

HPM 通訊

第十五卷 第八、九期合刊 目錄 (2012年9月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（台灣師大數學所研究生）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
 陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
 王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
 英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

■ HPM 2012 之旅

- 一份資訊融入教學活動之設計與反思
—以圓周率概念為例
- 無可救藥愛上你：點與線的愛情習題
- 歐幾里得 (Euclid) 畫像：創作理念

HPM 2012 之旅

林倉億

國立台南一中

在洪萬生老師的推薦下，筆者有幸參加今年7月16日至20日在韓國大田市所舉辦的 HPM 2012 國際研討會。回想12年前，HPM 2000 國際研討會在台北舉辦時，筆者當時以研究生的身份參與整個研討會的籌辦，第一次接觸到許多國外學者的現身說法，了解到 HPM 在各國的發展。12年後，筆者以論文報告者的身份再次參加 HPM 國際研討會，不僅喚起許多回憶，也見證了台灣在 HPM 領域的發展。

筆者以 "Using History of Mathematics in High School Classroom--Some Experiments in Taiwan" 為題，在會議上和與會者分享台灣中學教師在 HPM 領域的發展，以及筆者自己使用 HPM 的經驗。這種國際研討會，想當然爾絕大多數都是大學教授、專家或研究生參與的盛事，中學老師會去「湊熱鬧」的是少之又少。這次的 HPM 2012 也不例外，估計全場就只有筆者這位專職的中學教師在會場上「撒野」！不過，或許就是這種獨特性，在筆者報告後，不少國外學者包括法國的 Anne Michel-Pajus、Frderic Metin、Renaud Chorlay、丹麥的 Tinne Kjeldsen、香港教育局的鄧美愉和李駿宇等人都對台灣中學老師將數學史融入教學的成果表示高度的興趣，Frderic Metin 甚至建議我們可以將這些成果翻譯成英文，和世界各地的人分享。Frderic Metin 在 2000 年有來參加台北的 HPM 2000 國際研討會，是位非常容易親近且活潑的人，他和當時的工作人員(大部分是研究生與大學生)玩得非常愉快，這12年來他仍不時和當時的工作人員陳瑩琪(現為竹北高中數學老師)透過網路保持聯絡，他說 2000 年的研討會帶給他非常多美好的回憶，有機會他一定會再到台灣一遊。至於另一位法國學者 Renaud Chorlay，他有 10 年的中學教學經驗，所以對於中學老師在課堂中引入數學史所面臨到的困境，他是十分能夠體認的。會議期間的茶會時間，有幾次他都主動和筆者討論，給了我不少建議。根據筆者在那幾天的觀察，Renaud Chorlay 雖然是位年輕的學者，但思考非常敏銳，總是

很快地就能夠抓住問題的核心，所以他在研討會上提問的問題都十分銳利，不少報告者都很難回答得好。

這次的與會者的報告，很大一部分是在大學任教的學者分享他（她）們在大學融入數學史的教學經驗與成果，他們向與會者展現將數學史引入後，大學生不僅不會學得比較少，反而學得更好。筆者印象最深刻的是美國的 David Pengelley，他是一位對數學、數學史和教學充滿熱情的學者，與他相處的人很容易就可以感染到他的熱情，而從他的報告中，也看到了他的學生對他的喜愛，以及透過數學史來學習數學的正面回饋。另外，特別值得一提的是兩位丹麥學者 Tinne Kjeldsen 與 Uffe Jankvist 的報告。由於筆者在出發前往韓國之前，先看了兩篇她（他）們的論文，所以，更清楚她（他）們在會議上所談的內容。Tinne Kjeldsen 對數學史融入數學教學的模式進行深入的探究後，提出一套具體可行的模式，並報告、分析這模式在丹麥大學課程裡與高中課程裡實際使用的情形。Uffe Jankvist 則很有企圖心地想要「規範」HPM 研究，目的是要讓 HPM 研究成為正式的數學教育研究。換句話說，他希望藉由提出 HPM 的理論基礎、研究架構及研究方法，讓非 HPM 的數學教育學者能夠認同 HPM 研究也是「正當」的數學教育研究。

