HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第一期 目錄（2013年1月）

馬可夫生平與馬可夫鏈
A4「摺」學

馬可夫生平與馬可夫鏈[1]

林倉億
國立台南一中

在馬可夫 (**Andrei Andreevich Markov, 1856~1922**)年幼時，他的父母親一定想不到這個在十歲以前都還要拄著枴杖的兒子，長大之後能為這個世界帶來什麼樣的改變。升上高中後，馬可夫開始展露數學上的天賦，寫了一篇關於線性微分方程積分的論文，這是他生平第一篇數學論文。雖然這篇論文並不是新的創見，但兩位聖彼得堡大學的數學教授科爾金 (**Aleksandr Korkin, 1837~1908**)與佐洛塔瑞夫 (**Yegor Ivanovich Zolotarev, 1847~1878**)[2]十分賞識馬可夫的才能，特地和馬可夫見面。此次見面開啟了馬可夫通往數學殿堂的大門，因為接下來馬可夫不僅選擇進入聖彼得堡大學就讀 (**1874** 年)，還參加了這兩位教授專為優秀學生開設的研討班。[3]除此之外，馬可夫也修習了柴比雪夫 (**Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821~1894**)的課。柴比雪夫是當時聖彼得堡大學數學系的領導者，也可說是整個俄國數學界的領導者，馬可夫在柴比雪夫的指導下，分別在 **1880** 年與 **1884** 年完成（相當於今日的）碩士論文《論行列式值為正的二元二次型》 (***On the Binary Quadratic Forms with Positive Determinant***)[4]與博士論文《論連分數的某些應用》 (***On Certain Applications of Continued Fractions***)。

---

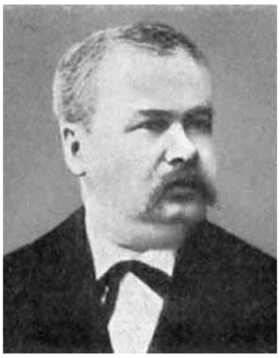
[1] 文中所提及的俄國數學家之論文或著作，僅提供中、英文之譯名。另，本文所引用之圖片，除特別說明外，均來自 The MacTutor History of Mathematics Archive 網站：http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html。

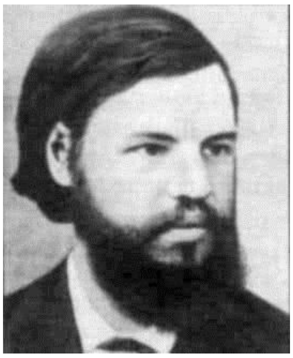
[2] 科爾金是柴比雪夫的學生，馬可夫後來也成為柴比雪夫的學生。佐洛塔瑞夫在聖彼得堡大學就讀時，曾修習過柴比雪夫與科爾金的課程；在聖彼得堡大學任職後，與科爾金在二次型 (quadratic forms)問題上共同合作研究。

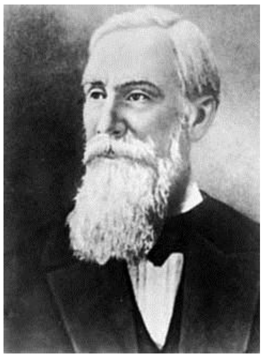
[3] 研討班主要在科爾金與佐洛塔瑞夫兩人的家中進行。

[4] 馬可夫定義二元二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 的 discriminant $D=-\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=b^2-ac$，當 $D<0$ 時，$ax^2+2bxy+cy^2$ 是確定的(definite)，但 $D>0$ 時就不是了。馬可夫的碩士論就是研究當 $D>0$ 時的 $ax^2+2bxy+cy^2$。


馬可夫


科爾金


佐洛塔瑞夫


柴比雪夫

馬可夫一生的研究與教學幾乎都奉獻給聖彼得堡大學，**1880** 年起他就在聖彼得堡大學教書，**1893** 年成為教授，[5]直到 **1905** 年被授與榮譽教授不久後，為了空出教職給年輕的數學家，他選擇了退休，但仍繼續開授機率課程。馬可夫發表的論文超過 **120** 篇，包括數論、連分數、最小零偏差函數 **(functions least deviating from zero)**、求積公式 **(quadrature formulas)**的逼近、基本函數的積分、動差的問題 **(moment**，或稱為「矩」、「動距」**)**、機率理論、微分方程。他的授課以無瑕的嚴密論證出名，教導學生知曉數學中沒有什麼東西是理所當然的，都是需要大量心智投注的。他會在課堂中引進最新的研究成果，相較之下，傳統的問題常常會被略去。馬可夫的教學非常地艱深，只有相當認真的學生才能夠理解。

除了聖彼得堡大學的教職及頭銜之外，**1886** 年在柴比雪夫的提名下，馬可夫被選入聖彼得堡科學院，**10** 年後升任院士 **(ordinary academician)**。[6]馬可夫很快地就在數學界佔有一席之地，並成為俄國數學的代表性人物。**1897** 年第一屆國際數學家會議舉辦時，馬可夫就是五位籌備委員之一，另外四位都是赫赫有名的大數學家，有德國的克萊因 **(Felix Christian Klein, 1849~1925)**、法國的龐加萊 **(Jules Henri Poincaré, 1854~1912)**、義大利的克雷蒙納 **(Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona, 1830~1903)**，與瑞典的米塔列夫勒 **(Magnus Gösta Mittag-Leffler, 1846~1927)**。在當時的世界政治氛圍下，第一屆會議是由中立國瑞士的數學家歸瑟 **(Karl Friedrich Geiser, 1843~1934)**主辦，會議地點也選在瑞士蘇黎世，由此不難想像，這五位籌備委員除了兼顧強權的平衡外，還必須是足以代表該國數學界的人物才得以擔任。換句話說，能擔任籌備委員，除了國家的面子問題外，數學裡子也是很重要的！

---

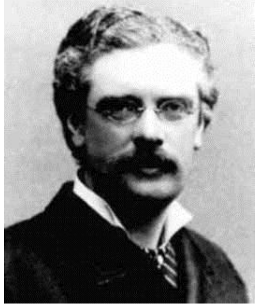
[5] 馬可夫在聖彼得堡大學的職稱為：1880 年擔任講師 (docent)，1886 年升任副教授 (extraordinary professor)，1893 年升任正教授 (ordinary professor / full professor)，1905 年被授與榮譽教授 (honorary professorship)。

[6] 筆者對於聖彼得堡科學院的編制並不了解，在此將職稱之英文附上，供讀者參考：馬可夫在 1886 年成為科學院的 adjunct，1890 年成為 extraordinary academician， 1896 年成為 ordinary academician。


