（**capstone course**），**MET** 之說明如下：

> **拱心石課程的理念對於未來教師特別有價值。不過，它那給出廣袤的歷史文化之視野、數學學習之洞識以及科技之應用等目的，應該也頗適用於其他數學主修的學生。**

以函數單元為例，**MET** 指出拱心石與高觀點之連結：

> **儘管數學主修學生在幾乎每門大學部課程都在使用函數，準教師還是被推薦應該從高觀點重訪中學數學中的初等函數，其方式正如同他們從結構觀點，重訪代數與數系運算一樣。像這樣對於函數及其在數學中的統合角色之反思性研究，可以放在拱心石內容課程中的顯著位置。函數的拱心石式研究 (capstone study of function) 可**

---

[7] 引自余介石、倪可權著，《數之意義》（台北市：台灣商務印書館，1966 年台二版），頁 17-18。

[8] 引自何魯，〈何奎垣先生序〉，余介石、倪可權著，《數之意義》（台北市：台灣商務印書館，1966 年台二版），頁 1。

[9] 1997 年，MAA 主導 MET 計畫。2001 年由 CBMS (Committee on the Mathematical Education of Teachers) 公布教師培育計畫的重要文件：*The Mathematical Education of Teachers*。此一文件最值得注意的是它將形容詞 mathematical 置於 education 之前，顯然意在呼應他們在內文中所強調的，國小五年級以上的數學課程，必須由數學主修的教師來擔綱。

以再一次地檢視數學成果中的計算數值與計算圖形工具之角色 – 這是探索式研究與形式證明之連結的一個重要例子 --，而且，這也給出了需要藉由真實的數學模型解決的複雜問題之大學（學習）經驗。（**CBMS, 2001, pp. 134-135**）

顯然，函數的拱心石研究（**capstone study**）可以再一次地檢視計算數值（**computer numeric**）與計算圖學（**computer graphic**）等工具在數學研究中的角色。這是探索性研究（**explorative investigation**）與形式證明（**formal proof**）之間的連結的一個重要例證。而這，當然可以讓大學生體會一種複雜問題求解所需要的真實（**authentic**）數學模型之經驗。因此，**MET** 建議此一有關函數的拱心石課程系列，應該涵蓋下列五個面向：

- 歷史視野（**historical perspectives**）。函數一詞最早出現在十七世紀萊布尼茲的一份手稿，但是，其後的概念演化相當曲折，一直要到十九世紀晚期，才逐漸成形。因此，教師熟悉相關歷史，當然有助於理解學生的學習障礙。因此，對於教師（含在職與職前教師）專業發展來說，數學史與數學（教育）的拱心石課程當然十分重要。
- 共有概念（**common conceptions**）。近年來數學教育研究成果已經指出學生函數的困難之癥結所在，這種數學與心理學所結合的議題，提醒數學家與數學教育家在**拱心石課程**中，如何共同面對並合作訓練未來的教師。
- 應用（**applications**）**--** 函數除了即有用於求解量化問題之外，在數學建模方面，也應該讓未來教師有機會體驗。
- 技術（**technology**）。圖形計算器與電腦在結合了函數之後，展現了它們在數學研究與解題方面的強大威力，儘管如何使用目前並無共識。對於中學數學教師而言，**拱心石系列教學活動**應該探索圖形計算器與電腦在分析學中的種可能用處 – 從數值與圖形探索以及解題到代數、微積分和線性代數中的形式符號運算 – 並且，細心地考慮技術方法與形式推論方法之間的互動關係。
- 連結（**connections**）。函數在數學中幾乎無所不在，它更是連結各種相當分散領域之間的最佳角色。**拱心石經驗**凸顯經由函數所引出來的連結，而這對於準教師而言，是相當有價值的洞識。

在上述技術的面向中，將兩種專業（數學與電腦）的連結中，最後**安放拱心石**的那個人或那些人絕對不可或缺，也是培養未來教師必備的成員。譬如本系的左台益、陳創義兩位教授，恰好是最佳範例。左台益專長依序是數學與計算機科學，最後匯整到數學教育領域。陳創義雖然以純數學（尤其是幾何學領域）見長，但自修電腦結合中學數學教材，而最終轉向數學教育。他們兩位的數學與電腦之素養都相當博雅，因此，在數學教育的參與和指導方面，都獨樹一格，令人印象深刻。