至於東道主韓國，呈現了近年來他們在韓國數學史的豐富研究成果，特別是朝鮮時期的數學史研究。透過他們的報告，不僅可以了解到朝鮮時期數學家的自主研究，更可以看到當時中韓、日韓的數學交流，以及東西方數學在朝鮮產生的激盪，這種獨特性，讓朝鮮時期的數學史研究呈現了非常豐富、多元的面向。另外在會場之中，李相龜教授也呈現了他將數學史帶入高中的成果，他和他的研究生還挑選了 52 位數學家，將其畫像（或相片）和簡要的生平介紹做成撲克牌，非常的精美。筆者很榮幸地獲得李教授贈送一張彩色海報，上頭列印了這 52 張撲克牌，原本是興高采烈地要帶回來和學生分享，沒想到竟給它遺忘在首爾的捷運車廂裡，十分扼腕！

嚴肅的研討會之外，筆者透過茶會及用餐時間，和中國科學院自然科學史研究所的郭書春老師、香港大學的蕭文強老師、香港教育學院的鄭振初老師、香港教育局的鄧美愉和李駿宇閒聊了不少。蕭文強老師是筆者報告時的主持人，在他的鼓勵與主持之下，讓我擔心英文掛點的緊張情緒少了一大半。郭書春老師則是好多年沒有見到了，身體硬朗依舊，藉著這次的機會，又從他身上學了不少。鄭振初老師也給了筆者非常多的鼓勵。鄧美愉和李駿宇則讓筆者對香港中學升大學的教育制度，有了初步的認識，另外，她（他）們兩位的報告清楚地介紹了《九章算術》中「牟合方蓋」，非常地精彩，不少西方學者聽完她（他）們的報告後，終於知道什麼是「牟合方蓋」了。十分慶幸有這些語言相通又和善的師長、朋友，讓筆者在會議期間找得到聊天的對象，不會變得「自閉」！

最後，這次的大會辦得十分成功，完全要歸功於 HPM 主席 Evelyne Barbin 女士以及負責承辦的黃善旭教授等人，使得每位與會者都得到十分妥善的照顧，度過非常愉悅而又豐收的五天。利用此文向他們表達最高的謝意！也要再次感謝洪萬生老師的推薦，讓筆者有機會參加這次的會議！

後記：

出國報告前，洪萬生老師特別安排筆者在台灣師大數學系M310教室「預演」，非常感謝洪老師以及學弟陳彥宏（現為台北市成功高中數學教師）、黃俊瑋（現為台灣師大數學所博士班學生）在這次「預演」中所給的寶貴建議，讓筆者得以調整報告的方向及內容。若非這次預演，筆者在韓國的報告一定會慘不忍睹！此外，會議期間適逢敝校暑期輔導課的第一週，感謝科內同事陳榮吉老師及黃榮堯老師的辛勞代課，讓筆者無後顧之憂的參加會議。最後，此次研討會論文集集中收錄的論文，都可自HPM 2012的網站下載，網址是：http://www.hpm2012.org/?mid=announce_05

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳嬋（東京大學）

德國：張復凱（Mainz 大學）

基隆市：許文璋（南榮國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（麗山高中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、

賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）陳建蒼（潮州高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

一份資訊融入教學活動之設計與反思

一以圓周率概念為例

黃俊瑋

台灣師範大學數學系博士班研究生

一、前言

「圓周率」是中小學數學課程中的重要概念，在談圓周率之值之前，如何讓學生察覺或感受到其為一定值，進而「接受」或「相信」圓周率的確為一定值（常數），便是教師教學上的一大挑戰。

國小數學課的相關教學活動之中，包含了以任一給定的點為圓心，固定長為半徑，學生可利用圓規作出一圓。接著，一些教學活動中，先教導學生如何以傳統工具（如：直尺與三角板等），量出圓的直徑與圓周長，學會這兩項測量之後，教師便可要求每一個學生畫一個圓，並量出該圓的直徑 R ，以及圓周長 C ，接著，再讓學生們計算出 C/R 之值。而後，再讓學生們發表各自計算出來的結果，從同學們所畫不同大小的圓，以及相對應計算出的數值中，觀察這些「 C/R 之值」是否會是一個固定的數值，或者該數值落在某個定數附近。從此教學活動中，教師引領學生發現圓周率為一定值，並介紹圓周率之概念。

