HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第十二期 目錄（2013年12月）

悼義保

紀志剛

上海交通大學科學史與科學文化研究院

義保兄，你好！

我正在安徽宣城參加梅文鼎誕辰 380 周年國際學術討論會，李文林老師、郭書春先生、劉鈍、古克禮、李兆華、世榮、立升、澤林，還有佐佐木力、小林龍彥等都來了。

此信有一事相托，我的碩士生周霄漢將在明年初畢業，這個學生素質很好，勤奮好學，碩士論文的題目是：數、算數書、九章算術的比較研究。他準備申請國家留學基金資助到國外攻博，但先要國外教授的接受函。我想你可否接受？或者向他推薦某位教授？詳細情況他會直接給你寫信。謝謝！祝好！

志剛　於宣城

這是我於 **2013** 年 **11** 月 **4** 日早晨 **7** 時許給徐義保教授寫的郵件，一般說來，他總是會及時回復，但這次却遲遲未見電郵。**11** 月 **5** 日我返回上海，**8** 日接待日本佐佐木力教授訪問。在晚上的聚會上，上海師大王幼軍教授說，她的朋友從紐約發來消息，徐義保教授因腦溢血住院，而且病情危重。大家在心中爲他祈禱，期冀美國的醫療水平或能化險爲夷。然而，當晚九時左右，噩耗傳來：義保走了！

怎麼可能？義保！你是那麼壯碩，那麼充滿活力，那麼朝氣勃勃！**2012** 年 **5** 月，你訪問交大，做了「薩頓與中國數學史」的精彩演講；今年 **7** 月，曼徹斯特第 **24** 屆國際科學史大會，**23** 日我們同組報告；**8** 月，你携夫人和次子回國探親，**24** 日經滬返美，我們與澤林教授、幼軍教授、方磊博士等一起小聚。席間，你談到正籌劃 **2014** 年 **10** 月在紐約舉辦一次國際學術會議，并爲道本教授慶賀 **70** 壽誕，邀請大家紐約再聚。然而分別未滿三月，遽然陰陽兩隔。人生怎能如此無常？生命怎可如此脆弱？

我和義保同出李迪教授師門，只是他 **1988** 年入學時，我已回學校任教。此後的交往多在學術會議。**2006** 年，他率美國數學會教師訪華團來滬訪問，邀請華東師大張奠宙教授和我各做一場學術報告，聯繫逐漸增多。**2011** 年 **8** 月**,**義保、澤林和我在滬上一家酒肆小聚，他和澤林竟然喝下了一瓶「天之藍」 **(**洋河大麯**)**！把盞之間，他談到正在與道本教授、郭書春教授一起將《九章算術》翻譯英語，我頓生興趣，願意先睹爲快，幷欲以「《九章算術》英譯研究」爲題，指導一位學生的博士論文。他回美不久，就發來了第 **1** 章譯稿，郵件如下：

Dear Zhigang,
Many thanks for your willingness to read over the English manuscript of the *Jiuzhang Suanshu* Professor Dauben and I are working on. We have done the first 3 chapters, and I have put the first one with the Chinese texts prepared by Professor Guo Shuchun on the face-to-face pages. Please feel free to send the attached file to your Ph.D. student who majored in English. Any criticisms, comments, and suggestions would be greatly appreciated. We are going to send you chapters 2 and 3 soon.
With many thanks and all best wishes,
Yibao, 2011-9-30

此後一年中，就《九章算術》的英語翻譯，我和他往返郵件，相互討論。深感他對事業的抱負，對學術的追求，對數學史的熱愛。完成《九章算術》英譯後，他發來一封郵件：

Dear Zhigang,
Many thanks for your comments on chapters 7-9. They are very helpful. On behalf of Professor Dauben and myself, I thank you for reading through the whole translation manuscripts. Needless to say that we have already acknowledged your help in our introduction in an official way. I will present you a copy of the book when it is due published.
How was your conference in Greece? I bet it must be very pleasant and productive. I am very glad to know that you will be a speaker in the special sessions Professors Dauben, Guo Shuchun, Zou Dahai and I are organizing for the Congress to be held in Manchester, UK.
Meanwhile, your student, Ms. Hou Rongying, just visited New York two days ago. We had a dinner together at a restaurant in Chinatown. I asked her bring you a small gift. Hopefully, you will see it soon.
With many thanks and all best wishes,
Yibao, 2012-8-10