克萊因

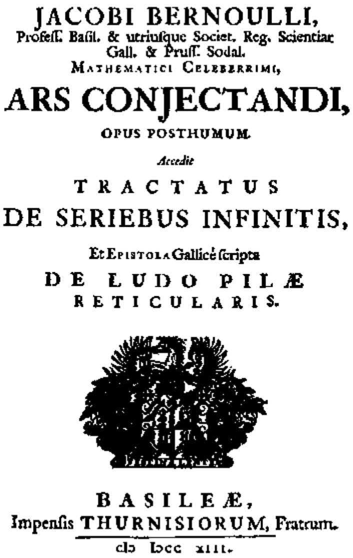
龐加萊


克雷蒙納


米塔列夫勒


歸瑟

馬可夫對自己的主張一向堅定不移，不但在學術上如此（見後文），政治立場上亦然。在 **20** 世紀初的俄國（民主）政治運動中，馬可夫並沒有缺席。當沙皇尼古拉二世在 **1902** 年以政治因素否決馬克西姆・高爾基 **(Maxim Gorky, 1868~1936**，文學家和政治運動家**)** 入選聖彼得堡科學院後，馬可夫憤慨地寫了很多封信給學術當局與政府領導者，表達他對這件事的不滿。接著在隔年，以拒絕領取沙皇的獎章來表達他的抗議。甚至在 **1907** 年沙皇解散國會後，馬可夫毅然摒棄他的選舉人資格。馬可夫的激烈作為，原本可能引發嚴重的後果，不過俄國當局採取不回應的立場，將這些定位為一個院士的過度言行，而不是反政府或是更嚴重的政治行為。馬可夫並沒有因為當局的容忍而收斂其言行，到了 **1913** 年，當俄國政府大肆慶祝沙皇政權 **300** 週年時，馬可夫則另外組織一個慶祝「大數法則」**200** 週年的活動與之抗衡，[7]以表達對沙皇政權的不滿。**1917** 年俄國大革命爆發，馬可夫要求聖彼得堡科學院派他到鄉下小鎮扎賴斯克 **(Zaraisk)**，義務教導當地的高中生數學。他在扎賴斯克渡過了饑荒的冬天，回到了聖彼得堡後，健康狀況急速下降，還動了一次眼部手術。**1921** 年他仍繼續講學，但已經幾乎無法站立；**1922** 年馬可夫就與世長辭了。


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clↄ Iↄcc xiii.

雅克布・伯努利
《猜度術》封面

馬可夫在學術上的堅定主張，甚至可說是信仰，就是跟隨他的老師柴比雪夫。他曾說：「數學就是高斯、柴比雪夫、李雅普諾夫 **(Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857~1918)**、斯特克羅夫**(Vladimir Andreevich Steklov, 1864~1926)**和我所做的研究。」（見下圖）[8]其中李雅普諾夫和馬可夫一樣，都是柴比雪夫的學生，而斯特克羅夫則是李雅普諾夫的學生。馬可夫一生的研究工作，大抵上就是在實踐柴比雪夫的數學理念，並將柴比雪夫發展出來的理論與方法，發揮到極致。比方說，連分數是柴比雪夫最喜歡的方法，也是馬可夫做研究時最主要的工具。我們可以說在柴比雪夫的學生中，馬可夫是最忠實的一個，例如柴比雪夫並不喜歡利用複變數來解決問題，馬可夫也稱複變數方法是「巨大的下流技倆」**(a great dirty trick)**，相較之下，李雅普諾夫就十分推崇複變數方法。另一個更典型的例子是，李雅普諾夫在 **1901** 年引入特徵函數 **(characteristic function)**：

---

[7] 1713 年雅各布・伯努利 (Jokob I Bernoulli, 1654~1705)的《猜度術》(*Ars Conjectandi*)在其身後出版。

[8] 斯特克羅夫郵票圖片來自：http://neietel.blogspot.tw/2012/03/panska-str-lviv.html。筆者並不清楚馬可夫是否曾經躍登郵票之上，若讀者有馬可夫的郵票圖片的話，希望能提供給筆者，在此先致謝！

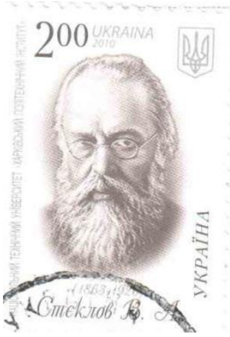
對於每個隨機變數 X ，其特徵函數 $\varphi_X(t)=E\left(e^{itX}\right),\ t\in R$ 都存在，且 X 的分佈函數與 $\varphi_X(t)$ 是互相唯一決定的。

李雅普諾夫成功地利用特徵函數證明了中央極限定理在某些條件下成立，不過，馬可夫並不喜歡特徵函數這個新方法，因此，他花了 **8** 年的時間，用他與柴比雪夫都熟悉的動差 **(moment)**重新證明了李雅普諾夫的成果。雖然馬可夫成功地挽救了動差理論，但這只是短暫的，動差理論終究無法和特徵函數匹敵。

高斯

柴比雪夫

李雅普諾夫

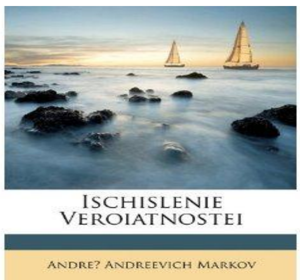


斯特克羅夫


馬可夫

在機率論上的研究，是馬可夫留給後世的最大影響。機率論發展至 **19** 世紀中，基本的成就是「大數法則」與「中央極限定理」，雖然當時這兩者並沒有令人滿意的證明，但並沒有因此而限制住它們的應用。柴比雪夫、馬可夫與李雅普諾夫的研究都與這兩者有著內在緊密的關聯，更進一步地，他們的成果也為現代機率論建立了基礎。**1900** 年，馬可夫出版《機率分析》 (***Probability Calculus***)一書，包含了馬可夫最新的研究成果、嚴格的證明、**18** 世紀經典問題的詳盡資料以及許多算例。此外，這本書也反映了馬可夫好辯的個性，他在書中總是不會放過任何的機會來指正其他人的錯誤。這本書在現代機率學的發展中，扮演了非常重要的角色，自 **1900** 出版後，在許多國家都有發行，甚至出版翻譯版，例如 **1912** 年德國就發行了德文版。而在俄國，此書也三度再版，分別在 **1908** 年、**1913** 年，與 **1924** 年，馬可夫也利用再版的機會增添最新的研究成果。左下圖是 **1900** 年首度刊行的版本，[9]如果讀者想要一探其內容的話，可連結到網址：**http://archive.org/stream/ischislenievero00markgoog#page/n9/mode/2up**，全書完整內容隨君翻閱，當然，閱讀時，除了數學專業知識外，還需要懂俄文才行！至於右下圖則是筆者在網路書店 **Amazon** 查詢到的 **2010** 年版。

1900 年



2010 年

[9] 圖片來自：http://www.auction-imperia.ru/wdate.php?t=booklot&i=1428。

1905 年馬可夫退休後，他持續機率理論的研究，並開始專注在後來被稱為「馬可夫鏈 **(Markov chain)**」的問題上。當時馬可夫努力想要建立適用於一般情況下的機率極限法則，並同時推展動差理論的應用，所以他開始有系統地研究一系列相依的變數。對馬可夫來說，在這些相依的變數中，有一類是特別重要的，他稱之為「同態的」**(homogeneous)**：

> $\{\xi_n\}$是由隨機變數組成的數列，其中ξ_{n+1}之值只取決於ξ_n，而與$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\cdots, \xi_{n-1}$是獨立的。若給定$\xi_n$後，$\xi_{n+1}$的分佈與$n$亦是獨立的，則稱$\{\xi_n\}$是同態的。

上述就是後人所稱的「馬可夫鏈」**(Markov chain)**，首次出現在馬可夫 **1906** 年的論文〈大數法則在相依變數上的推廣〉**(The Extension of the Law of Large Numbers on Mutually Dependent variables)**。馬可夫在論文中指出，如果$\sum_{k=1}^{n}\xi_k$的增加速度小於n^2時，無論這些隨機變數彼此之間如何相依，大數法則依然適用於$\{\xi_n\}$。[10] 此外，在台灣某些版本的高中課本中有所謂的「馬可夫定理」：