上述教學活動的設計理念，主要是利用操作、測量與計算等實作方式，引導學生從自己與其它同學的結果中，觀察、歸納，進而討論得到共識，從而建立圓周率為一定值這一數學事實。這一教學法固然看似完善且符合當代教育潮流，然而，在教學現場的實際使用上，卻有若干可能發生的問題存在。

二、傳統教學活動之反思

仔細反思，前述看似設計完善的教學活動中，卻易見下列問題：

1. 量出圓周長這類的弧線長並非易事，特別是對國小的學生而言。學生們在測量直徑與圓周的過程中，無論是儀器限制，或是測量上的操作，所產生的誤差，再加上 C/R 等小數的計算，更加劇了誤差的傳遞，可以想見，多數學生計算出的圓周率恐怕都不是教師預期的「3.14」。

2. 倘若班上的學生透過此測量與計算求商的過程，得到了各式各樣大不相同的「圓周率」，例如：2.52、3.41 等等，教師們如何自圓其說，讓學生們「相信」、「接受」圓周率為課本上所寫「3.14」，這樣的一個定值呢？

可想而知，這樣的教學活動，除非所有的學生都能順利並一致地計算出 3.14 或誤差不大的值，並有賴數學教師的教學經驗與高明的引導，否則，要是大家算出的值大不相同，如此既觀察不出圓周率為一定值，更難以再「說服」學生們「相信」圓周率的確為一定值。而如此大費周章佈置教學活動的結果，恐怕還是流於得強迫學生記下「圓周率為 3.14」這個「數學事實」。

此一教學活動的原目的，無非是希望學生透過「操作量測」、「觀察」與「討論」，察覺無論圓的大小與位置如何改變，但圓周長與圓徑長之比值始終保持為一定值，即引領學生從教學活動中建構或發現「圓周率」為圓的不變量這樣的重要概念。然而，若是花了半節課時間的結果，最終還是得填鴨地要學生強記下「圓周率為 3.14」，這豈不是讓數學教育哲學家拿對手的大炮打自己。非但可能徒費時間，反而容易使得學生充滿疑惑和不解：明明大家測量、計算出的圓周率不盡相同，且差異很大，為什麼老師偏偏要說它是定值呢？

也許對聰明的學生而言，這樣的認知衝突，正可引發他們探索與好奇心，然而，對於一般學生而言，嚴重後果是導致學生對於圓周率，特別是圓周率為一常數之相關概念，產生了「迷思概念」或者建立錯誤的「概念心像」(conception image)，進而影響往後相關新概念之學習與基模的建立。如此看來，此一教學活動的意義，甚至是無勝於有。

這樣看來，圓周率為一定值的教學，除了引入這樣一個可能意義不大的教學活動之外，我們能否進一步加以改善呢？

三、資訊融入教學與活動設計

為有效連結幾何圖形與數學不變量的概念，資訊與電腦軟體的使用，恐怕是最直接且值得嘗試的進路。資訊與設備發達的今日，資訊與各項媒體如何有效地融入數學教學活動一直是近年來數學教育關心的議題，這種進路一方面引發生學生參與學習的動機，同時，對於複雜幾何圖形而言，它也便於教師之繪圖、操作與演示，兼有教具、工具等面向之功能。此外，基於容易操作之特性，學生們可依自己的學習狀況主動控制、主動參與學習活動。

而如同將數學史融入教學活動，引發學習動機只是低標，更重要是如何利於學生的認知與概念的學習。諸如強化多重表徵連結，降底認知負荷 (loading) 以利概念之學習等是目前當紅的主題，如何就資訊、電腦軟體等工具本身固有的功能與特性，以幫助學生對於數學概念之學習與概念間的連結，便是數學教育學家值得探討深思的問題。以下，我們以 GSP 軟體融入數學教學為例，設計關於「圓周率」概念之教學活動流程，並在本文的最後，提出相關反思與結論。