其實，我只不過就閱讀所得，提了一些意見和建議，而義保却要致謝、贈書。郵件

所說的 **"small gift",** 則是兩張一美元連號「龍年幸運鈔」，由此可見他對生活的熱愛和對友情的真摯。

《九章算術》的英語翻譯，是一項載入史冊的勛功偉業。作者三人中郭書春先生是研究《九章》的專家，以他的漢語譯注本爲藍本，奠定了底本的學術基礎；道本先生則是蜚譽學界的西方數學史大家，對中國數學史也卓有建樹，他主筆英譯，保證了英語譯文純正。作爲道本教授的學生與合作者，義保成爲「三人組」中重要的連接紐帶。可以想像，爲了克服中英轉譯的困難，他傾注了多少精力和心血。然而，遽然辭世，他却未及得睹全書。

11 月 **9** 日,韓翊教授從美國打來電話,詳告義保發病過程,幷希望能得到《九章算術》的英譯本，以在追悼會上送別義保。我即刻打電話找到郭先生，當時，郭先生正在從合肥返京途中，他已得悉義保的噩耗，幷答應讓出版社以最快的速度郵遞。**11** 日郭先生發來郵件：

世榮、安京、志剛：

你們好!

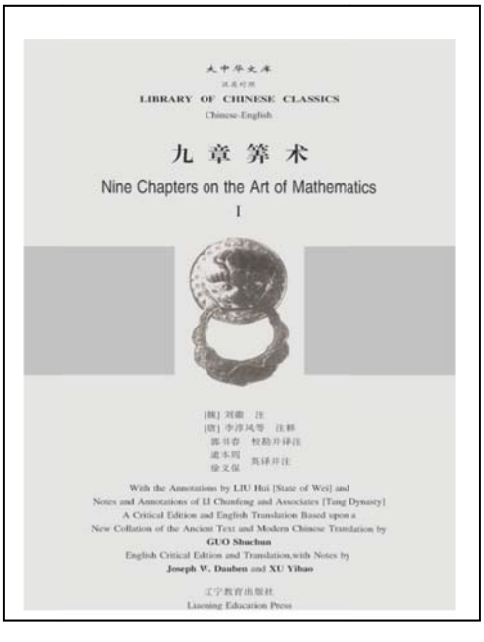
在諸位的關心下，遼寧教育出版社吳璇女士用國內最快的快遞，已將道本、義保和我合作完成的漢英對照《九章筭術》於今天上午遞到，下午我交給了陳鐿文博士，請她帶給韓翊教授。義保生前未能見到我們合作的結晶，實在遺憾！能在葬禮上展現一下，可以稍微安慰義保的在天之靈。

研安！

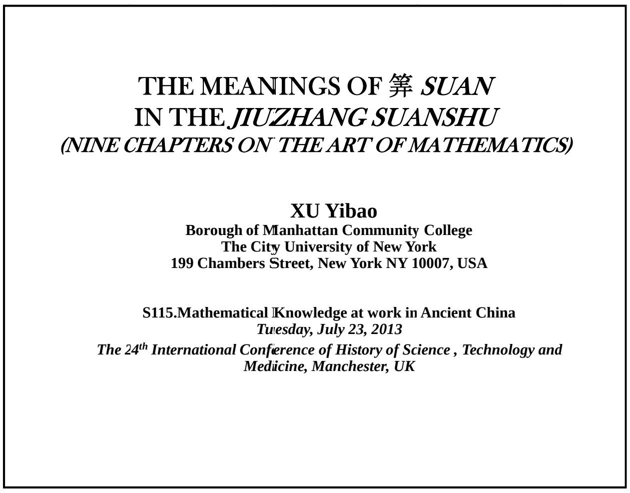
郭書春上 2013.11.11

小的時候就聽說，當流星劃過夜空的時候，地上就有人要去世了。現在，我真希望這個傳說是真的：每個人走的時候都能在蒼宇中閃亮自己的生命軌迹。

天堂路遙，義保兄弟走好**……**



道本教授、郭書春教授、徐義保教授合作完成的漢英對照本《九章算術》(2013 年遼寧教育出版社)