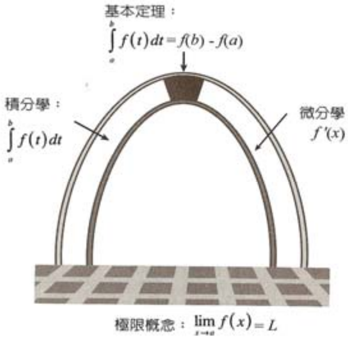
四、微積分基本定理的拱心石角色

上一節所提及的拱心石課程大都是跨領域譬如數學史與數學（教育）、數學與數學教育心理、數學與電腦（或資訊科技）的結合。在本節中，我們所提及的微積分例子，

則是同一學科的兩個次領域如微分學與積分學的結合。不過。在此一例證中，拱心石的比喻更加形象化。

在傑瑞・金（**Jerry R. King**）的《社會組也學得好的數學十堂課》中，有關微積分基本定理的**拱心石角色**，說明得極為生動與深刻，值得引述如下：

> **微積分棲居數學世界，也因此它完全是由觀念組成的。不過，這些觀念是有構造的，彙總起來就為這門課題帶來形式和外觀。把這些觀念想成石塊，堆疊在一起就形成一道壯闊的拱門。拱門的兩支砥柱各有名字：左邊是積分學，右邊則是微分學。……微積分發明人的榮耀，名符其實大半歸於兩位數學家，英國的牛頓（1642–1727）和德國的萊布尼茲（1646–1716）。這兩人（幾乎同時）獨立作出成果，確認外表毫不相干的兩種觀念，其實存有密切關聯，一邊是面積，另一邊則是切線。他們構思出如今稱為微積分基本定理的體系，從而確立了兩邊的關聯。如圖表六十六所示，基本定理構成微積分拱門的拱頂石。有了這項定理，兩組觀念也才得以結合，從而制定出這門號稱微積分的科目。（頁321-322）**



圖表六十六：微積分拱門

上述引文及其附圖是筆者僅見有關**拱心石之比喻**的最佳圖示。顯然，由於微積分基本定理這個拱心石（或拱頂石）的關鍵位置，微積分學這個拱門建築結構體得以樹立，從而兩邊各自堆砌的石塊（分別是微分學與積分學的方法等等）不致塌陷下來。如果一般高中課程中的微積分教學無法觸及此一基本定理，那麼，微積分對學生而言，真的只是一堆彼此毫無關連的計算技巧組合罷了。平心而論，如果學生無從掌握此一定理在認識論與方法論兩個層面的深刻意義，那麼，當那些方法或技巧都忘掉了，在微積分的學習經驗上，或許就變成春夢一場，了無痕跡了。

五、縱深統整

前述有關圓面積公式的相關議題，我們在「縱深統整」的研究計畫中，曾組織國小、國中與高中數學教師，一起撰寫 **HPM** 學習單模組〈圓周率與圓面積〉。其設計構想如下：

(1) 國小階段。這個階段強調具體操作，因此，值得布置測量直徑及圓周長的學習

活動，讓學生透過動手操作，感受不論圓形物體的大小為何，圓周長與直徑的比值似乎總是某個區間變動（大約 **2.5~3.5** 之間），而「或可」歸納出圓周率為一定值。[10]顯然，正確的測量方法將影響學童是否能感受到「圓周率」的存在。因此，在學習圓周率之初，引導學生掌握正確的測量方法，是必要的先備技能。學習單的設計重點在測量方法上，讓學生測量的結果儘量不受測量技巧的影響。但對於圓周率為何取近似值 **3.14**，則似乎只能告知。

(2) 國中階段。本階段則是從具體操作，進而歸納數學性質與並進行初步的公式推導。由於在國小教材中的圓面積或圓周長，是利用量度實作而得到，而非通過證明，因此，對於相關公式之理解，恐怕並不深入。不過，若要說明或證明清楚又不可行（因為 **π** 就是很難說明白的一個概念），所以，圓面積公式的引入，務必細心周到。