教學活動 1

首先，請學生們在 GSP 介面上任意畫出任一線段 OA ，並以 O 為圓心， OA 長為半徑畫圓 O 。接著，作出圓的直徑 AB 。如圖 1 所示：

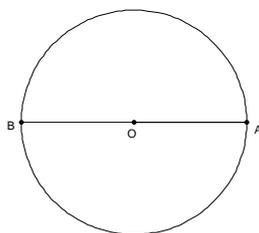


圖 1

點選直徑 AB ，利用 GSP 內建「量測」(measure) 功能底下的「長度」(length)，量出直徑 AB 長 R ：「 $m \overline{BA} = 6.19 \text{ cm}$ 」。並把結果寫在學習單之中。

再點選圓 O ，並利用「量測」(measure) 功能底下的「圓周長」(circumference)，量出圓周長 C ：「 $Circumference \odot OA = 19.45 \text{ cm}$ 」。同樣把結果寫在學習單之中。

圓的直徑與圓周長之間，有沒有什麼樣的關係存在呢？

請學生至黑板上的表格中 (或是老師電腦的表格中)，填入各自測量的結果。並展示此結果。

是不是比較大(直徑比較長)的圓，它的圓周長也比較大呢？

為了進一步探討直徑與圓周長之間的關係，請學生利用 GSP 內建「量測」功能底下的「計算」功能 (measure - calculate)，分別把圓的直徑與圓周長作「加」、「減」、「乘」、「除」，並填入學習單之中。接著，請學生們發表各自所得到的結果，並觀察、比較其它同學們所得到的結果。

請問你們有沒有發現什麼呢？

從這些數值中，引導學生們發現，大家所得的 $C+R$ ， $C-R$ ， $C \cdot R$ 大不相同，然而唯獨其中的 C/R 的值都是 3.14。

這時，請學生們把保留下圓 O 的圖，以及所計算出的 $\frac{C}{R}$ 值：

$$\left[\frac{(\text{Circumference } \odot OA)}{m \overline{BA}} = 3.14 \right]$$

教學活動 2

請學生在圓 O 旁邊，再任意畫出任一線段 PE (與 OA 不等長)，接著以 P 為圓心， PE 長為半徑畫出圓 P ，並作出圓的直徑 EF 。如圖 2 所示：

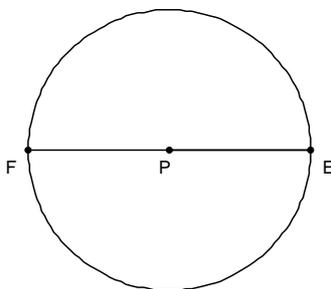


圖 2

同樣地，以 **GSP** 的內建功能，分別量出直徑 EF 長 R' 以及圓周長 C' ： $m \overline{FE} = 4.97 \text{ cm}$

與 $\text{Circumference } \odot PE = 15.63 \text{ cm}$ 。填入學習單之中。

進一步利用 **GSP** 的「計算」功能 (measure - calculate)，計算出 $\frac{C'}{R'}$ 之值：

$$\frac{(\text{Circumference } \odot PE)}{m \overline{FE}} = 3.14 \quad \text{。同樣填入學習單之中。}$$

請學生先比較「活動 1」與「活動 2」所得結果，寫出從兩個大小不同的圓的相關數字中，發現了什麼呢？

同樣地，請學生至黑板上（或老師電腦之表格）填入，各自測量的結果，教師展示同學們的結果，並請同學們觀察、比較其它人所得的結果。

大家所畫的圓大小不盡相同，所量得的直徑與圓周亦不相同，但是，有沒有什麼是相同的呢？

教學活動 3

請學生們隨意拉動「教學活動 1」之中所畫的圓 O ，以改變圓的大小，並在拉動的同時，觀察「圓的直徑長 R 」、「圓周長 C 」以及「圓周長/直徑長」三個數字之變化。

請問你發現了什麼？有沒有什麼是不變的呢？

請學生發表觀察到的結果與想法並進行討論。最後，教師進行總結：「圓周長/直徑」為一固定的值，進而引出圓周率的相關概念。

教學活動 4

教師調整 GSP 顯示的小數點位數，觀察螢幕上所顯示「圓周長/直徑」之值的變化。請問你發現什麼？

引導學生注意：隨著小數點位數的增加，那麼，螢幕上所顯示「圓周長/直徑」之值分為別：3.14、3.142、3.1415、3.1416、3.14159…

教師引導學生了解：隨顯示的位數增加，顯示出更多位、更加準確的值。而其中的「3.14」只是我們常用而方便計算的近似值。另外，若有需要，教師說明螢幕上所顯示的這些數值其實是四捨五入的結果。