2013 年 7 月 23 日,徐義保教授在第 24 屆國際科學史大會分組會(S115.Mathematical Knowledge at work in Ancient China) 作報告 (紀志剛攝)

追思徐義保教授

鄭振初
香港教育學院

得知徐義保教授英年早逝，心中很是難過。我和徐教授經常在數學史的研討會上見面。他給大家的印象是認真和好學，而且不吝所學，願意和大家分享所得。就算他對論題很了解和有認識，但仍然很客氣聽取不同意見。這一點，是做學問的一個重要修養。數學史研究隊伍中少了徐教授，是學術界的損失。願徐教授安息，他的家人能早日節哀。

史蒂文與數目的新概念

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

謹以本文紀念徐義保教授（12/10/1965-11/7/2013）

一、前言

在中學數學的教學現場，「**1** 是不是質數？」似乎是一個經常被提及的問題。這個問題在算術基本定理（**Fundamental Theorem of Arithmetic**）的脈絡中，誠然有它的意義，因為這涉及正整數因數分解的唯一性。不過，一個更簡單的答案，或許是：在古希臘的數學傳統中，**1** 根本不是數目（**number**），因此，它當然不是質數（**prime number**）。這個答案看起來有一點「耍賴」，不過，它所涉及的歷史故事倒是蠻精彩的，值得我們在此述說分明。

事實上，這個問題也曾經在十六世紀的一場數學競賽中現身。一五四七年，由於三次方程式解法的剽竊爭議，塔塔里亞（**Niccolo Tartaglia**）向卡丹諾（**Girolamo Cardano**）提出數學挑戰，結果，卡丹諾派出徒弟費拉里（**Ludovico Ferrari**）應戰。費拉里的問題就包括：么元（**unit**）是否為一個數目？塔塔里亞抱怨說：這個問題無關數學而是玄學。然後，他模稜兩可地斷言：么元是一個「潛在的」數（**potential number**），而非「實際的」數（**actual number**）。

然則在西方數學史上，**1** 何時才經由「論證」而被認定為一個數目呢？這個問題似乎是在 **1585** 年，由荷蘭數學家賽門 **•** 史帝文（**Simon Stevin, 1548-1620**）率先著手處理。在本文中，我們打算簡介史帝文的生平事蹟與數學貢獻，並進一步說明他的相關思考在十六世紀歐洲數學發展中的意義。不過，我們也必須稍加說明「始作俑者」的歐幾里得的定義。

史帝文：比利時發行的紀念郵票

二、歐幾里得有關數目的定義

歐幾里得的《幾何原本》這部古希臘數學經典共有 **13** 冊，其中第 **VII-IX** 冊主題為數論，因此，按照歐幾里得或古希臘學者論述演繹科學（**deductive science**）的慣例，一開始都是先下一些必要的定義。現在，既然是數論（**number theory**）主題，理當先對所謂的數目（**number**）下定義。

歐幾里得的有關數目的定義出現在《幾何原本》第 **VII** 冊，如下：

定義 VII.2：數目是由么元所組成的集體（A number is a multitude composed of units.）

這是本冊的第二個定義，那麼，第一個定義又是什麼呢？且看我們的下列引文：

定義 VII.1：么元是存在的每一種事物因它而被稱為一的那種東西（An unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one.）[1]

根據這兩個定義，**1** 顯然不是數，第一個數目應該是 **2** 才是。緊接著，歐幾里得為「部份」（**part/parts**）提供第三、四個定義：

定義 VII.3：一個數是另一個數的部分，較小數是較大數的部分，當較小數度量了較大數。（A number is a part of a number, the less of the greater, when it measures the greater,）

定義 VII.4：但當較小數並不度量較大數時，我們就按有幾個部分來討論。（but parts when it does not measure it.）

我們可取 **2** 與 **6** 為例，說明定義 **VII.3** 的意義，亦即 **2** 是 **6** 的部分。至於定義 **VII.4** 呢，我們則可取 **4** 與 **6** 為例，顯然 **4** 並非 **6** 的部份，因此，在說明「**4** 是 **6** 的部分」不足的情況下，我們或可改而指出：「**6** 的多少個部分（**parts**）為 **4**」。根據數學家 **David Joyce** 的看法，這是為比例式 **4:6=6:9** 的定義所預備的工作。（參考 **David Joyce** 為 ***The Elements*** 所布置的網頁：**www.math.clarku.edu/~djoyce**）。