> 設A是一個n階轉移矩陣，且A或A的某一次方之所有元都是正實數，則對於任意一個$n\times 1$階的機率向量X_0，當k逐漸增大時，$X_k = A^k X_0$會逐漸趨近唯一的$n\times 1$階矩陣X，而這個矩陣X滿足：**(1)** $AX = X$，**(2)** X中各元的和為 **1**（即X也是機率向量），特別地，我們將X稱為穩定狀態時的矩陣。[11]

從 **1906** 年這篇論文中的結果，很輕易地就可以推得上述的定理。[12]附帶一提的，筆者上網 **Google** 之後，發現很少人用「馬可夫定理」**(Markov's Theorem)**來稱呼此定理，一般較常被稱為「馬可夫定理」的，其實是「馬可夫不等式」**(Markov's Inequality)**或是「辮子理論」**(Braid Theory)**中的一個定理。另一個在搜尋中更常出現的則是「高斯—馬可夫定理」**(Gauss-Markov Theorem)**，它是統計學中的一個重要定理。

在 **1907** 年的論文〈一個值得注意的相依試驗例子的探究〉**(Investigation of a Remarkable Case of Dependent Trials)**中，馬可夫證明當同態鏈$\{\xi_n\}$中的狀態（值）只

---

10 英文原文是：If the variance of the sum $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ grows more slowly than n^2, then the law of large numbers is true for the sequence $\{\xi_n\}$, no matter how the random variables depend on each other. 參閱 Youschkevitch (2008)。

11 引自游森棚主編 (2013)，頁 194。

12 參閱 Seneta (1996).

能是 1 或 0 時，中央極限定理適用於$\sum_{k=1}^{n}\xi_k$。到了 **1908** 年，〈機率分析的極限定理推廣到一個鏈中的相關變數之和〉**(The Extension of the Limit Theorems of Probability Calculus to Sums of Variables Connected in a Chain)**指出了一般化的結果，那就是任一個只有有限個狀態（值）的同態鏈，其轉移機率必定會滿足某些限制。馬可夫陸續於 **1910~1912** 發表幾篇有關這主題的論文，不但得到各種一般化的結果，也導出在某些條件限制之下，中央極限定理是成立的。在這些論文中，馬可夫用以證明的主要工具，就是動差的方法。

由上述可知，馬可夫對「馬可夫鏈」的研究，是起於機率理論研究的內在需求，完全沒想到將它應用在自然科學研究之中可以得到什麼樣的結果。不過，很有趣的是，由於馬可夫十分喜愛詩，他出人意料地以文學為例，來說明「馬可夫鏈」。從數學的角度來分析文學作品，可以將它看成字母狀態的四種變化：母音變母音、母音變子音、子音變母音、子音變子音，這就相當於把母、子音其中一種視為 **0**，另一種視為 **1**，所以文學作品中的字母變化，就可以視為一種「馬可夫鏈」，其狀態只有 **0** 與 **1** 兩種。馬可夫可不是隨口說說而已，他還真的去統計了俄國詩人普希金 **(Aleksander Sergeyevich Pushkin, 1799~1837)**的詩《尤金》**(Eugene Onegin)**[13]中母、子音的轉變，並於 **1913** 年在聖彼得堡科學院宣讀其研究成果。[14]馬可夫算出在《尤金》這首詩的 **20000** 個字母，母音的機率是 **0.432**，母音之後還是母音的機率是 **0.128**，而母音之後是子音的機率為 **0.663**！這真是太瘋狂了！不過，馬可夫並沒有就此罷手，就好像一個拼圖愛好者，在完成了 **2** 萬片拼圖後，接著挑戰 **10** 萬片拼圖，那就是阿克薩可夫 **(S. T. Aksakov)**的小說《孫子巴可洛夫的童年》**(*The Childhood of Bagrov, the Grandson*)**。馬可夫算出母音的機率是 **0.449**，母音之後分別是母音、子音的機率各是 **0.365** 與 **0.552**！至此，筆者不禁好奇，有沒有同樣「瘋狂」的人逐字去檢驗馬可夫的數字是否正確！

雖然馬可夫並沒有將「馬可夫鏈」應用在自然科學中，但他提供了後世數學家與科學家很有用的研究工具。事實上，馬可夫鏈並不僅僅是個數學工具而已，在科學家改變看世界的角度時，它為科學家提供強而有力的支援。例如，在分子與統計物理學、量子理論、遺傳學的發展中，科學家發現決定論的方法並不適用，因而被迫轉向機率的概念。轉向機率後，第一個面臨的問題就是如何決定下一個時間點所發生的事件之機率？換句話說，現在所擁有的資訊，是否足以預測未來的事件？而過去已發生的事實，是否會影響未來的發生機率？簡言之，當科學家轉向機率觀點後，他們發現機率理論變成必需的配備，而且，科學還需要更強而有力的機率工具。因此，馬可夫鏈中的隨機變數ξ_{n+1}（未來的）之機率分佈只與ξ_n（現在的）有關，而與$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\cdots, \xi_{n-1}$（過去的）是獨立的，這就成為科學家研究某些問題時不可或缺的重要工具。就在數學家辛欽 **(Aleksandr**

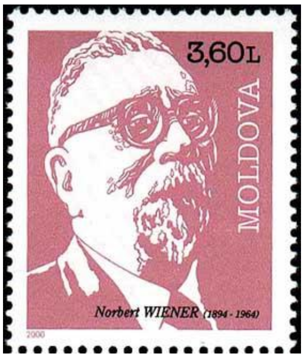
---

13 《尤金》在當時的俄國非常受歡迎，後來柴可夫斯基還為它譜曲，成為他的歌劇代表作之一。

14 1913 年馬可夫在聖彼得堡科學院宣讀其論文〈《尤金》的統計調查為例：關於鏈中樣本的前後關聯〉(An example of statistical investigation of the text *Eugene Onegin* concerning the connection of samples in chains)。

Yakovlevich Khinchin, 1894~1959)的建議之下，隨著時間變化的隨機過程就以馬可夫的名字命名為「馬可夫過程」。

自然界中隨著時間變化的隨機例子，最有名的大概就屬「布朗運動」了。**1827** 年英國植物學家布朗 **(Robert Brown, 1773~1858)**利用顯微鏡觀察到懸浮於水中的花粉，其迸裂出的微小粒子會呈現連續而不規則的運動。不少科學家都研究過這種運動，包括愛因斯坦也曾以分子動力學 **(kinetic molecular theory)**研究它。到了 **1923** 年，衛納 **(Norbert Wiener, 1894~1964)**利用馬可夫鏈及測度論，首度給出布朗運動較簡明的數學公式。透過對布朗運動的研究，衛納成為第一個嚴謹分析連續馬可夫過程的數學家，因此，布朗運動這種隨機過程，也被稱為「衛納過程」**(Wiener process)**，它與「卜瓦松過程」**(Poisson process)**構成了兩種最基本的隨機過程。



衛納

科莫格洛夫

到了 **1933** 年，俄國數學家科莫格洛夫**(Andrey Nikolaevich *Kolmogorov*, 1903~1987)**出版《機率學基礎》**(*Foundations of the Theory of Probability*)**一書，他利用測度理論將機率學公理化，包括隨機變數、馬可夫過程、機率空間等等，在他的努力之下，都有了理論基礎。科莫格洛夫在馬可夫過程上的重要成果，就是得出它與二階微分方程的親密關係，而使得物理學家、生物學家、化學家和工程師更清楚地了解機率學的重要性。[15]