我們的國中階段學習單提供了兩個教學活動（請參考〈**HPM**學習單模組設計 **--** 圓周率與圓面積〉）。[11]其中，活動一主要目的在於改進南一版國中數學第一冊有關圓面積的活動，並介紹中國古代劉徽所採用的圓面積公式之一：**半周乘半徑**。劉徽在證明圓面積公式「**半周半徑相乘得積步**」時，設法將圓形轉換成以半周為從（長），半徑為廣（寬）的長方形，「**故以半周乘半徑而為圓冪**」。再由活動二，吾人可以得知圓面積與半徑平方成固定的比（設為***A***），於是圓面積為 Ar^2 。[12]接下來，要求學生比對這兩個公式的等價性質：$Ar^2=\dfrac{C}{2}\times r\Rightarrow A=\dfrac{C}{2r}$，其中 C 為圓周長，r 為半徑。因此，A 等於周長除以直徑，也就是圓周率 **(π)**。最後，圓面積＝ $Ar^2=\pi r^2$ ，亦即是我們所熟知的形式。

(3) 高中階段。在高中階段，數學能力的發展著重點之一，在於邏輯推理與抽象化能力的培養。由於圓面積公式的介紹與使用，是國小、國中階段就預定完成的教學目標，因此，對高中學生是已經具有的先備知識。然而，由於圓周率 **π** 值的特性，也使得教師在國小、國中階段對於它的介紹，被迫採取直接告知的方式。至於圓面積公式，則透過具有極限觀念（但隱而不談，也無法談）的圓之分割，採取直觀認知的教學方式。不過，隨著教育階段的提昇，我們對學生的數學能力要求也隨著提高。在高中階段，教師應該主動「重訪」圓面積公式，譬如引進阿基米德的圓面積公式之證明，如能配合積分的計算單元，當然更好。

由上述有關學習單設計的構想之說明可知，我們發展的模組，是緊扣著國小、國中及高中課程各自的教育目標，每份學習單各自能在其適當的學習階段中使用，並伴隨著相關的數學史文本。由於我們主要關懷「縱深」與「統整」，因此，學習單的設計都呼

[10] 有關這一點，我們無須過度自信。因為這必須預設學生相信自然界有秩序（order）或模式（pattern）存在。如果教師熟悉 GSP 的操作，那麼，即使是小學生也應該可以觀察到圓周長比上直徑為一定值。不過，為了說服學生這不是「偶然」現象，應該布置一些引導性問題，譬如 GSP 如何核證我們所熟悉的幾何性質等等。有關這一點，我們將另文討論。

[11] 請參考台灣數學博物館（http://science.math.ntnu.edu.tw/museum）「數學史特區‧HPM‧HPM論文發表」。

[12] 其實歐幾里得在他的《幾何原本》中，命題 XII-2 就是有關圓面積公式：圓與圓之比相當於它們各自邊所張出的正方形之比（Circles are one to another as the squares on their diameters.）。

應了前一階段學生所具備的數學能力與知識，從而使得各張學習單之間環環相扣，而且具有垂直的連結性。

另一方面，我們也將相關數學的概念發展當作一個編寫的參照座標。考察「圓周率與圓面積」的歷史發展，我們發現古代的數學家似乎採取了與上述不同的進路。以劉徽為例，他對《九章算術》卷一〈方田章〉的註解，是先論證了圓面積＝半周×半徑。緊接著，他使用割圓術逐步計算圓內接正 **192** 邊形的面積，作為圓面積的近似值，並根據前一公式，「反求」出圓周長，進而求出圓周率的近似值 $\frac{157}{50}$。另一方面，阿基米德則是在《圓之測量》**(Measurement of a Circle)** 一書中，則先用歸謬證法與窮盡法，嚴格證明「**圓面積＝一個以圓半徑為高、圓周長為底的直角三角形的面積**」（這實質與劉徽的圓面積公式相同）。接著，他根據此一公式，求出圓周率介於 $3\frac{10}{70}$ 與 $3\frac{10}{71}$ 之間。由劉徽與阿基米德的進路來看，他們都清楚知道圓周率是個定值，但卻都是從證明圓面積公式出發，才進一步求出圓周長與圓周率（至於直徑，則是畫圓的先決條件，通常當作已知）。

現在，對比教科書安排所隱含的概念結構與相關的歷史發展，則吾人或許可針對現行的教材安排可能出現的認知困擾，提供另一個觀照的角度。舉例來說，在國小階段由劉徽的割圓術出發，學生很容易直觀地看出圓面積＝半周×半徑。這樣的表示法不僅符合實際測量的情境，也與學生的面積概念脗合，亦即面積是兩個量相乘。因此，如再透過圓周長與直徑關係之公式，將之改寫成圓面積＝3.14×(半徑的平方)，則是否有其基於認知發展上安排的必要性？或許我們不妨等到國中階段，學生的數學能力更加成熟之後，再來介紹彼此關係的推演，說不定會更加適當才是。

