HPM通訊

第十五卷 第七期 目錄（2012年7月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

「圓錐曲線雜談」教案分享

蘇俊鴻
台師大數學研究所博士候選人/北一女中數學教師

一、前言

此份「圓錐曲線雜談」的教案，是 **2008** 年筆者參加思源科技教育基金會教案甄選活動的得獎作品，承蒙許多數學教師的厚愛，嘗試將此份教案使用於課堂之中。同時，他們也希望筆者能對教案的運用有更詳盡的說明。當時礙於限制，教案活動無法提供完整的解說，這篇文章則是補足原本缺漏的部份，完整交代教案設計理念與教學時的建議事項。不過，此教案內容是對應於 **95** 暫綱的規準，而 **99** 課綱大幅弱化圓錐曲線的內容後（弱化是否恰當仍可討論），本份教案的部份內容，已經不在 **99** 課綱的規準中。但是，作為補充教材來看，此份教案仍然相當適合。

在設計之初，筆者就鎖定討論主題為：

(1)圓錐截痕與圓錐定義的關係？(圓錐截痕的相關內容已經不在 99 課綱中)
(2)「正焦弦」有什麼用？

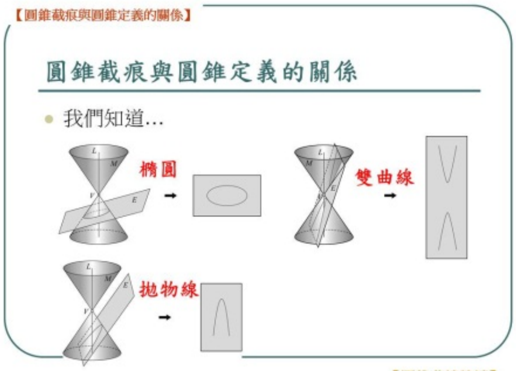
鎖定這兩個議題，是它們都曾在教學過程中，長久困擾過筆者。此份教案的提出，是筆者多年參與洪萬生教授倡導之**數學史融入數學教學 (HPM)** 活動，與團隊成員討論互動所獲致之相關的材料與心得，加以設計、編排完成的成果。以下為此教案的內容、特色及教學時的建議事項。

二、教案之內容、特色及教學時的建議事項

如上所述，本教案的內容分成兩個主題：一是圓錐截痕與圓錐定義的關連；另一是

正焦弦的討論。這兩個主題沒有教學順序的連貫性，若考量到時間因素，老師可以同時或是取其中任一部份進行教學，都是可行的方式。

首先，從圓錐截痕與圓錐定義之間的關係談起，此一部份為投影片第 **3** 張到第 **11** 張的內容。為何這個問題會是教學的「難點」呢？早先課本的編寫都是直接訴諸圖形直觀，將圓錐截痕與橢圓、雙曲線及拋物線等圖形關聯起來，引出圓錐曲線名稱的源頭。然而，接下來各個圓錐曲線圖形的定義，卻與圓錐截痕沒有連結，造成學生常會追問的情形。也許正是如此，**99** 課綱索性將此段內容直接刪除。