有了「部分」（**part/parts**）的定義，偶數、奇數的定義即可依序如下列：

定義 VII.6：偶數是可以分成兩個相等部分的數。（An even number is that which is divisible into two equal parts.）

定義 VII.7：奇數是不可分成兩個相等部分的數，或是與偶數差一的數。（An odd

---

[1] 藍紀正、朱恩寬將這一定義中譯為：「一個單位是憑藉它每一個存在的事物都叫做一。」藍紀正、朱恩寬譯，《歐幾里得幾何原本》，頁 180。

number is that which is not divisible into two equal parts, or that which differs by an unit from an even number.）

可見，在定義數目時，「部分」這個概念扮演了相當關鍵的角色。事實上，根據定義 **VII.2**，歐幾里得就證明了命題 **VII.4**：「**較小的數不是較大的數的一部份，就是幾部份。**」（**Any number is either a part or parts of any number, the less of the greater.**）

在下文中，我們將會看到，史帝文如何模仿此一進路，說明像 $\sqrt{8}$ 這樣的「不可公度量」也是一種數。

三、史帝文生平事蹟簡介

史帝文（**1548-1620**）年生於是布魯日（**Bruges**，今比利時境內，文藝復興時期屬荷蘭)，他的生父母沒有結婚，後來，母親嫁給信奉喀爾文教派的商人，繼父以買賣地毯與絲織品為生。因此，他成長的生活與宗教經驗，多少可以解釋他後來著書立說的關懷所在，以及他後來何以移居到荷蘭北方。他在數學史上，最有名的貢獻，是創造了十進位制小數的符號，並大力提倡與推廣。至於他的目的，顯然就是為了簡化計算，正如他在《十進位制》中開宗明義所說：「**賽門‧史帝文向占星家、統計員、量毯者、測量員、一般立體幾何學家、造幣局長及所有商人致意。**」

史帝文的早年經歷與十六世紀歐洲商業發展與國際貿易息息相關。他先是在安特維普（**Antwerp**）一家公司擔任記帳員與收帳員。**1571-1577** 年間，他可能有機會到波蘭、普魯士與挪威等地遊歷。然後，在 **1577** 年，他在布魯日的一家稅務機關擔任職員。**1581** 年，他遷居荷蘭北部的萊頓（**Leiden**），先是進入當地的拉丁學校就讀，隨後再升上萊頓大學就學，當時他已經 **35** 歲了。

另一方面，可能在幼年深受喀爾文教派的洗禮，所以，史帝文才會在荷蘭北部七省企圖擺脫西班牙國王的控制而獨立時，遷居到萊頓（**Leiden**)。他在萊頓大學認識了拿索伯爵（**Count of Nassau**）毛里茨（**Maurits**） **--** 荷蘭共和國（**Dutch Republic**）統治者奧蘭治威廉王子（**William, Prince of Orange**）的次子。史帝文與毛里茨結交成為好友。不幸，奧蘭治威廉在 **1584** 年被西班牙國王所派的刺客暗殺，於是，毛里茨遂接下領導棒子，繼續反抗西班牙。這使得史帝文得以登龍，為毛里茨所重用。

正是由於此一機緣，史帝文受聘為毛里茨將軍的工程師、數學與彈道學教官，以及經濟與航海顧問。後來，他還在萊頓大學創立工程學院，運用荷語而非拉丁文教學，他還運用荷語書寫了許多教材。**1585** 年，他出版《十進算術》（***La Theinde*, The Tenth**）與《算術》（***L'arithmétique***），對於十六、七世紀歐洲算術的發展，帶來非常深遠的影響。我們將在下文說明之。

四、《十進算術》

史帝文書寫本書的目的如下：

簡而言之，本書要講授不使用普通分數如何簡便地完成各種帳務結算，數字計算和貨幣兌換；如果這種新記數系統中的所有運算與整數的相關法則相通，便能發揮這種作用。

他將今日的 **0.3759** 記成 **3①7②5③9④**，而 **8.937** 則記做 **8◎9①3②7③**。這本只有 **29** 頁的小冊子，是為下列讀者所撰寫：「觀星者、測量師、地毯製造商、葡萄酒測量員，薄荷師傅以及各類商人。」事實上，本書末有六個附錄，就大致針對前述這些工匠和商人的各類度量單位，舉例說明其十進位小數的計算方法。