四、前述教學活動之設計理念與反思

以上四個教學活動的主要目的，在於引導學生們利用電腦軟體，從對圖形的具體操作與測量之中，觀察並發現隨著圓的大小改變，雖然直徑與圓周長亦隨之改變，但其中「圓周長/直徑」的值卻始終保持不變，從而引出圓周率為一定值的概念，以及介紹圓周率的概念。

首先活動 1 與活動 2 之中，主要透過測量自己所畫兩個大小不同的圓的直徑與圓周長，以及比較同學們所畫許許多多不同大小的圓的直徑與圓周長，進而觀察出，無論圓的大小及位置如何改變，無論是老師學或是哪個同學所畫的圓，「圓周長/直徑」始終都是 3.14。而在教學活動 3 之中，無論學生如何拉動改變圓的大小，無論直徑長與圓周長如何地變動，都會發現「圓周長/直徑」的值始終保持固定不變，即維持「3.14」。

以往老師畫在黑板上的圓、課本上呈現的圓或者學生們自己畫的圓，都僅是具備「典範例」功能的一個圓的特例，而圖作為參考依據之外，難以放大、縮小，也很難移動，即使多畫一些圓，恐怕也難以透過圖形的改變中，觀察、找尋當中的不變量與不變性。特別是如同前文所述，倘若因學生測量造成大家的圓周率大不相同，那麼，教學活動很難收尾，教師除了讓誤差較大的學生多量幾次，多算仔細之外，很難引導學生發現圓周率為一定值的結論。

然而，利用電腦軟所畫的圖，除了兼具「典範例」的功能之外，我們可以隨意地再製、拉動圓的直徑以改變其大小或者移動圓的位置。因此，在此過程中，電腦上的圓可泛指任一個圓，可表徵無窮多個不同的圓，並且，隨著讓圖形變化以及數據量測的過程中，利於觀察出各式各樣隱藏在圖形中的不變量與不變性。如同本教學活動之中，隨著拉動圓的過程，GSP 會不斷地顯示出新的量測與計算結果，從圓的大小以及直徑與圓周長相關數據的變動中，更能映襯出「圓周長/直徑」始終持 3.14 的不變性。而電腦軟體的這項優點，恰可彌補傳統工具的缺點，以更有效的方式，幫助學生認知與建立相關概念。

至於最後的第四個教學活動，主要是因應課堂中，若有學生自行調整軟體顯示的位數時，螢幕上所顯示的數值也隨之改變。例如，調整軟體顯示位數至小數點第三位、第四位與第五位時，畫面上會顯示出「3.142」、「3.1416」與「3.14159」等數值。這時，學生所看到的「圓周長/直徑」之值，會從一個定值變成另一個定值。

這時，教師需進一步說明與引導：當我們繼續更改增加顯示位數時，會讓螢幕上顯示出小數點後更多位的數值，準確到更多位，但是，當我們移動圓或改變圓的大小時，這個數值皆不會改變。讓學生了解，一般我們所取圓周率「3.14」，只是常用而方便計算的近似值。

另一方面，當學生發現前述數值「3.142」、「3.1416」與「3.14159」的第3位與第4位不相同時，教師必需介入補充說明我們所使用的GSP版本中，內建功能自動將數值四捨五入，因此，畫面上所顯示的數值為四捨五入後的結果。

五、結論

傳統教學方法中，學生以直尺與三角板量圓直徑與圓周長，再計算出「圓周長/直徑」之值的方式，如果導因於工具或計算上所產生不可避免的誤差，使得學生們所計算出的圓周率大不相同，恐怕教師很難自圓其說，而讓學生信服圓周率為一定值。其實，學生更可能產生錯誤，相信概念圓周率會隨不同人所畫的圓而不同。同時，在教學活動中，也難以利用特定的圓，讓學生感受並觀察出幾何圖形或幾何量之間所保持的不變量或不變性。