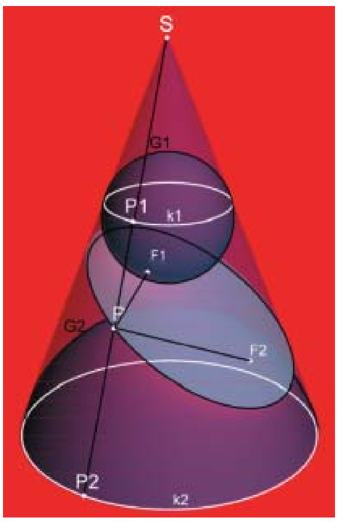


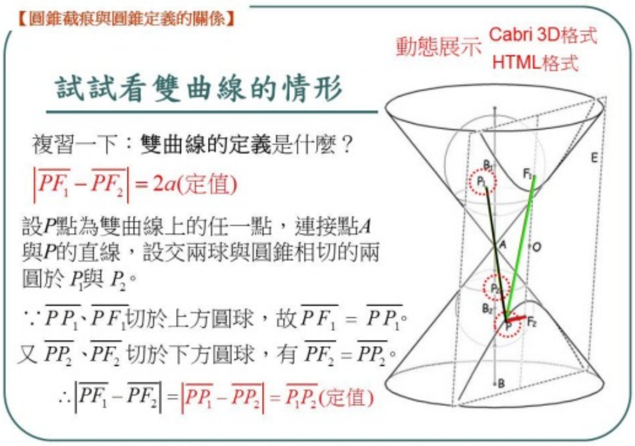
【圓錐曲線雜談】

事實上，我們是可以利用課本上的定義，來解釋圓錐截痕，進而知道圓錐截痕上圖形的相關元素（如焦點、準線）的確切位置，讓學生更深刻地理解兩者之間的關連性。這個問題的解決，得要歸功於十九世紀的數學家，同時也是軍人及工程師的 **Dandelin (1794～1847)** 所提出的巧妙想法，被通稱為 **Dandelin** 定理。以橢圓為例，如下圖所示，**Dandelin** 在截平面與錐面之間，巧妙地塞入一個與它們相切的圓球，圓球與截平面的切點設為 F_1。同樣的方法，在截平面之下，再塞進另一個較大的圓球與錐面相切，且切截平面於 F_2 點。則 F_1 與 F_2 恰為橢圓的焦點。如此一來，在截痕上任取一點 P，連接錐頂 S 與 P 的直線，若交兩球與圓錐相切的兩圓於 P_1 與 P_2，則

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\overline{PP_1}+\overline{PP_2}=\overline{P_1P_2}\ \textbf{(定值)}$$

輕易地，就能看出這個截痕正好符合課本所述橢圓的定義。同理，雙曲線的情形也如出一轍，不妨讓學生嘗試看看，據筆者的經驗，多數學生都能看出結果。

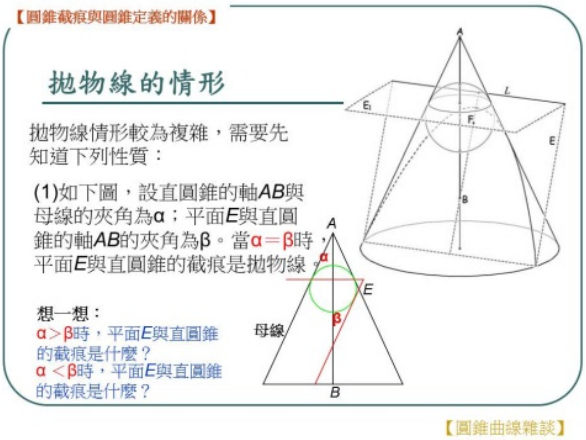


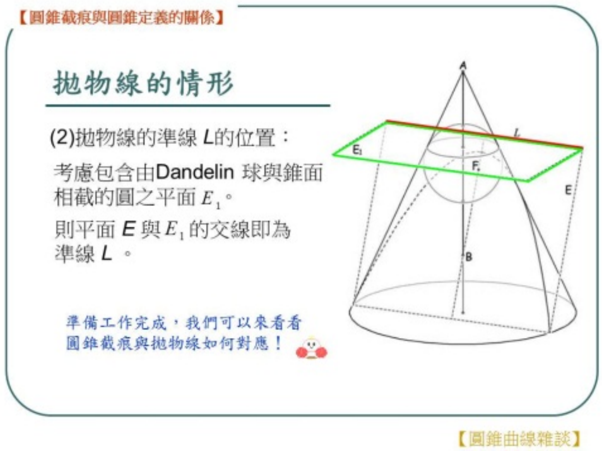


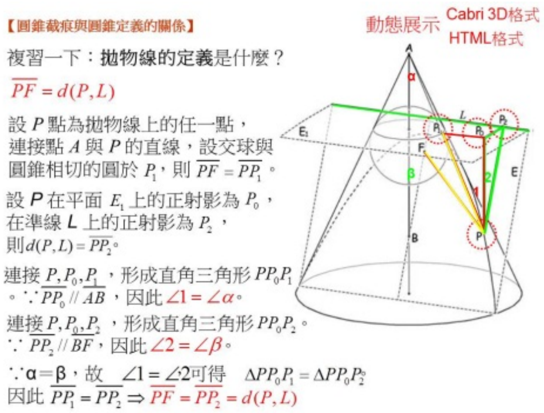
【圓錐曲線雜談】

不過，若要討論拋物線的情形，可就大費周章（見下面的投影片）！並且證明過程相當繁複，若想要短時間引導學生領會，以筆者幾次的教學實施下來，發現效果並不理

想，反而造成學習困難的印象。因此，建議老師若有時間考量的話，不妨以橢圓與雙曲線為例，常能收到很好的效果。而拋物線則以課後作業，採學習單的方式逐步呈現為宜。此外，投影片中雖然安排了動態展示的部份（**Cabri 3D**，需另外安裝軟體），不過，仍以配合實物模型直接解說效果更佳。