事實上，這種為商人與工匠而製作實用算術手冊的作風，早在 **1582** 年即已略見端倪。當年，他出版了第一本著作《利息表》（***Tafelen van Interest*, Tables of interest**）。在這之前，歐洲銀行家平常使用的利息表都是手抄本形式，而且視同秘密而不洩漏給顧客知道。在提供這些數值表之前，史帝文也給出單利與複利的計算法則，並舉例說明之。

至於這本小冊子之書寫，史帝文採用了類似歐幾里得的著述體例，亦即先給出定義（必要時附上解釋），譬如定義一如下：

十進數是一種利用十進位的概念以及一般的阿拉伯數字的算術。任何數都可以由它寫出，由此商務中所遇到的所有計算，只用整數就能完成，而無須藉助分數。

接著，在有關加減乘除的運算部份，史帝文則提供「定理－解法－證明－結論」的格式，必要時，在結論之後，再附上「註釋」。這個風格或許足以反映他熟悉《幾何原本》等經典的數學素養。事實上，他在 **1583** 年所撰著的《幾何問題》（***Problemata geometrica***），就是最好的見證，因為他主要根據歐幾里得與阿基米德的著作，來呈現該書的幾何知識。

五、《算術》與數目概念之延拓

在本書中，史帝文針對二次方程式的求解，以及其他所有高次方程式的近似解之方法，提出了一個統合處理。不過，本書最值得注意的，卻是他的主張：算術是有關數目（**number**）的科學，因而，數目是可用以解釋一切事物的量。此外，他甚至宣稱歐幾里得所謂的構成數目的么元 **(unit)** 也是數目。針對這一點，史帝文推論說：由於部份屬於全體，而么元是若干么元（**units**）的一部份，故其本身也是數。因此，吾人可以對么元進行計算，就像對其它數一樣，從而，當然也可以將么元分成任意多的部份。如此一來，任意量 -- 當然包括么元 -- 都可以被「連續地」劃分。而這正是十進位制小數的思想基礎。

事實上，他定義數目為「每一事物的量」（**quantity of each thing**），並且論證說：被視為幾何點（**geometric point**）的零（**zero**）可生成數目，因此，數目包含了幾何連續統（**geometric continuum**）的概念。儘管這種觀點應用到可公度的量（**the commensurables**）和不可公度的量（**the incommensurables**）的對比時，還是可以看到他的掙扎與保留，因為他認為後者是「荒謬……或不可表達的」，然而，他還是像托勒密或阿拉伯代數學

家一樣，將這些「荒謬的」數廣泛地使用在計算上。這種計算上的「自信」，或許也來自於他認為：因為任何正數都是平方數，故其平方根也是數：

> **部份屬於全體，8 的根是其平方 8 的部份，故 $\sqrt{8}$ 是屬於 8 的同類物。而 8 是數，故 $\sqrt{8}$ 也是數。**

然後，他再利用十進位小數系統，將 $\sqrt{8}$ 表徵到任意精密的程度。

史帝文將所有的數目，不管是離散、連續或幾何式的，都具有相同的特性，可惜，他並不接受新近出現的虛數為數目，從而連帶地影響了他在求解三、四次方程式的研究。無論如何，他將數目的概念從離散的正整數，擴充到幾何線段（一種連續統）的長度，卻是非常具有前瞻性的發展策略，為數目脫離幾何而自主發展，鋪好了康莊大道。

六、結論

史帝文共有十一本著作，領域遍及三角學、力學、建築學、音樂理論、地理學、碉堡防禦工事以及航海學等方面，都有重要的貢獻。不過，從數學史觀點來看，他的貢獻顯然在於算術的發展，譬如他對新的數目概念及其運算法則之論述與倡導。而這些，當然都呼應了十六世紀西歐商業文化之發展。

總之，有關數學與商業之密切互動關係，史帝文為我們作了最忠實的見證，更難得地，他基於實際（計算）需要而將數目概念擴充，並顯然將這些帶入學院教學（記得他曾在萊頓大學中創立工程學院），提升了算術與代數的學術位階。最終嘉惠了十六、七世紀的算術與代數之發展。到那時候，解析幾何和微積分已經指日可待了。