時至今日，馬可夫過程不僅在許多領域都已累積了不少的研究與應用成果，更有許多新的進展、研究在如火如荼地進行著。**2006** 年在美國南卡羅萊納州的查爾斯頓舉行一場慶祝馬可夫誕辰 **150** 週年暨馬可夫鏈 **100** 週年的學術研討會。有趣的是，**2013** 年 **1** 月 **23** 日在美國哈佛的應用計算科學研究所又有一個慶祝馬可夫鏈 **100** 週年的學術研討會，主辦單位心知肚明會有人質疑這兩個 **100** 週年有何不同，特地在官網上說明。第一個理由十分幽默，那就是 **2006** 年已經過了，逝者已矣！第二個理由就正經多了，那就是馬可夫自 **1906** 年發表的幾篇關於同態鏈（馬可夫鏈）的論文，內容十分地抽象且技巧，在學界並沒有引起太多的迴響。然而，在 **1913** 年 **1** 月 **23** 日的〈《尤金》的統計調查為例：關於鏈中樣本的前後關聯〉**(An example of statistical investigation of the text *Eugene Onegin* concerning the connection of samples in chains)**之後，世人開始注意到他在這方面的成果，因而才有後來在各領域的蓬勃發展。若還有人仍十分堅持 **100** 週年一定要在最精確的時間點舉辦，那主辦單位也幽默地回應，俄國直至 **1918** 年才採用現在的格里曆，而當年有 **13** 天是消失的，所以，這些人可以在今年的 **2** 月 **5** 日舉行自己的研討會！

[15] 參閱林大風、曾憲政(1985)。

最後，讀者不妨試試，進入台大或成大的圖書館，在館藏查詢中鍵入「馬可夫」，你（妳）就會發現在許多不同的領域中，都有最新的碩、博士論文以「馬可夫」為其標題。光在台灣就有如此多的數量，可想而知全世界當下有多少人的研究、工作都與「馬可夫」脫不了干係！

後記：

筆者原本想要找一些馬可夫的生平資料作為教學準備之用，才發現國內這方面的中文資料並不多見，所以才撰此文與高中數學教師們分享。在這個目的之下，有許多精彩內容被筆者武斷地省略了。比如說，在 **Basharin** 等人的文章中，介紹並分析了柴比雪夫對馬可夫的影響；**Seneta** 的文章則說明了馬可夫之所以會研究「馬可夫鏈」，其背後有一個重要因素，就是與莫斯科大學數學教授 **Nekrasov** 的爭辯，而這又與數學、宗教、自由意志有密切的關係。另外，馬可夫是如何呈現他的數學成果，這部分因牽涉到專業的機率理論，所以也被筆者略去了，有興趣的讀者可以看 **Basharin** 等人與 **Seneta** 的文章。。

參考資料

Basharin, Gely P., Langville, Amy N., and Naumov, Valeriy A. (2004). "The life and work of A. A. Markov", *Linear Algebra and its Applications* (386), 3-26.

Delone, Boris Nikolaevich (2005). *The St. Petersburg School of Number Theory*. American Mathematical Society.

O'Connor, John and Robertson, Edmund (2006). "Andrei Andreevich Markov", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Markov.html

Seneta, Eugene (1996). "Markov and the Birth of Chain Dependence Theory", *International Statistical Review* 64(3), 255-263.

Seneta, Eugene (2006). "Markov and the Creation of Markov Chains", Amy N. Langville and William J. Steward eds. *MAM2006: Markov Anniversary Meeting* (Raleigh, North Carolina: Boson Books), pp.1-20.

Youschkevitch, Alexander A. (2008). "Markov, Andrei Andreevich", *Complete Dictionary of Scientific Biography*. 2008. *Encyclopedia.com.* http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902828.html

林大風、曾憲政 **(1985).**〈機率史簡介〉,《數學傳播》**9(3)：2-14**。

李育嘉 **(1985).**〈漫談布朗運動〉,《數學傳播》**9(3)：22-28**。

黃文璋 **(1992).**〈布朗運動簡介〉,《數學傳播》**16(4)：1-6**。

游森棚主編 **(2013).** 《普通高級中學數學 **4**》，台南：翰林。

A4「摺」學

蕭偉智　新北市文山國中教師
陳彩鳳　新北市江翠國中退休教師
黃桂齡　新北市文山國中教師
洪淑姿　新北市文山國中教師

一、緣起

近十多年來，隨著國際教育改革的潮流，「摺紙」逐漸受到各國數學教育界的重視，例如： 2011年，洪萬生教授等人將《臺灣數學博物館》舉辦的「摺紙學數學」工作坊之成果彙集撰成《摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學》一書。該書作者將摺紙活動轉化為數學課堂活動，並結合尺規作圖，甚至從摺紙的角度來看古希臘三大作圖題，內容豐富，也切合教學現場之需求。

其中，作者之一的陳宥良曾發展出六個摺紙動作，以篩選出尺規作圖低成就的九年級學生為對象進行補救教學，結果發現摺紙能幫助受試者熟練基本尺規作圖步驟，理解作圖步驟所應用的對稱性質，同時也提升受試者之尺規作圖學習興趣，這一教學實驗給了我們不少啟發。

在本文中，為了呼應此一嶄新的教學進路，我們嘗試以生活常見素材「A4」紙為材料，透過摺紙實作將師生彼此的思辨歷程分享給讀者。尤其我們進一步發現JIS B系與ISO B系這兩種紙張規格之差異，更是與我們所熟知的算術平均與幾何平均有關。這些都足以說明如此簡單的國中數學，如何可以密切地關連到我們的日常生活經驗。

二、A4 的長、寬比等於 3：2？

首先，我們分給學生（數理資優班九年級學生）一人一張A4紙，並提出問題「請問A4紙張的長、寬比例為何？」（為了避免混淆，我們先將A4紙張長度較長的一邊定義為「長邊」，較短的一邊定義為「寬邊」，如圖1）

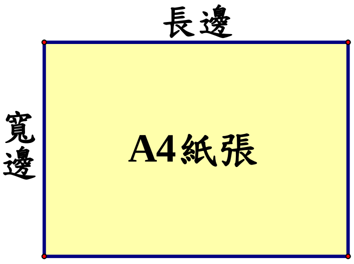


圖1　A4紙張的長邊與寬邊

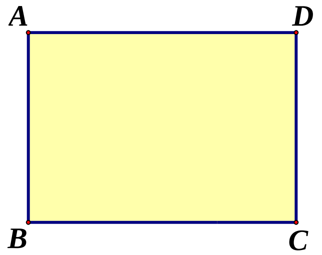
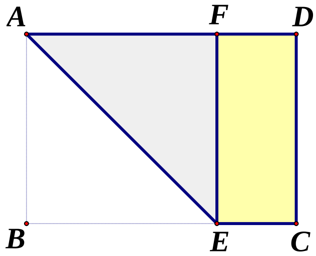
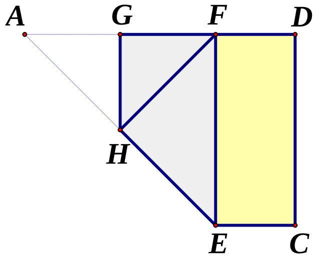
學生：「我覺得是3：2，直接用直尺量一量就知道了。」
教師：「如果現在沒有直尺，只能用摺紙方式來估計，你們會怎麼做？」