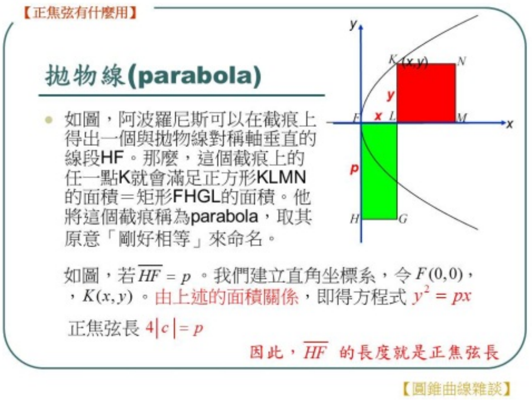
接下來，對於正焦弦的討論，正是投影片第 **12** 張到第 **17** 張的內容，想要處理這個常常被問的問題：

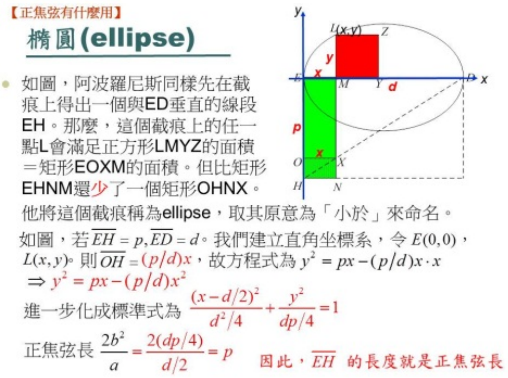
正焦弦除了拿公式來算算長度，它有什麼意義呢？

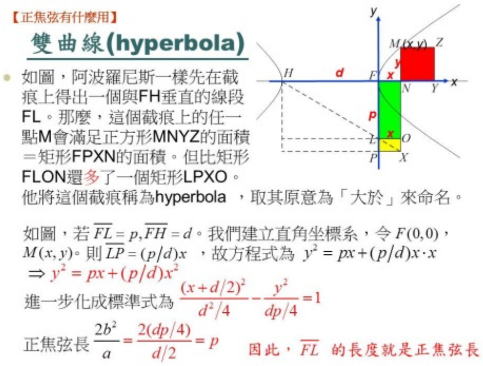
若要回答這個問題，我們得由希臘數學家阿波羅尼斯（**Apollonius** 約 **262 B.C. ~ 190 B.C.**）對圓錐曲線的命名說起：拋物線（**parabola**，指剛好相等）、橢圓（**ellipse**，指小於），雙曲線（**hyperbola**，指大於）。源自畢達哥拉斯學派的傳統，阿波羅尼斯在平面與圓錐的截痕中，由已知幾個線段的比例，找到一個線段長度。再利用圓錐截痕上一正方形面積，與此線段長度為一邊的長方形面積作比較，以「相等」、「小於」或是「大於」來命名各種截痕。若是利用阿波羅尼斯所熟知的幾何知識，整個討論將會過於繁雜，故筆者輔以現代的符號，建立直角坐標系，很容易地可以說明這段「關鍵」的線段長度，正是我們所熟知的正焦弦長，也是教案中所要傳達的重點。此外，在推導過程中，不難發現這三個圓錐截痕以一種一致性的方程式形式來表示：

$$y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2$$

其中，p 為正焦弦長，d 為長軸長（拋物線將 d 視為無窮大）。如此一來，我們就能掌握正焦弦長在圓錐曲線上所具有的幾何意義。更在現在符號的映照下，可以領會希臘人的數學洞識。因此，正焦弦長對阿波羅尼斯來說，是定義圓錐截痕的關鍵。然而，對於採用現行定義的我們來說，正焦弦長是否重要，顯然是不言而喻了。







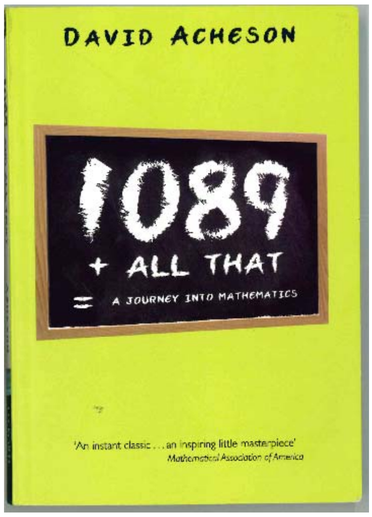
三、結論

對於筆者來說，這份教案是對於教學上曾經遇到的問題，提出一種可能的解決，並且是來自數學史的啟發。因此，這份教案的另一個意義是，說明在講授專業技術知識的數學教室中，數學史可以如何「融入」數學課程與教學活動中。同時，對於平常我們所熟知的教學材料，如何受到數學史的「滲透」而更加地豐富。進而能體會數學史是數學有機體不可分割的一部份，這對於數學的教與學將賦予更深刻的反思。