參考文獻

Calinger, Ronald (1999). ***A Contextual History of Mathematics*****. NJ: Prentice-Hall.**

Heath, Thomas L. (1956). ***Euclid: Thirteen Books of the Elements*****. New York: Dover Publications, INC.**

O'Connor, J. J. and E. F. Robertson (2013). “Simon Stevin”, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stevin.html。

齊斯‧德福林（**Keith Devlin**）**(2013).**《數字人：斐波那契的兔子》，台北：五南出版社。

藍紀正、朱恩寬譯 **(2002).**《歐幾里得‧幾何原本》，台北：九章出版社。

算幾不等式的證明(I)

陳敏晧
國立蘭陽女中

若 **a, b** 為正數或零，則$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，「＝」成立時若且唯若，$a=b$。其中，$\frac{a+b}{2}$稱為$a,b$的算術平均數，$\sqrt{ab}$稱為$a,b$的幾何平均數。其代數證明如下：

$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$，因此，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，「＝」成立時，$\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$，所以，$a=b$，反之亦然。

算幾不等式可以推廣至 ***n*** 的情形，也就是：

若$a_1,a_2,...,a_n$為正數或零，則$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$，「＝」成立時若且唯若，$a_1=a_2=...=a_n$。其中，$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$稱為$a_1,a_2,...,a_n$的算術平均數，$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$稱為$a_1,a_2,...,a_n$的幾何平均數。

這個不等式的證明很富有啟發性，先證明$n=2=2^1$再推論$n=4=2^2$，然後反推$n=3$，接著證明$n=8=2^3$，然後反推$n=5,6,7$，依此類推，所以，姑且稱之為「反推法」，再採用數學歸納法，即可證明 ***n*** 的情形。

・$n=4=2^2$的證明：

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geq\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}$$

$$\geq\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\text{ ，}$$

第一個等號成立時$a_1=a_2,a_3=a_4$，第二個等號成立時$a_1a_2=a_3a_4$，因此，「＝」成立時可推得$a_1=a_2=a_3=a_4$。

至於$n=3$的證明，先利用$n=4$的結果，令$a_4=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$，因為$a_1\geq 0,a_2\geq 0,a_3\geq 0$，所以$a_4\geq 0$，因為

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4}\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})}\text{ ，}$$

整理得$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^3 \ge a_1a_2a_3$，左右開立方得$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \ge \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$，等號成立時，顯然$a_1=a_2=a_3$。

・$n=8=2^3$的證明：

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}=\frac{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}+\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}}{2} \ge$$

$$\ge \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)\left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)} \ge \sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}}=\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}\text{，}$$

第一個等號成立時$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}$，第二個等號成立時$a_1=a_2=a_3=a_4, a_5=a_6=a_7=a_8$，因此，「＝」成立時可推得$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=a_7=a_8$。

至於$n=5$的證明，則利用$n=8$的結果，令$a_6=a_7=a_8=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$，因為$a_1\ge 0, a_2\ge 0, a_3\ge 0, a_4\ge 0, a_5\ge 0$，所以$a_6\ge 0, a_7\ge 0, a_8\ge 0$，則

$$\because \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8} \ge \sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}\text{，}$$

$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+3\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)}{8} \ge \sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5})^3}$$

左右八次方得$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^8 \ge a_1a_2a_3a_4a_5(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5})^3$整理得

$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^5 \ge a_1a_2a_3a_4a_5$，左右開五次方得

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \ge \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$，等號成立時顯然$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$。

走筆至此，大家應該可以預測如何從$n=8$的結果，來推論$n=6$及$n=7$。

接著，利用數學歸納法，假設$n=2^k, k\in N$時，算幾不等式成立，即

$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2^k}}{2^k} \ge \sqrt[2^k]{a_1a_2a_3...a_{2^k}}$，「＝」成立時若且唯若，$a_1=a_2=a_3=...=a_{2^k}$。