總之，這份有關圓面積的學習單的確是高觀點的產物。我們依序從高中數學看國中數學，再從高中、國中數學看國小數學。儘管我們提出來的教案未必解決或澄清了所有的相關教學問題，不過，從高觀點俯瞰，我們至少看到問題之癥結所在。其實，如果高三的微積分單元願意分配一個小節，來講解如何利用定積分計算圓面積，再說明它與國中、小階段學過的圓面積公式之連結關係，那麼，數學的垂直（縱深）之建築結構（比喻）意義，應該可以大大地凸顯出來。至於我們的學習單模組，顯然就是基於**圓的拱心石研究**（**capstone study of circle**）來編寫了。

六、結論

在本文中，拱心石的比喻有時比較形象，譬如微積分基本定理的地位或角色，有時則比較抽象的意涵，譬如函數或圓的拱心石研究。無論哪一種情形，它都離不開高觀點的連結意義。而這當然是我們鄭重介紹克萊因高觀點以及 **Freudenthal** 的垂直數學化的主要原因。另一方面，由於高觀點也涉及歷史的「洞識」，譬如在複數平面上重新詮釋座標平面的問題之意義何在，因此，**HPM** 在這個關連中，終於有了堂而皇之的切入點。

總之，**MAA** 所提議的拱心石課程，可以追溯近百年前的克萊因對於大學數學系應該如何培訓中學數學師資之主張，只是有些「修辭」(**rhetoric**) 比較時髦罷了。同時，拱心石課程也一樣離不開歷史視野，**MAA** 一再地說明數學史或 **HPM** 對於訓練未來數學教師的不可或缺。這種針對中小學數學師資素養的強烈期待，可以見證他們在教師專業教師培育方面的力圖振作。至於成效如何，當然有待觀察。

回過頭來看看我們自己。過去二十年來，本系顯然在數學教師的拱心石課程方面，建立了許多範例，更為我們國家栽培了一整個世代的優秀數學教師。可惜，所有這些優勢都將隨風飄逝，其中，最值得注意的是，可以很從容放置拱心石的數學教育專長教授，將逐漸從師資培育舞台消失。至於後果之一，或許就是二十年後，在中小學教育現場，我們將不再有優秀的數學教師了。

參考文獻

克萊因，菲力克斯 **(2004).** 《高觀點下的初等數學》第一卷算術・代數・分析（舒湘芹、陳義章、楊欽梁中譯），台北：九章出版社。

杰瑞・金 **(Jerry R. King)(2010).**《社會組也學得好的數學十堂課》**(*Mathematics in 10 Lessons: The Grand Tour*)**，台北：商周出版社。

余介石、倪可權 **(1966).**《數之意義》，台北市：台灣商務印書館（台二版）。

洪萬生、蘇俊鴻 **(2008).**〈利用 **HPM** 來概念化數學教師教育：以畢氏定理和餘弦定律之統整為例〉，《數學教育研討會 **2008**：數學思考與解題》，**2008** 年 **4** 月 **29-30** 日，香港教育學院。

張海潮 **(2011).**〈從代數到算術：獻給國中小的老師〉，《數學傳播》**35(4): 49-51**。

黃俊瑋 **(2010).**〈《高觀點下的初等數學》第一卷算術・代數・分析之評論〉，《**HPM** 通訊》**13(9): 4-10**。

蔡聰明 **(2009).**《微積分的歷史步道》，台北市：三民書局。

蔡聰明 **(2011).**《從算術到代數：讓 ***x*** 噴出，大放光明》，台北市：三民書局。

顏志成 〈哥廷根學派的領導人－ 克萊因 **(Felix Klein)**〉，原刊《**HPM** 通訊》第 **6** 卷第 **4** 期，**2010/06/18** 轉載在「台灣數學博物館」「數學家傳記欄」。

CBMS (2001). ***The Mathematical Educations of Teachers*. At http://www.cbmsweb.org/MET_Document. 2010/12/27** 檢索.