透過上述的分享，我希望主要內容已充份傳達，並能引起讀者使用此份教案的興趣。更甚者，也能激發你對於數學史的嚮往。最後，筆者對思源科技教育基金會一直致力於高中科學教學表示敬意，關於本文所使用的教案投影片可於 **http://www.seed.org.tw** 下載。

數學列車 1089 號啟程

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授



書名：**1089+All That = A Journey Into Mathematics**
作者：**David Acheson**
出版社：**Oxford University Press, Oxford**
出版資料：**v+178 pp, paperback**
出版年：**2012** 年
ISBN 978-0-19-959002-5
關鍵詞：1089、數學小品、應用數學

一、前言

一本數學普及小品竟然運用一個「等式」充當書名，而且，其中還有一個十分特別的數目 **1089**！事實上，本書是作者 **David Acheson** 從 **1089** 起程的一趟數學列車之旅。

1089 為何有趣？原來它相當魔幻！任選一個三位數，譬如說 **752** 好了。將它的百位數與個位數對調，得 **257**，再將這兩個三位數相減（大減小），得 **752-257=495**。現在，再將 **495** 的百位數與個位數對調，得 **594**。最後，將 **495** 與 **594** 相加：**495+594=1089**。這是一個對於數學再怎麼無感的人都會好奇的問題，緊接著，或許我們就可以討論它的所以然之故了。

一般而言，應用數學家書寫科普或進行數學通識教學，大都喜歡強調數學知識的有用面向（**utility**）。本書作者 **David Acheson** 是一位應用數學家，目前是英國牛津大學耶穌學院終身會士（**Fellow emeritus**），為什麼他將這個挑起讀者好奇心的數目 **1089** 當作本書的引子呢？原來他在 **10** 歲時 － **10** 歲果然重要，安德魯・懷爾斯（**Andrew Wiles**）也是在 **10** 歲時，邂逅費馬最後定理 － **Acheson** 從一本兒童普及刊物 ***I-SPY Annual***（**1956** 年）讀到魔術師如何運用這個魔幻數目。也因此忽忽 **40** 年過去了，他總是念茲在茲第一流數學定理或結果所真正製造的驚奇（**wonder**）！

二、內容簡介

這本小書總共有 **16** 章，目錄依序如下：

現在，我們依序簡介各章內容。在第 **1** 章中，作者從 **1089** 的驚奇（**wonder**）說起，希望帶領讀者（不管多大多小）搭上數學快車，一同欣賞數學中的令人驚奇定理（**wonderful theorems**）、美麗證明（**beautiful proofs**）以及偉大應用（**great applications**）。

第 **2** 章一開始的插曲，則是英國 **17** 世紀唯物機械論哲學家霍布士（**Thomas Hobbes, 1588-1679**）學習歐幾里得《幾何原本》的插曲。霍布士四十歲那一年才初識幾何原本所呈現的數學知識之確定性，他的切入點是畢氏定理的證明 － 《幾何原本》第一冊第 **47** 命題。在研讀此一證明時，他發現他必須逆溯第一冊第 **1** 到第 **46** 的某些命題。這種確定性（**certainty**）讓他「愛上幾何」（**in love with geometry**），終生不渝！除了畢氏定理之外，本章也討論圓面積公式，特別是圓周率π及其展開式 － 萊布尼茲級數：

π**/4=1-(1/3)+(1/5)-(1/7)+…**

類似這種令人驚奇的連結（**connections**），譬如π與奇數的關係，在數學中處處可見。還有，作者還提及叫人討喜的拓樸學圖形，以及最重要的，舉例說明證明在數學中是如何重要，尤其是我們將某些延拓（**generalization**）視為理所當然時：由於

圓周上 2 點之連線可將此圓分成 2 個區域；
圓周上 3 點之連線可將此圓分為 4 個區域；
圓周上 4 點之連線可將此圓分為 8 個區域；
圓周上 5 點之連線可將此圓分為 16 個區域；