以下提供學生使用的兩種摺法，證明**A4**紙張的長、寬比並不是**3：2**。

第一種作法中（表**1**），顯然學生將$\overline{AB}$作為**1**個單位長，去討論$\overline{AD}$和$\overline{AB}$的比值是否為**1.5**？在最後的步驟是比較$\overline{GF}$和$\overline{FD}$的大小，如果$\overline{GF}=\overline{FD}$，則表示$\overline{AD}$是$\overline{AB}$的**1.5**倍（$\overline{AD}:\overline{AB}=3:2$），但是卻發現$\overline{FD}<\overline{GF}$，所以$\overline{AD}$和$\overline{AB}$的比值小於**1.5**，也就是說$\overline{AD}:\overline{AB}=3:2$的猜想是錯誤的。

第二種作法中（表**2**），學生的第一個步驟嘗試將$\overline{AD}$三等分，但是他們使用直觀的方式先估計等分點位置，再多次微調達到近似三等分之摺線，接著將$\overline{AB}$兩等分，結果發現展開圖中的$\overline{AH}<\overline{AJ}$，再得$\dfrac{\overline{AD}}{3}<\dfrac{\overline{AB}}{2}$，最後可推導出$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}<\dfrac{3}{2}$。此種摺法中，雖然學生的微調近似摺法來驗證**A4**紙張的長、寬比，與使用平行線截比例線段性質將$\overline{AD}$三等分的摺法來驗證**A4**紙張的長、寬比，兩者結果都一致，也就是發現**A4**紙張的長、寬比並非**3：2**，但是，筆者仍希望學生能夠利用所學之知識研究「如何把矩形的某邊三等分的摺法」，此項問題則留作課後作業（文末附錄）。

表**1** 驗證 **A4** 紙張長、寬比是否為 **3：2** 之摺紙方法一

摺法	圖示
(1)固定**A**點，將$\overline{BE}$摺到$\overline{AD}$上，摺痕為$\overline{AE}$。	 
(2)將**A**點往**F**點上疊合，得到摺痕$\overline{GH}$。	

(3) 將右邊的矩形沿著 $\overline{FE}$ 摺疊，發現D點落在 $\overline{GF}$ 上。

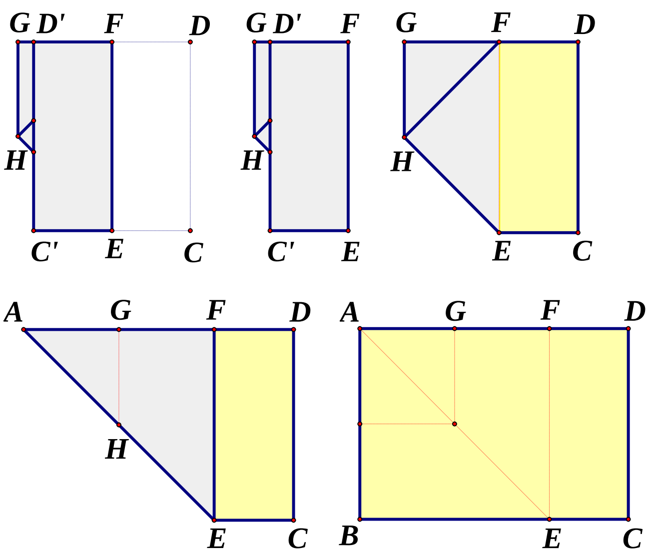
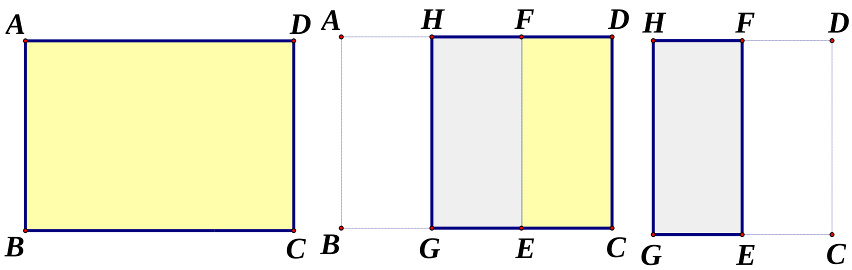
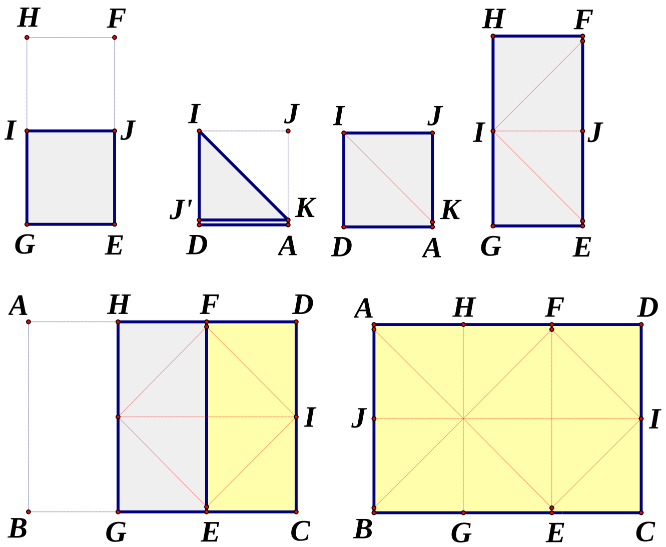


表2 驗證 A4 紙張長、寬比是否為 3：2 之摺紙方法二

摺法	圖示
(1)沿著 $\overline{HG}$ 摺疊，使A點與F點重合、B點E點重合。再沿著 $\overline{FE}$ 摺疊，使D點與H點重合且C點G點重合。	
(2)將 $\overline{HF}$ 摺到 $\overline{GE}$，得到摺痕 $\overline{IJ}$。固定I點，將 $\overline{IJ}$ 摺到 $\overline{ID}$ 上，得到摺痕 $\overline{IK}$。	

三、A4 的長、寬比等於 $\sqrt{2}:1$？

當驗證A4紙張的長、寬比為3：2是錯誤後，我們刻意停留在圖2，並且要求學生觀察圖形中的邊長是否有特殊關係？深思良久，老師稍微給學生一些提示，圖3中的「$\overline{AE}$ 是否

等於 $\overline{AD}$ ？」。於是，學生利用線段比較長短的方法，固定**A**點，將 $\overline{AD}$ 摺疊到 $\overline{AE}$ 上（圖**4**），結果發現**D**點和**E**點重疊（圖**4**），言下之意就是 $\overline{AE}=\overline{AD}$。假設 $\overline{AB}=k$，又**ΔABE**≅**ΔAFE**，所以∠**EAB= 45**度，推得 $\overline{AE}=\overline{AD}=\sqrt{2}k$ 。於是，學生發現

$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AD}:\overline{AB}=\sqrt{2}k:k=\sqrt{2}:1$。