則$n=2^{k+1}$時，

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+!}}}\right)\geq\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}}}}$$

$$=\sqrt[2^{k+1}]{a_1\ldots a_{2^k}\ldots a_{2^{k+1}}}$$

第一個等號成立時 $a_1=a_2=\ldots=a_{2^k},a_{2^k+1}=a_{2^k+2}=\ldots=a_{2^{k+1}}$，第二個等號成立時

$a_1a_2\ldots a_{2^k}=a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}}$，因此，可推得 $a_1=a_2=\ldots=a_{2^k}=\ldots=a_{2^{k+1}}$。

若 n 不是 2^k，且 $n<2^k$，令 $n+t=2^k,t\in N$，令

$a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=a_{n+t}=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A$，則

$\dfrac{a_1+a_2+..+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+t}}{n+t}\geq\sqrt[n+t]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{n+t}}$，$\therefore\dfrac{nA+tA}{n+t}\geq\sqrt[n+t]{a_1a_2\ldots a_nA^t}$，整理

得 $A^{n+t}\geq a_1a_2\ldots a_nA^t$，$\therefore A^n\geq a_1a_2\ldots a_n$，即 $A\geq(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$，得

$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$。

最後，舉出一個利用算幾不等式性質所得到的證明結果，如下：

已知：a,b,c,d 為四個正數，且 $a+2b+3c+4d=10$。
求證：$ab^2c^3d^4\leq1$。
證明：因為 $\dfrac{a+b+b+c+c+c+d+d+d+d}{10}\geq\sqrt[10]{abbcccdddd}$，整理得

$\dfrac{a+2b+3c+4d}{10}\geq\sqrt[10]{ab^2c^3d^4}$，所以，$ab^2c^3d^4\leq\left(\dfrac{10}{10}\right)^{10}$，得 $ab^2c^3d^4\leq1$。

如果不是使用算幾不等式的性質，應該不會得到如此簡潔迅速的結果。

參考資料

1. 張鎮華(2002)，〈算幾不等式面面觀〉，《數學傳播》，26 卷 2 期。
2. 張福春、李姿霖(2007)，〈不等式之基本解題方法〉，《數學傳播》，31 卷 2 期。

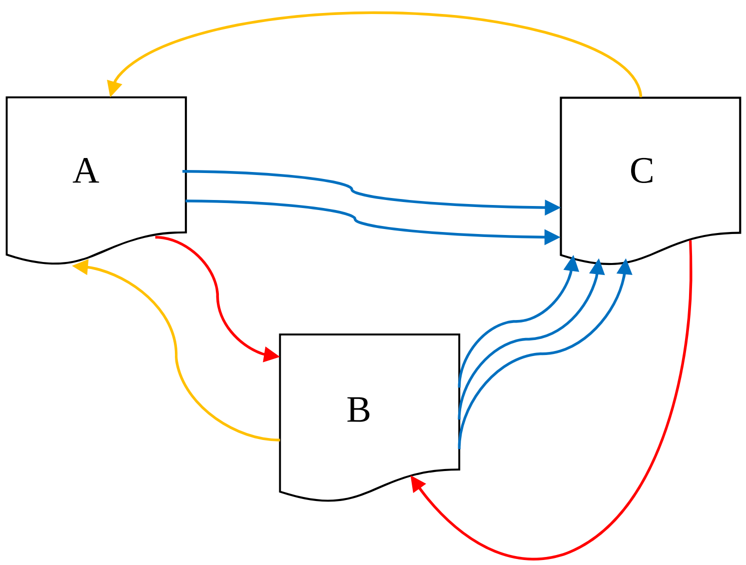
轉移矩陣的穩定狀態與 Google 搜尋引擎

林倉億
國立台南一中

若n階方陣$M=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$滿足：**(1)** 每個$a_{ij}$都滿足$0\le a_{ij}\le 1$；**(2)** 每行的各元之和為**1**。我們就稱M為「n階轉移矩陣」，簡稱為「轉移矩陣」。多找幾個轉移矩陣來試試，就會發現有些矩陣不管初始狀態X_0為何，隨著n越來越大，M^nX就會越來越趨近於某個X。例如$M=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$，$X_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$M^nX_0$會越來越趨近於$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，我們稱之為「穩定狀態」。但有些轉移矩陣可不是這樣子的，比如說當$M=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$時，只要初始狀態不是$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，比如說$X_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，乘下去就會發現$M^nX$的值就永遠在$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$兩者間跳來跳去，永遠不會穩定下來。因此，我們必須給「穩定狀態」一個明確的定義：