依此類推（**analogy**），「圓周上 **6** 點之連線」當然「可將此圓分為 **32** 個區域」了！然而，此一猜測卻是大錯特錯，[1]因此，證明就變得不可或缺了。

[1] 在本書中，作者提供了正確答案 31，至於通式則是 $(1/24)(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$ 。

在第 **3** 章一開始，作者引述柯南 • 道爾的《綠玉冠探案》（***The Adventure of the Beryl Coronet***）結語，讓福爾摩斯說明歸謬法的重要性。作者的第一個例子，是歐拉（**Euler**）的克尼斯堡七橋問題。第二是有關質數是無窮多的證明。第三則是費馬最後定理。針對最後這個例子，作者說明 $n=3$ 的情況差一點成立：

$729^3+244^3=401{,}947{,}273$
$738^3=401{,}947{,}272.$

第 **4** 章主題是（中學）代數。作者的引子有十九世紀早期法國小說家**Stendhal**，以及 **1953** 年英國一個童話故事主角**Molesworth**的認知困擾。[2]針對後者，作者認為運用代數方法證明 **1089** 何以魔幻，應該足以說明代數如何有用了。此外，作者還引進座標概念，說明代數更是有助於解決幾何問題。

第 **5** 章主題是天體運動，作者首先引述美國媒體有關哈雷彗星在 **1910** 年接近地球軌道時，社會大眾如何恐慌的新聞。然後，進一步說明克卜勒與牛頓的傑出貢獻。其中，作者當然頗多仰賴於當時的數學文本，譬如牛頓的經典《原理》（***Principia***）。

第 **6** 章主題是變化率（**rate of change**），並藉以引出微積分。不過，它的重點擺在微分法上。至於第 **7** 章則是運用微分法來處理自然界中的極值問題。在一般人所熟悉的問題之外，作者也提及最小曲面與最速降線等問題及其求解。此外，他還介紹路線網路問題（**road network problem**）：如何運用路線網路連結不同的城鎮，使得路線越短越好。對於四個城鎮來說，最短的路線網路長度恰好等於$1+\sqrt{3}$。至於此一路徑如何取得，則可以運用肥皂泡膜來試驗。輔以實驗，這是本書作者闡揚數學真理的一個重要進路。

第 **8** 章主題是無窮級數（收斂與發散），並且利用它來定義曲線邊界的平面區域之面積，以及像$\sqrt{2}$這樣的無理數。為何$\sqrt{2}$是無理數呢？顯然，這就需要證明了。除了這個歸謬證明（***reductio ad absurdum***）之外，作者也引進了數學歸納法。

在第 **9** 章中，作者介紹了圓周率π的簡史。這個題材一向為科普書寫所歡迎。作者先定義π，然後，由於該定義與圓面積無涉，因此，吾人必須證明何以圓面積＝πr^2。作者所提供的證法，是將圓面積近似為

(1/2)‧(圓內接正 ***n*** 邊形的周長**)‧(**等腰三角形的高**)**

其中這個等腰三角形是由圓內接正 ***n*** 邊形分解而成，直觀而自然，值得肯定。當然由於本章主題是π的簡史，所以，作者緊接著概述了π的近似值發展史，其中作者尤其指出萊布尼茲級數與歐拉級數之意義，另外，他還介紹十八世紀法國數學家卜豐（**Buffon**）如何從機率來看π。

第 **10** 章主題是樂音、弦振與正餘弦函數之關係。這是主要訴求實用的一章，作者

[2] 此一主角出自 Geoffrey Williams 與 Ronald Searle 合著的 *Down with Skool!*

也提及他自己玩爵士吉他的經驗。到了第 **11** 章，作者又拉回數學有趣的面向。現在，他的主題是「驟下結論」（**jump to conclusion**）難以避免的風險。他所舉出的第一個例子有 ***Malfatti* 問題**，亦即：給定一個三角形內，做出 **3** 個不重疊的圓形，使得它們所佔的面積最大。這是 **1803** 年 **Malfatti** 所提出並宣稱解決的問題，但是，直到 **1967** 年，才被 **Michael Goldberg** 指出其誤謬，並提供正確解答。數學家的這種「大膽假設」，歐拉絕不缺席。作者提及他在證明費馬最後定理在 $n=3$ 為真之後，即猜測三個四次方的和等於一個四次方，四個五次方之和等於一個五次方等等，也都是不可能。沒想到到了 **1966** 年，**Lander** 和 **Parkin** 提出反例：$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$。對於歐拉的賢者之失，數學社群不管是十八世紀或二十一世紀，一點都不介意，真是令人羨慕。有關驟下結論之例子，作者還提出無窮級數求和問題，以及 **1917** 年由日本數學家 **Kakeya** 所提出的所謂 ***Kakeya* 問題**。