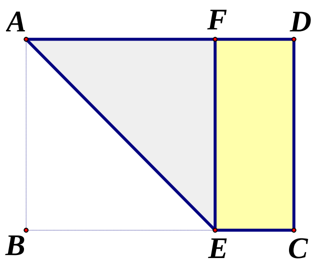


圖**2**

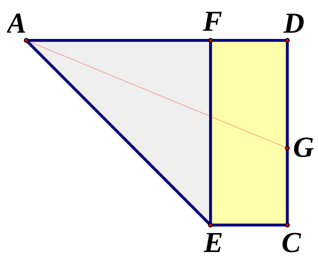


圖**3**

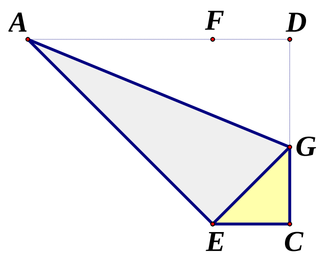


圖**4**

在討論出**A4**紙張的長、寬比為 $\sqrt{2}:1$後，我們繼續深入討論解釋為什麼要制訂這樣的比例。

教師：「我再各給大家一張A3和B4的紙張，請大家找出它們的長、寬比。」

學生：「哇！A3和B4都是 $\sqrt{2}:1$**耶！」**

教師：「請大家想想看為什麼紙張比例都是 $\sqrt{2}:1$**？」**

學生：「因為A和B的紙如果都統一比例，就是相似形。影印機的放大或縮小是等比例放大或縮小，這樣一來不會有空白處，就不會浪費紙張！」

教師：「那麼當A和B的比例都統一為 $\sqrt{3}:1$ **或** $3:2$ **時，其實無論放大或縮小是不是也不會留下空白處呢？」**

學生：「好像也是！」

教師：「那為什麼紙張長寬的比定為 $\sqrt{2}:1$**？」**

學生思考了許久後，仍未有答案，於是，我們進一步提供**A**系列紙張尺寸大小圖（圖**5**）作為線索，鼓勵學生利用代數化演繹思考。沒過一會兒，就有學生發現其中秘密：假設矩形**ABCD**的面積為矩形**ABFE**的**2**倍，經過一次裁切就可以將矩形**ABCD**變成**2**塊相同面積的小矩形，若矩形**ABFE**和矩形**ADCB**相似，那麼又可以符合前面提到的放大或縮小之「便利性」與「環保性」。接著，鼓勵學生以代數列式演繹**A4**的長、寬比。

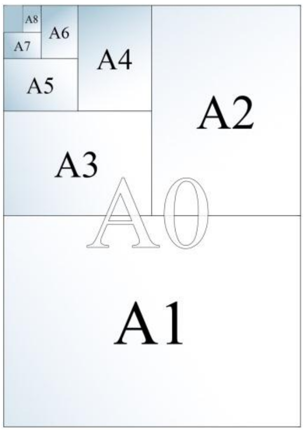
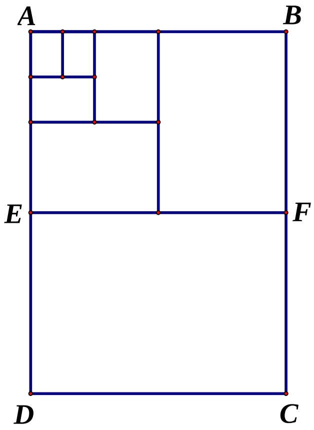


圖5 **A**系列紙張尺寸大小



$\because ABCD$ 與 $AEFB$ 相似

$\therefore \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AE}$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\dfrac{\overline{AD}}{2}$

$\Rightarrow \overline{AB}^2=\dfrac{\overline{AD}^2}{2}$

$\Rightarrow \overline{AD}^2:\overline{AB}^2=2:1$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB}=\sqrt{2}:1$

事實上，關於紙張長、寬比為 $\sqrt{2}:1$ 的原由，可追溯至德國的物理學家 **Georg Christoph Lichtenberg**（**1742-1799**）寫給經濟學家 **Johann Beckmann**（**1739-1811**）的一封信。**Lichtenberg**建議紙張採用 $\sqrt{2}:1$ 的比例，這樣的比例在**1922**年被制定為德國標準（**DIN 476**），之後各國紛紛採用。**1975**年，國際標準組織（**International Organization for Standardization, ISO**）正式將這樣的比例訂為國際通用標準 **ISO 216**。它的優點如同前面所言，「**如果一張紙的長、寬比值為 $\sqrt{2}$，平行於其短邊將紙張裁成兩張相同大小的小紙張，則這兩張小紙張的各自的長、寬比值依舊為 $\sqrt{2}$**」。

四、A系列和B系列紙張的關係

已知 **ISO** 為什麼將紙張比例定為 $\sqrt{2}:1$ 的原因後，接下來，我們與學生延伸討論**A**系列和**B**系列紙張大小以及兩者之間的關係。我們先給學生**A**系列紙張的規則：

規則一：「A0定義成面積為1平方公尺，長、寬比為 $\sqrt{2}:1$ 的紙張」

教師：「請依據規則一計算出A0的長、寬長度（單位：公釐）」

學生假設寬為 x 公尺，列出 $\sqrt{2}x\times x=1$，並求出 $x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。按尺規作圖來說，學生可以利用已知的**1**公尺長度，以直角三角形母子性質作出 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ 公尺。但是，實際在工業上為

了方便起見，先將該數值換算成公釐長度後，再四捨五入至個位數，並確認該近似值的長度乘上寬度的乘積不能超過**1**平方公尺，於是，將**A0**的長邊就定為**1189**公釐、短邊為**841**公釐。

規則二：「A1、A2、A3…、An紙張尺寸，其長邊為前一號紙張的寬邊，並在面積最接近但不超過標準值的情況下，將寬邊取最大的公釐值。」

依據規則二，以**A1**為例，**A1**的長邊為**A0**的短邊，也就是**841**公釐，再假定**A1**的短邊為 y 公釐，可列式為 $841 \times y \leq 500000$，再推得 $y \leq 594.53...$，取最大整數 y 為**594**公釐。當然，學生很快就會發現這樣的作法會讓**A**系列紙張與當初定義上的比例會有些誤差！因此，當理論值和操作值會有所出入時，我們將 **ISO 216** 定義的**A**系列紙張尺寸列表呈現，會更清楚看出其中的誤差（表**3**）。

表**3** 實際上**A**系列紙張的長、寬比值

紙張	長邊（公釐）	寬邊（公釐）	長、寬比值	紙張	長邊（公釐）	寬邊（公釐）	長、寬比值
A0	**1189**	**841**	**1.414**	**A6**	**148**	**105**	**1.410**
A1	**841**	**594**	**1.416**	**A7**	**105**	**74**	**1.419**
A2	**594**	**420**	**1.414**	**A8**	**74**	**52**	**1.423**
A3	**420**	**297**	**1.414**	**A9**	**52**	**37**	**1.405**
A4	**297**	**210**	**1.414**	**A10**	**37**	**26**	**1.423**
A5	**210**	**148**	**1.419**	**--**	**--**	**--**	**--**

再者，討論**B**系列紙張的規則：**Bn**紙張面積是**An**與**A(n-1)**紙張面積的幾何平均數（比例中項）。例如：**B1**的面積是**A1**與**A0**面積的幾何平均數：

$$Bn = \sqrt{An \times A(n-1)} \quad ......\text{式}(1)$$

依據式(**1**)，可求出**B1**的面積大小為 $B1 = \sqrt{A1 \times A0} = \sqrt{0.5 \times 1} = \sqrt{0.5}$ 平方公尺，依據長、寬比例求得**B1**的長邊為**1000**公釐、短邊為**707**公釐，另外**B0**的短邊即為**B1**的長邊**1000**公釐，在不改變長寬比例下，**B0**的長邊就得額外定義為**1414**公釐。接著，可依序推導出**B2**、**B3**、**…**、**B9**的尺寸（表**4**）。