然而，前述本文所設計的教學活動裡，透過電腦軟體GSP的融入，我們可以發現，一方面克服了學生利用傳統工具實際測量圓周與直徑時易產生的誤差，快速而精確地量測出「圓周長」、「直徑長」，並計算出圓周長與直徑的比值為一固定值。這個值在軟體數值設定小數點後二位時，為「3.14」，解決了傳統教學方法所可能產生的問題。並且，無論不同學生、不同電腦所繪出大小不同的圓，又或者任意地拉動同一個圓的過程，所計算出的值皆為定值「3.14」，更有助於教師引導學生觀察、發現「圓周率」為一定值，從而有助於於往後圓周率概念的教學。

資訊融入教學之有利，不僅在於引發動機或者展示、操作方便等優點，更重要而積極地，當數學教師適當地設計教學活動，可以發揮電腦軟體本身所具備的優點與特性，利用其快速、精確、方便量測與計算等特性，以及圖形可動性、可複製性、易觀察性，以及易參照性等，克服傳統畫圖與測量工具的限制，裨益於學生認知的過程以及相關概念之建立。而中小學階段尚有許多單元與概念，皆值得進一步融入資訊或使用相關電腦軟體以促進學生學習與認知，這有賴後續有興趣的教師探索與設計。

六、本教學活動的限制與後記

一般所使用的GSP版本中，當我們呈現實數（譬如無理數）值時，軟體內建功能的

「四捨五入」會顯示我們所設定顯示的位數。當有學生自行調整軟體顯示位數至小數點第三位至第五位時，由於 $\pi=3.1415926\dots$ ，此時，畫面上會將因四捨五入功能，顯示出四捨五入後的數值，即螢幕上顯示「圓周長/直徑」之值就會是 3.14、3.142、3.1416，以及 3.14159。在一方面，當更改顯示位數時，圓周率會從一個「定值」變成另一個定值。同時，由於四捨五入功能的影響，使得前述 3.14、3.142、3.1416、3.14159 的各位數字不盡相同。以上兩點是本教案實作上可能遇到的問題與軟體上的限制。

對於「四捨五入」影響數值的問題，教師在必要時需向學生說明 3.14、3.142、3.1416，以及 3.14159 的各位數字不盡相同，是受軟體四捨五入功能影響。或者教師可以用 GSP 內建的函數功能將「四捨五入」調整成「無條件捨去法」以克服前述問題。

至於第二個挑戰，則考量小學階段的教學目的，主要是讓學生感受、相信圓周率 π 為定值，以及熟悉「3.14」這個近似值。在此教學目標下，我們尚可運用前述三個教學活動為主體。然而，在教學過程中，我們也可進一步視學生能力與臨場學習情況，適當地引入教學活動四，藉以引導學生了解「圓周長/直徑」實際的值為 3.14159... 之不盡小數，隨著增加顯示的位數，可以得到更精確的「圓周長/直徑」之值，而「3.14」只是我們常用的近似值。

本教學活動的設計理念，主要利用資訊融入教學的固有特色與優點而設計。筆者並曾在台灣師大教學碩士班的課堂發表。其中，陳彥宏就其過去 GSP 軟體融入數學教學過程中經驗，分享了實作上可能的問題，而後林倉億則針對本教案整體分享了許多想法與建議，謹此申謝。此外，也感謝鄭宜瑾對於 GSP 功能上的一些協助與建議。

七、附件

資訊融入教學活動-圓周率學習單(1)

教學活動 1

請跟隨老師的作圖步驟：

- (1) 在 GSP 介面上任意畫出任一線段 OA
- (2) 以 O 為圓心，OA 長為半徑畫一圓 O
- (3) 作出圓的直徑 AB。

點選直徑 AB，利用 GSP 內建「量測」(measure) 功能底下的「長度」(length)，量出直徑 AB 長 = _____

再點選圓 O，利用「量測(measure)」功能底下的「圓周長(circumference)」，量出圓周長 = _____

圓的直徑與圓周長之間，有沒有什麼樣的關係存在呢？

是不是比較大(直徑比較長)的圓，它的圓周長也比較大呢？

請利用 GSP 內建「量測」功能底下的「計算」功能(measure - calculate)，分別計算出下列各值：

(1) 直徑 + 圓周長 = _____

(2) 直徑 - 圓周長 = _____

(3) 直徑 × 圓周長 = _____

(4) 直徑 ÷ 圓周長 = _____

請至黑板上的表格中(老師電腦上的表格)，填入第一次測量的結果，並觀察、比較其它人所得的結果。

看(聽)完同學們發表的結果，請問你們有沒有發現什麼呢？

你覺得上面計算出的 4 個值之中，哪一最特別？為什麼？

請保留下選項_____之中，這個最特別的結果

教學活動 2

請在 GSP 畫面上，第一個圓的旁邊，依據「教學活動 1」之中的步驟，再任意畫作一個圓(儘可能使得第二個圓和第一個圓大小不同)