第 **12** 章主題是微分方程。作者以十八世紀的力學、十九世紀的電磁學、二十世紀的量子力學，以及二十一世紀的生物學為例，說明微分方程及其求解的核心位置。作者在本章一開始所運用的引子，是他在中學時代，生物老師所出的數年如一日的考題中的第 **23** 題：所有生命的秘密是什麼？現在，有了微分方程，這個問題就有了最好的切入點了。

第 **13** 章主題是歐拉數 $e=2.718\ldots$。作者介紹此一主題的引子是複利的計算。此一計算當然與下列極限式有關：$(1+1/n)^n \to e$。與 π 一樣，這個歐拉數在很多領域中一直現身，不過，最著名的例子，莫過於變化率永遠等於自身的數量問題，這些都是自然界中所謂的指數成長（**exponential growth**）問題。作者指出這個 e 不僅規範了疾病的傳染擴散，針對不穩定（**instability**）系統，譬如一滴奶掉下一碗奶表面時所造的擾動現象，我們也可以找到 e 的蹤跡。最後，作者在本章中，也給出了 e 的無窮級數展開式：
$e=1+1+1/2+1/(2\cdot 3)+1/(2\cdot 3\cdot 4)+\ldots$。

第 **14** 章主題是應用數學領域中最夯的「混沌與劇變」，作者應用簡單的實驗（含皂膜實驗，以及網頁上的計算機模擬 **animation**），提供了相當簡要的說明。第 **15** 章主題也是應用數學，作者在此介紹了他自己的研究成果，那是與多樞紐（**pivot**）的複單擺（**multiple pendulum**）運動有關，歷史上可以追溯到 **1738** 年的丹尼爾・伯努利（**Daniel Bernoulli**）。

第 **16** 章主題是「實或虛」？作者在本章也是本書的最後結語，是說明何以歐拉公式 $e^{i\pi}=-1$ 備受數學家寵愛。為此，虛數如何進入歷史舞台（譬如，由解三次方程式（而非二次）進入），以及歐拉如何在他的微積分教科書中，將虛數與正餘弦函數的冪級數展開式等等連結，而得出同樣精彩的歐拉等式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$。現在，這列數學快車已經抵達終點站了。作者為了呼應他在上車前的叮嚀（參見第 **1** 章），亦即：讓我們一同欣賞數學中的令人驚奇的定理、美麗的證明，以及偉大應用，於是，他引述歐拉在 **1748** 年如何證明上述等式，展演了數學知識的這三個本質面向。

三、評論

本書作者專長是應用數學，也是一位爵士吉他樂迷，本書第 **10** 章內容，應該是他應邀為數學團體如**The Mathematical Association**演講的現身說法。[3]如果我們徵之於他從十八世紀的研究成果中，找到多樞紐複單擺的相關問題之事實，即可發現他非常熟稔數學史，尤其是微分方程的歷史發展。這種博雅的興趣，讓他廣泛涉獵數學史，也因而豐富了本書的敘事。

事實上，他在適當脈絡插入數學史實，不僅用以潤滑數學知識的鋪陳，也有助於開啟新的單元或話題。譬如，作為第 **4** 章的結語，他讓笛卡兒現身說法，以便引出第 **5** 章有關圓錐曲線（或二次曲線）如何在天體運動的說明上，發揮令人意想不到的效果。至於第 **5** 章有關克卜勒與牛頓的行星運動之定律，則當然最好讓十七世紀的當事人自行解說了。還有，他讓邦貝利（**R. Bombelli**）而非卡丹諾（**G. Cardano**）來「引進」虛數，足見他對相關史實，擁有了相當體貼細緻的素養。

這種在歷史脈絡中介紹數學，並不只是敘說與人有關的故事而已。譬如，作者雖然指出π的萊布尼茲級數展開式之重要性，然而，他也未曾忘記強調如果吾人按此級數來計算π的近似值到 **3.14 --** 兩千多年前阿基米德即已達到的近似值，那麼，所需要計算的項數就遠遠地超過三百個。這種時刻不忘「實用」的進路，的確凸顯了數學知識的價值與意義。