表**4** 實際上**B**系列紙張的長、寬比值

紙張	長邊（公釐）	寬邊（公釐）	長、寬比值	紙張	長邊（公釐）	寬邊（公釐）	長、寬比值
B0	**1414**	**1000**	**1.414**	**B6**	**176**	**125**	**1.408**
B1	**1000**	**707**	**1.414**	**B7**	**125**	**88**	**1.420**
B2	**707**	**500**	**1.414**	**B8**	**88**	**62**	**1.419**
B3	**500**	**353**	**1.416**	**B9**	**62**	**44**	**1.409**
B4	**353**	**250**	**1.412**	**B10**	**44**	**31**	**1.419**

B5	**250**	**176**	**1.420**	**--**	**--**	**--**	**--**

有了上面的工具後，我們開始讓學生計算猜測影印機上的放大縮小倍率。計算皆依據理論定義：「**A(n-1)**面積為**An**面積的**2**倍、**B(n-1)**面積為**Bn**面積的**2**倍，**A**系列和**B**系列紙張的長、寬比例為$\sqrt{2}:1$」。

學生：「如果是放大，考慮面積後開根號。例如：**A4**放大成**A3**，就是面積放大**2**倍，邊長要放大$\sqrt{2}$倍，大概是**141%**。縮小也一樣，**A4**縮小成**A5**，就是面積縮小$\frac{1}{2}$倍，邊長要縮小$\sqrt{\frac{1}{2}}$倍，大概是**71%**。**B**系列也一樣。」

教師：「沒錯！影印機上常用的倍率就是如此（表**5**），那如果**A4**的紙要印成**B4**或是**B4**的紙要印成**A3**呢？」

表**5** 常見**A**系列和**B**系列放大/縮小倍率表

倍率	適用情況	倍率	適用情況
50%	**A3→A5**、**B4→B6**	**141%**	**A4→A3**、**B5→B4**
70%	**A3→A4**、**B4→B5**	**200%**	**A5→A3**、**B6→B4**

若以**A4**、**A3**與**B4**當作例子，如圖**6**，依據定義，學生開始演繹推理：假定**A4**的面積為r平方單位、**A3**的面積為 $2r$ 平方單位，**B4**的面積為**A4**和**A3**面積的幾何平均數，所以，**B4**的面積為$\sqrt{r\times 2r}=\sqrt{2}r$平方單位。此外，由於各紙張的長、寬比例皆相等(皆為相似形)，所以，邊長的平方比即為面積比（$\overline{AD}^2:\overline{IL}^2=1:\sqrt{2}=\sqrt{2}:2$）。於是，**A4**紙要印成**B4**紙則需要放大$\sqrt{\sqrt{2}}\fallingdotseq 1.19$倍，也就是**119%**，同理**B4**紙要印成**A3**紙也是**119%**（$\overline{IL}^2:\overline{EH}^2=\sqrt{2}:2$）。若是縮小來看，則$\sqrt{\sqrt{2}}$的倒數約為**84%**（**B4**縮小成**A4**、**A3**縮小成**B4**之倍率）。

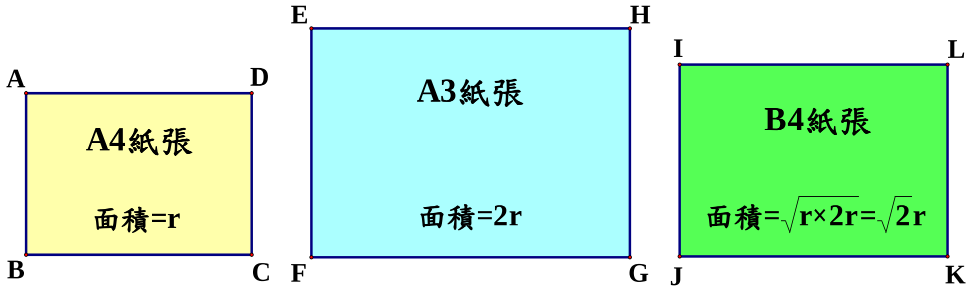


圖**6**　**A4**、**A3**與**B4**邊長比例圖

於是，我們信心滿滿地到影印機查看倍率，卻發現完全不一樣的事情，影印機上標示著「**81%：B4→A4**」、「**122%：A4→B4**」(圖**7**)、「**86%：A3→B4** 」、「**115%：B4→A3**」。學生反覆驗算列式與計算，並以實際**ISO 216**公訂尺寸來做估算**A4**（**297×210**）、**A3**（**420×297**)、**B4**(**353×250**)的轉換，結果也都是**119%**和**84%**的比例！「到底哪裡出錯了？」

圖**7**　**B4**與**A4**紙張影印轉換倍率

五、柳暗花明：A系列與JIS B系列

我們多次檢查前述運算，仍百思不得其解，於是開始懷疑「會不會是**B4**的尺寸問題？」，我們和學生利用**WORD**文書處理軟體中的版面設定查詢**A3**、**A4**與**B4**的大小，結果發現只有**B4**的尺寸大小（**364mm×257mm**）和我們前面計算的**ISO 216**公訂的尺寸（**353mm×250mm**）不一樣，並且這裡的**B4**特別加註為**B4(JIS)**（圖**8**），經查詢發現**JIS**指的是日本工業規格（**Japanese Industrial Standards, JIS**）。在**JIS B**系列的規格中，他們將**B**系列定義為**A**系列的「算術平均數」，換言之，「**JIS Bn**紙張的面積是**An**與**A(n-1)**紙張的面積之算術平均數」。

$$JIS\ Bn=\frac{An+A(n-1)}{2} \quad ......式(2)$$

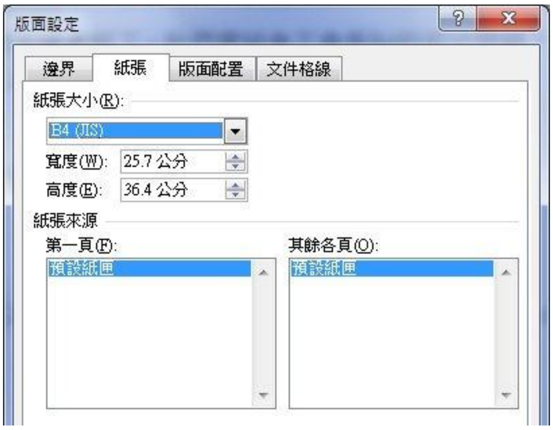


圖**8**　**B4(JIS)**的尺寸大小

依據式（**2**），可求出**JIS B1**的面積大小為 $JIS\ B1=(A1+A0)\div 2=(0.5+1)\div 2=0.75$平方

公尺，依據長、寬比例求得JIS B1的長邊為1030公釐、短邊為728公釐，另外JIS B0的短邊即為JIS B1的長邊1030公釐，在不改變長寬比例下，B0的長邊就得額外定義為1456公釐。接著，可依序推導出JIS的B2、B3、…、B9的尺寸（表6）。有趣的是，ISO B系列和JIS B系列紙張之間的關係，學生發現其中居然出現「算幾不等式」的蹤跡（算術平均數大於或等於幾何平均數，也就是若兩數為 a、b，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ）！最後，學生重新計算A系列和JIS B系列的放大或縮小倍率（圖9），結果發現符合影印機之倍率，始覺柳暗花明、豁然開朗！

教師：「請依據面積來推算JIS B4、A4、A3的放大或縮小倍率關係。」

學生：「JIS B4面積是A4面積的1.5倍，所以A4紙放大成JIS B4紙的比例為 $\sqrt{1.5} \fallingdotseq 1.224$，

倒過來說JIS B4紙縮小成A4紙的比例為 $\frac{1}{\sqrt{1.5}} \fallingdotseq 0.816$。A3面積是JIS B4面積的 $\frac{4}{3}$ 倍，