請以 GSP 的內建功能，分別量出此圓的直徑長，以及其圓周長：

直徑長=_____

圓周長=_____

請利用 GSP 的「計算」功能計算出：

$$\text{圓周長} \div \text{直徑長} = \underline{\hspace{2cm}}$$

請你們比較「活動 1」與「活動 2」所得結果，從測量兩個大小不同的圓的過程之中，你發現了什麼呢？

請至黑板上的表格中（老師電腦上的表格），填入第二次測量的結果，並觀察、比較其它人所得的結果。

大家所畫的圓大小不盡相同，所量得的直徑與圓周亦不相同，但是，有沒有什麼是相同的呢？

教學活動 3

請大家隨意拉動「教學活動 1」之中所畫的圓，改變圓的大小，並在拉動的過程中，同時觀察畫面當中「圓的直徑長 R 」、「圓周長 C 」以及「圓周長/直徑長」三個數字之變化。

請問你發現了什麼？

有沒有什麼是保持不變的呢？

這個不變的值，我們把它稱為_____。它的意義即為_____

無可救藥愛上你：點與線的愛情習題

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：無可救藥愛上你：點與線的愛情習題 (*The Dot and the Line: A Romance in Lower Mathematics*)

作者：諾頓·傑斯特 (Norton Juster)

譯者：蟲雅各

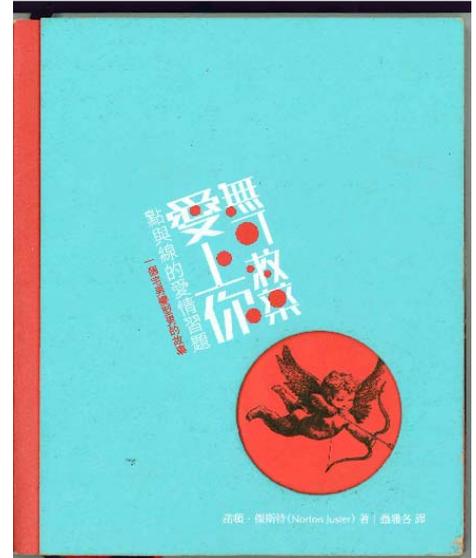
出版社：漫遊者文化事業股份有限公司，台北市

出版資料：未編頁碼，平裝，定價新台幣 260 元

出版年：2008 年

ISBN: 978-986-6858-50-5

關鍵詞：數學小說、羅曼史、直線、圓



這是一個超級迷你的宅男變型男的羅曼史（全書只有 68 頁），男主角是直線，女主角是圓（點），此外，還有一位男配角捲線。

儘管男、女主角實質上相當登對，但是，女主角一開始的目光卻被「一坨狂野又蓬亂，腦袋裡好像沒裝什麼東西的捲線佔滿了」，而完全無視那一條「理智又務實的直線」，偏偏直線無可救藥地愛上了圓點，而且，還溫柔地傾吐愛慕之情：「你是起點，也是終點，是軸心，是最重要的，是完美的典範。」

顯然，這條直線是一位數學宅男，只會寫這種文謔謔的數學文句。相反地，捲線卻能隨心所欲耍酷，「真是讓人愉快又自在！那麼的無拘無束，好玩極了」，於是，圓點當然每天跟他膩在一起。圓點拒絕直線也就罷了，她還不忘補上冷酷的判決：「你啊，僵硬得像根棍子，呆板、守舊又無聊，緊張又拘謹。你實在很悶，讓人窒息，快要喘不過氣來了。在你身邊很有壓力，感覺快被壓扁了。你真的讓人很沒力耶。」

可惜，直線的無可救藥癡情即使他的好友看了，也覺得十分心疼。他們都勸慰直線，全天下的圓點都一樣，還是直線比較好啦。然而，圓點的完美，譬如她的上圍、中圍和下圍都是 36，還是讓直線覺得「比我看過的任何直線都還美」。