最後，本書所涵蓋數學內容主要是分析學為主，再加上一點點必要是微分方程。這顯然是作者基於他自己的應用數學背景所做的選擇。由於分析學或微分方程對於一般讀者有相當程度的隔閡或陌生，因此，作者的選材與呈現就顯得十分要緊。整體來看，作者在處理這些題材時，筆觸極輕，但又不失實質內容，尤其，他更是將他自己有關多樞紐複單擺的最前沿研究結果，深入淺出地介紹給讀者。由此可見，他的普及書寫具有相當的功力。

另一方面，就敘事來說，本書作者在每章開始，總是設法挑起讀者的閱讀動機。這種策略像極了數學教師上課時所運用的「引起動機」。此外，他也相當擅用比喻，譬如，他將數學歸納法之證明步驟比喻為連著一節節車廂的火車，於是，第一節啟動後，可以拉動第二節，第二節啟動後，可以拉動第三節等等。顯然，此一敘事頗為形象與生動，也可以說明歸納假設（**inductive hypothesis**）之意義。不過，此一說法忽略了數學歸納法所證明的命題都涉及的無窮概念。

有關本書之訂正也請注意如下：**p. 27** 有關安德魯・懷爾斯（**Andrew Wiles**）之成功證明費馬最後定理之正確年份，應該是 **1994** 年而非 **1993** 年！事實上，懷爾斯在 **1993** 年 **6** 月返回劍橋發表研究成果時，他的證明中有一個當時無法彌補的重大邏輯瑕疵，一

[3] 這個英國數學教育協會的美國版本是 The Mathematical Association of America (MAA)，他們的積極活動參與者包括了數學家、數學教授、數學教育家與中學教師。

直到 **1994** 年，他才成功地彌補了此一漏洞。至於正式的論文，則是發表在 **1995** 年的《數學年鑑》（***Annals of Mathematics***）上。再有，懷爾斯也因為此一傑出貢獻，而榮獲 **1998** 年國際數學家聯盟所頒贈的特別獎。那是因為當時他已年過四十歲，按慣例無法獲得費爾茲獎（**Fields Medal**）了。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至　suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：**陳昭蓉** (東京 Boston Consulting Group) 、**李佳嬅**（東京大學）
德國：**張復凱**（Mainz 大學）
基隆市：**許文璋**（南榮國中）
台北市：**英家銘**（台北醫學大學）**楊淑芬**（松山高中）**杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍**（成功高中）**蘇俊鴻**（北一女中）**陳啟文**（中山女高）**蘇惠玉**（西松高中）**蕭文俊**（中崙高中）**郭慶章**（建國中學）**李秀卿**（景美女中）**王錫熙**（三民國中）**謝佩珍、葉和文**（百齡高中）**彭良禎**（麗山高中）**郭守德**（大安高工）**張瑄芳**（永春高中）**張美玲**（景興國中）**文宏元**（金歐女中）**林裕意**（開平中學）**林壽福、吳如皓** (興雅國中) **傅聖國**（健康國小）**李素幸**（雙園國中）**程麗娟**（民生國中）**林美杏**（中正國中）**朱賡忠**（建成國中）
新北市：**顏志成**（新莊高中） **陳鳳珠**（中正國中）**黃清揚**（福和國中）**董芳成**（海山高中）**孫梅茵**（海山高工）**周宗奎**（清水中學）**莊嘉玲**（林口高中）**王鼎勳、吳建任**（樹林中學）**陳玉芬**（明德高中）**羅春暉** (二重國小) **賴素貞**（瑞芳高工）**楊淑玲**（義學國中）**林建宏** （丹鳳國中）**莊耀仁**（溪崑國中）、**李建勳**（海山國中）
宜蘭縣：**陳敏皓**（蘭陽女中）**吳秉鴻**（國華國中）**林肯輝**（羅東國中）**林宜靜**（羅東高中）
桃園縣：**許雪珍、葉吉海**（陽明高中）**王文珮**（青溪國中） **陳威南**（平鎮中學）**洪宜亭、郭志輝**（內壢高中） **鐘啟哲**（武漢國中）**徐梅芳**（新坡國中） **程和欽** (大園國際高中)、**鍾秀瓏**（東安國中）**陳春廷**（楊光國民中小學）**王瑜君**（桃園國中）
新竹市：**李俊坤**（新竹高中）、**洪正川、林典蔚**（新竹高商）
新竹縣：**陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷**（竹北高中）
苗栗縣：**廖淑芳** (照南國中)
台中市：**阮錫琦**（西苑高中）、**劉雅茵**（台中二中）、**林芳羽**（大里高中）、**洪秀敏**（豐原高中）、**李傑霖、賴信志、陳姿研**（台中女中）、**莊佳維**（成功國中）
南投縣：**洪誌陽**（普台高中）
嘉義市：**謝三寶**（嘉義高工）**郭夢瑤**（嘉義高中）
台南市：**林倉億**（台南一中）**黃哲男、洪士薰、廖婉雅**（台南女中）**劉天祥、邱靜如**（台南二中）**張靖宜**（後甲國中）**李奕瑩**（建興國中）、**李建宗**（北門高工）**林旻志**（歸仁國中）
高雄市：**廖惠儀**（大仁國中）**歐士福**（前金國中）**林義強**（高雄女中）
屏東縣：**陳冠良**（枋寮高中）**楊瓊茹**（屏東高中）**陳建蒼**（潮州高中） **黃俊才**（中正國中）
澎湖縣：**何嘉祥 林玉芬**（馬公高中）
金門：**楊玉星**（金城中學）**馬祖**：**王連發**（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