所以JIS B4紙放大成A3紙的比例為 $\sqrt{\frac{4}{3}} \fallingdotseq 1.154$，倒過來說，A3紙縮小成JIS B4紙的

比例為 $\sqrt{\frac{3}{4}} \fallingdotseq 0.866$。

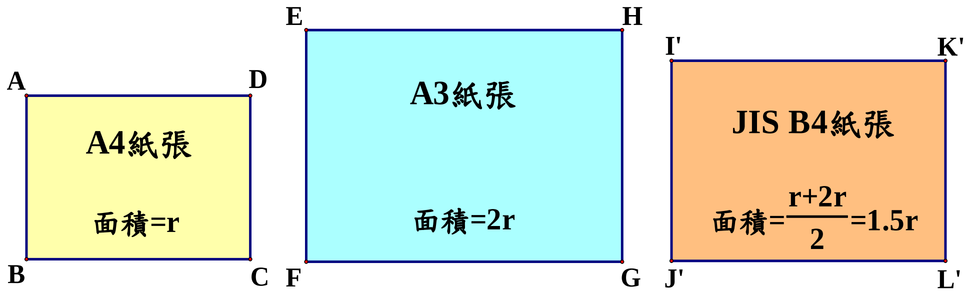


圖9 A4、A3與JIS B4邊長比例圖

表6 常見ISO B系列和JIS B系列紙張尺寸

紙張	長邊（公釐）	寬邊（公釐）	紙張	長邊（公釐）	寬邊（公釐）
ISO B0	**1414**	**1000**	**JIS B0**	**1456**	**1030**
ISO B1	**1000**	**707**	**JIS B1**	**1030**	**728**
ISO B2	**707**	**500**	**JIS B2**	**728**	**515**
ISO B3	**500**	**353**	**JIS B3**	**515**	**364**
ISO B4	**353**	**250**	**JIS B4**	**364**	**257**
ISO B5	**250**	**176**	**JIS B5**	**257**	**182**

表7 常見A系列和JIS B系列放大/縮小倍率表

倍率	適用情況	倍率	適用情況
50%	**A3→A5、B4→B6**	**115%**	**B4→A3、B5→A4**
70%	**A3→A4、B4→B5**	**122%**	**A4→ B4、A5→ B5**
81%	**B4→A4、B5→A5**	**141%**	**A4→A3、B5→B4**

86%	**A3→B4、A4→B5**	**200%**	**A5→A3、B6→B4**

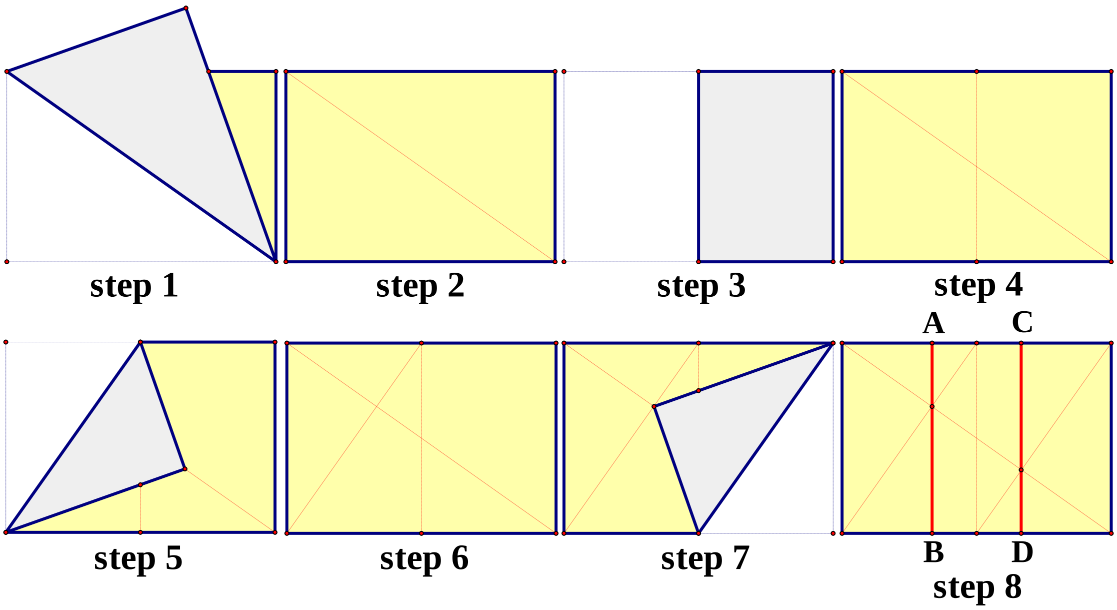
六、結語

最後，筆者鼓勵學生嘗試解釋造成**ISO B**系列與**JIS B**系列混淆的合理原因，學生很快就發現臺灣許多影印機、印表機或大型印刷設備都是日本品牌或日本進口，所以，該廠商不會特地標示出「**JIS B4**」。因為對日本人而言，「**B4**就是**JIS B4**」，而直接寫**B4**即可，這也就是造成誤會之原因。

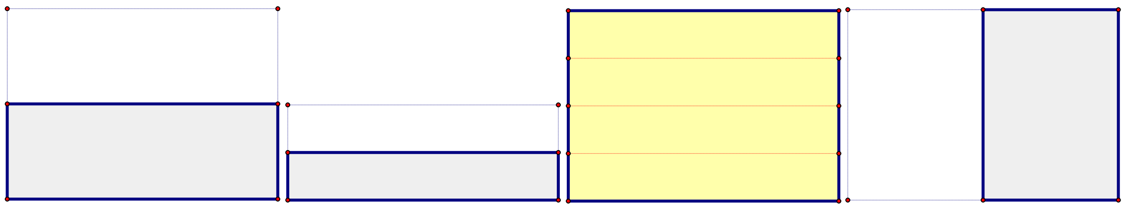
回顧這一趟**A4**摺紙旅程，一開始發現生活常見的影印紙張的長、寬比例，再延伸討論不同尺寸的紙張（相似形）放大與縮小之比例，雖然一度在**A**系列和**B**系列紙張陷入僵局，但最後還是成功解決問題，整體而論，這趟旅程可說是驚喜連連、收穫滿滿！

附錄：將矩形某一邊三等分的摺紙（$\overline{AB}$和$\overline{CD}$即為所求）

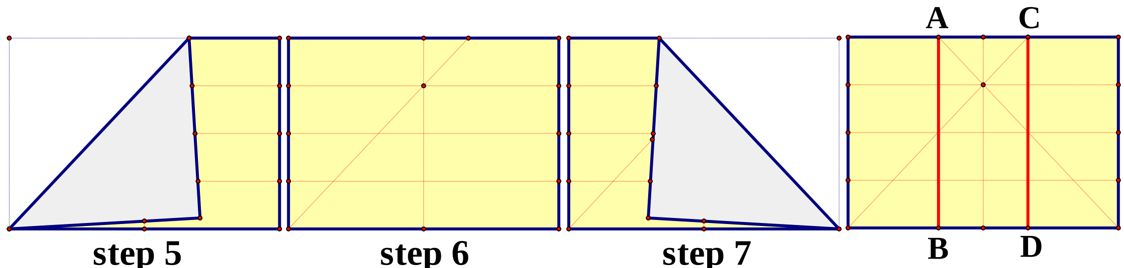
方法一



方法二



step 1　step 2　step 3　step 4



step 5　step 6　step 7　step 8

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！