於是，他開始「放縱」自己，想像自己在現實世界中的不可缺少角色。可惜，這種針對數學的有用 (utility) 的強調，還是換不到圓點一個關心的眼神。直到他想完全放棄的時候，他才發現只要全然集中精神，「他就可以改變方向，轉到他任何想轉的方向」。就這樣，數學變得多元了，也因而變得好玩極了。更重要地，他還可以做出他想表達的任何形狀。這種全新的自信，讓直線重新追求圓點之旅。他充分地展現自身的「神秘、

靈巧、炫、錯綜複雜、博學多聞、滔滔雄辯、多才多藝、難以捉摸以及引人入勝」。現在，「圓點完全被迷住了，她咯咯的笑著像個小女生，兩隻手都不知要往哪裡擺」。還有，她終於發現「捲線還真是毛髮亂竄又粗俗無禮，不修篇幅又不夠莊重，還曾念錯字又愛挖耳朵。突然間，她了解她所在意的自由和快樂，竟然不過是混亂和懶散。」

最後，圓點嬌羞地走向直線，挽著她的手，從此過著八九不離十快樂的日子！

以上，是本書的內容大要，事實上，我們也差不多轉述或重寫了全書所有的文字。不過，本書最精彩的部分，當然不僅止於文字而已，作者的精美又富含深意的插圖，絕對不可切割。從數學小說的觀點來看，本書的數學元素，譬如如何運用直線來畫出多邊形與多面體，以及如何利用切線來畫出曲線等等，就需要讀者的自行數學解說。然而，如果不此之圖，也無傷大雅，因為作者賦予本書人物的數學想像，已經足以讓這個數學羅曼史小品自圓其說了。

擁有了數學素養之後，如何寫一封獨特的情書呢？或許本書作者傑斯特這位建築師所設計的愛情習題，可以帶給我們深刻的啟發吧！

歐幾里得 (Euclid) 畫像：創作理念

吳宛柔

國立交通大學應用數學所碩士班

歐幾里得 (Euclid, 希臘文: Εὐκλείδης) 是古希臘有名的數學家之一, 但其生平事蹟我們知道的卻很少, 且到目前為止仍沒找到歐幾里得的真實畫像, 因此這次畫作是經由我的想像, 再加上參考畫家拉斐爾 (Raphael Santi) 《雅典學院》 (*La scuola di Atene*) 裡的歐幾里得, 完成我心目中的歐幾里得。即使我們對歐幾里得瞭解不多, 歐幾里得留給後人的《幾何原本》 (*Elements*) 卻對幾何學、數學和科學的發展有著重要的影響。除了《幾何原本》, 歐幾里得還有可能發表《數據》 (*Data*)、《圖形的分割》 (*On divisions of figures*)、《反射光學》 (*Catoptrics*)、《現象》 (*Phenomena*) 和《光學》 (*Optics*), 只是這五本是否皆為歐幾里得的著作, 仍有待考證。

由於這次畫作是出於自己的想像, 瞭解古希臘人的穿著打扮, 便成為一件重要的事情。歐幾里得年代的古希臘人並不喜歡戴帽子, 因為他們相信戴帽子會讓頭髮變白, 所以, 我選擇象徵智慧的髮型, 配上智者斑白的鬚鬚, 運用向下看的眼神表達思考的模樣, 藉此刻劃出歐幾里得的臉龐, 再加上古希臘人特有的半邊披肩, 以及尊貴的紫色衣服和手中紙張上的文字 — “There is no royal road to geometry”, 暗示畫中的人物即為歐幾里得。至於背景部分, 則採用《幾何原本》第一卷第 47 命題, 使用樹綠 (Sap Green) 與虎克綠 (Hooker's Green) 將直角三角形兩股上的正方形填滿, 而斜邊上的正方形, 則由這兩種綠色混合調配, 傳達兩股上正方形的面積和等於斜邊上的正方形面積。背景的另一個圖形, 則是希望點出《幾何原本》公理的不完備, 正是因為這樣的不完備, 才讓其他數學家有更多思考空間, 進而補足, 共同將數學推向更高峰!