碩士論文摘要

《松永良弼《方圓算經》內容分析》摘要

王燕華
台灣師範大學數學系碩士班

《方圓算經》於 **1739** 年成書。當時日本社會在德川幕府封建統治下，呈現統一和平的風貌，產業、教育、文藝等十分繁盛，日本學術界稱此時期為「文藝復興」。當時各種藝道不僅讓上層社會接受，也為下層庶民所分享，如茶道、花道、劍道、武道等。其中和算被視為「算道」，以藝道的形式生存與發展，因而數學流派林立，名家輩出。當時和算還有一些獨特的現象，例如家元—免許制、遺題繼承、算額等。在關孝和與建部賢弘等江戶初期和算家的開拓下，和算改變江戶初期實用算術的風格，學術性、藝道性日益增強，而呈現脫離中國數學知識體系而獨步發展之態勢。江戶初期和算家的數學成果奠定了整個江戶時代和算的基礎。

松永良弼 **(Matsunaga Yoshisuke**，1692?~1744) 是關流第二代宗統傳人，對和算與關流貢獻良多。筆者在貼近當時的社會歷史脈絡下，詮釋和算史實，全面深入分析《方圓算經》。《方圓算經》共五卷，卷首闡述抒發數學哲理與啟發，松永接著以抽象的陰率、陽率、應率、唱率與太陰率等率，融入其後四卷的無窮級數公式，包含圓周長、弧背、矢、弦、弧田積、角中徑、距面斜弦、平中徑、角面、距面矢、利用太陰率推導方垛積等三十個公式。概括之，《方圓算經》談論圓、正多邊形以及兩者所形成的數學內容。

分析《方圓算經》的內容，發現松永承襲先人的數學成果並拓廣、突破與創新。本書可以說是松永最突出的作品。在這本書中，松永充分展現他的數學思想，精益求精的計算能力，以及不斷提升「算道」的風格。

畢業時間：**2012** 年 **6** 月

碩士論文摘要

《關孝和《括要算法》之內容分析》摘要

劉雅茵
台灣師範大學數學系碩士班

《括要算法》的成書時間發生在江戶時期，此時社會生產力提升與經濟的繁榮，使得町人文化成為江戶文化的主流，知識、藝能開始滲透到民間，人民逐漸重視文化生活，因此也產生了遺題繼承、如同藝道般的算道、寺廟中的算額等特殊的日本數學文化，這促使當時許多和算家投入各方面的數學研究，進而促使和算由實用數學走向高等的數學研究。

關孝和是關流的始祖，著作繁多，而《括要算法》是關孝和的弟子荒木村英與孫弟子大高由昌在關孝和去世之後，將其數學遺稿加以整理並出版，其中記載著關孝和幾項重要研究成果。本論文將從政治背景、經濟發展、教育與數學，來描繪《括要算法》的歷史文化背景的輪廓，其次針對作者關孝和的生平、數學學習、著作與數學成就作概要性的論述，並且在前述這些脈絡下，對《括要算法》的元卷、亨卷、利卷與貞卷的四卷進內容行分析，其單元包含：累裁招差法、垛積術、剪管術、角術、圓周率、弧長近似公式、球體積公式等，內容十分豐富。最後，探討在歷史背景影響下，《括要算法》各卷內容與中國傳統數學之關係，以及關孝和的延拓與發展，與本書的結構。

畢業時間： **2010** 年 **6** 月