> M為轉移矩陣，無論初始狀態X_0為何，當n越來越大時，M^nX會越來越趨近於某一個X，我們就稱X為轉移矩陣M的「穩定狀態」。

搞清楚什麼是「穩定狀態」後，我們就可以看看轉移矩陣跟時下的科技巨擘 **Google** 有何淵源。我們還是先從一個簡單的例子談起。現在有A、B、C三個網頁，如下圖：



A 網頁中有 **3** 個連結，有 **1** 個連結連往 B 網頁，另 **2** 個連往 C 網頁。也就是說，在 A 網頁的使用者，當他隨機離開 A 前往下一個網頁時，有 $\frac{1}{3}$ 的機率會前往 B 網頁，有 $\frac{2}{3}$ 的機率會前往 C 網頁；

B 網頁中有 **4** 個連結，有 **1** 個連結連往 A 網頁，另 **3** 個連往 C 網頁。也就是說，在 B 網頁的使用者，當他隨機離開 B 前往下一個網頁時，有 $\frac{1}{4}$ 的機率會前往 A 網頁，有 $\frac{3}{4}$ 的機率會前往 C 網頁；

C 網頁中有 **2** 個連結，有 **1** 個連結連往 A 網頁，另 **1** 個連往 B 網頁。也就是說，在 C 網頁的使用者，當他隨機離開 C 前往下一個網頁時，前往 A、B 網頁的機率都是 $\frac{1}{2}$。

倘若利用 **Google** 搜尋某個關鍵字後，發現就只有 A、B、C 這三個網頁符合，請問要將哪一個網頁排在最前面？

上述這個問題其實就是網頁的排序問題，也就是我們搜尋到的網頁，該以何種方式排序會比較「好」、比較「合理」。直觀的回答是：越重要的排越前面，或是越有用的排越前面。這回答沒錯，但問題就是如何要電腦程式去判斷什麼叫做「重要」、「有用」，就算是用人腦好了，每個人對「重要」、「有用」的標準也不會完全一致，更不用說我們要判斷的是數十萬、數百萬個網頁！因此，我們就需要一個方式來排序，而這方式必須簡單到讓電腦可以在短時間內運算出來。**Google** 採取的方式，就是依據網頁的連結情形來計算。我們將網路使用者在上述 A、B、C 三個網頁的隨機行為模式（隨機前往下一個網頁）用矩陣表示出來，就得到轉移矩陣 $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$，接下來求出 M 的穩定狀態：

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}z \\ \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

，又 $x+y+z=1$，可得

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z=0 \\ \frac{1}{3}x-y+\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{53} \\ y=\frac{16}{53} \\ z=\frac{21}{53} \end{cases}$$

也就是說，當有一群人隨機在 A、B、C 這三個網頁中隨機連來連去時，在一段時間之後，停留在 A、B、C 這三個網頁的比例大概就是 $\frac{15}{53}$、$\frac{16}{53}$、$\frac{21}{53}$。這個比例可以當作網頁排序的指標，依據這個指標，我們要將 C 網頁排在最前面，接下來才是 B 和 A。這就是 **Google** 搜尋引擎所採用的排序方式。

當然啦，**Google** 搜尋引擎的計算模式比上述的例子複雜太多太多了，不然它也不會那麼值錢，讓兩位創辦人都成為億萬富豪。不過，**Google** 搜尋引擎最原始的概念其實就來自轉移矩陣的穩定狀態，然後再發展出他們獨特的計算法則。

接下來讀者或許會問，既然轉移矩陣不一定會有穩定狀態，那遇到這種情況的話，該如何排序網頁呢？這問題的回答必須牽涉到更多 **Google** 搜尋的計算法則，也會觸及更多、更高深的數學，我們在此不再深入下去了。有興趣的的讀者，上網 **Google** 一下吧！不過，在此有必要點出一個定理，那就是轉移矩陣有沒有穩定狀態的判別定理：

M 是轉移矩陣，若 M 或 M 的某個次方的所有元都是正數，則 M 會有穩定狀態。

這個定理的說明與證明都必須使用到更高深的理論，也只好請有興趣的讀者自行找線性代數的書籍來看。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！