Dunham, William (2005). ***The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton, NJ: Princeton University Press.**

Reid, Constance. (1986). ***Hilbert-Courant*. New York: Springer-Verlag.**

撰寫碩士論文之心得

張美玲老師
台北市立景興國中

從我進入教學碩士班唸書的第一年，同事們都認定我的論文一定是與數學史有關。為何他們會如此說呢？這要從我民國 **90** 年參加「英特爾 **e** 教師計畫」開始說起。

這個計畫是「**在幫助教師發現如何運用資訊科技的技術，以成為一種吸引學生、刺激學生，並且能增進學生學習效果的教學工具。**」在研習過程中，我不斷思考什麼樣的教學內容可以提高學生的興趣。回想起曾經問過我的學生，「你最喜歡上什麼課？」學生說：「歷史課。因為上歷史課，好像聽故事一樣，不知不覺一堂課就結束了。」學生的這段話，讓我「頭上亮了燈泡」，喜悅的心情猶如正泡在浴缸的阿基米德突然發現浮力原理。「如果數學課也能像歷史課一樣有趣，那該有多好？」，這個念頭，讓我一頭栽進了數學史的研究。

我大量的閱讀與數學歷史有關的通俗書籍，做了一個數學史網站，上課也常將課程相關的故事帶進課堂中。甚至聯課活動時，還開了一個「數學史」的社團，帶領有興趣的學生一起研究數學史。那段時間，頗以自己的成果自豪。直到洪老師帶我走進真正的數學史，我才明瞭，我所閱讀的書籍都是一些作者未經嚴謹考證所寫的傳說故事，甚至是以訛傳訛、道聽塗說的歷史軼聞。故事若要寫的生動、引人注目，難免要加油添醋一番。真正的數學史，還是要回歸到歷史層面，佐以史料的考證；真正的數學史，不能僅有「歷史」，仍須有「數學」。看見數學演進的風貌，讓我們更加認識數學的本質。

當初決定以「《數理精蘊》中的《幾何原本》」，作為我的論文主題，初衷僅是因為此文本與現行國中幾何教材較為貼近，我希望自己所研究的主題，能對我的教學工作有所啟示。但是，當我在國家圖書館善本室發現了一本體例與《數理精蘊》中的《幾何原本》十分接近的手抄本後，在追蹤、探究此手抄本的過程中，我深深體會到「發現」的樂趣。「發現」此手抄本的批校字體竟是康熙皇帝所寫的；「發現」許多研究論文有一些錯誤的論述內容；「發現」連國家圖書館的書目編輯資料也有誤；「發現」多數人對於「幾何原本」此一名詞根深蒂固的誤解。**…….**

完成此論文，花了約一年多的時間，剛開始，先把《數理精蘊》中的《幾何原本》作第一次的詳細閱讀，然後依序與歐幾里得的《原本》、巴蒂原著、英文版譯本作比對；之後，跑了很多趟國家圖書館，借出康熙批校之《幾何原本》七卷舊鈔本及精鈔本原件詳閱，當我帶著口罩、手套，小心翼翼的翻閱這些泛黃的古籍，想像三百多年前，康熙皇帝、法國傳教士及一些宮廷官員，也和我翻閱著同樣的這套書，此刻的心情，好比考古學家發現新遺址一樣的興奮。

在資料的搜尋過程，國家圖書館及台大圖書館，是我的主要資料庫來源，多請教畢

業的學長、學姊，也常有不少的收穫。剛開始，不知從何下筆，只是很「努力」、很「用心」的逐卷逐題作詳細比對整理，並且重新繪圖，把所有的比對資料全部打字成稿後，驚人的頁數，讓我知道必須做資料的「瘦身」「減肥」，雖然有很多內容都是辛苦打字與繪圖而成，但必須有所取捨，「捨不得」只會模糊了論文的焦點。章節的主題安排前後更正好幾次，每次和洪老師談完話後，都會有不同的想法，這些變動的想法，其實是完成論文的必經過程，因為老師每次的引導，都使自己的論文主題趨向明確，非常感謝洪老師的指導。

這部論文完成之後，收穫最多的是自己。以前閱讀的習慣，總是把作者的想法原封不動的移入自己的腦中，缺少考證的過程及自我的想法，現在閱讀一本書時，較容易批判作者的思想及內容的真偽。完成論文的過程其實是很辛苦，壓力也很大，但看到自己的成品展現出來時，也是很有有成就感的，尤其得到口試老師們的肯定，所有的辛苦都是值得的。(編按：張美玲於 **2008** 年 **6** 月提交碩士論文《數理精蘊》中的《幾何原本》) 榮獲碩士學位)。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中） 黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！