HPM通訊

第十六卷 第二、三期合刊 目錄（2013年3月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

萃取之必要：數學思維 vs.寫作技術

洪萬生
台灣師大數學系退休教授

一、前言

萃取一詞，最常見於咖啡或酒類（啤酒與威士忌）廣告，取其精粹之意。在一般的寫作技術與數學思維過程中，我們也常常必須「去蕪存菁」，以便掌握敘事或概念工具。可惜，在我們的學習過程中，被提醒去做這種「察覺」（**awareness**）的例子並不常見，我們的領會難免不夠深入。現在，藉由數學思維 **vs.**寫作技術的反思，我們可以多少理解「萃取」在智力活動的許多面向，都具有深刻的價值與意義。

最近我閱讀高杉尚校（**Hisataka Takasugi**）的《麥肯錫寫作技術與邏輯思考》，對於作者有關「邏輯思考」的說明頗有感觸，茲藉本文聊表一得之愚。按：高杉尚校出身經濟學背景，曾任職麥肯錫、**JP** 摩根等大企業。**1997** 年，他成立高杉尚校事務所，「**在邏輯思考、寫作、問題解決、交涉、理論分析、財務理論等領域，從事企業研習、訓練及執筆寫作。**」他撰寫《麥肯錫寫作技術與邏輯思考》的目的，是希望為一流人才培養必備的邏輯表現力。因此，在該書的〈前言〉中，他特別強調「會用邏輯，你的故事就會精彩」，因此，「**這是一本讓你學會邏輯思考方法，並提高寫作能力的工具書，目標是提升你的文書寫作技巧，寫出一篇兼具邏輯思考能力和明確表達能力的文章或報告。**」

如此說來，為何本書在商業文書的寫作技術訓練的前提下，作者所強調的「邏輯思考」與我們的數學思維可以且應該連成一氣，而成為數學素養的一部份呢？這是本文的主要關懷所在。

二、商業文書的摘要法與抽象化

事實上，在該書第 **3** 章說明「你的思想如何以精彩文書表現」時，作者所提及的「摘

要法」與「抽象化」，就可以連結到數學方法論（**methodology**）的抽象化（**abstraction**）上。由此可見，一般的寫作技術與數學思維的確有若合符節之處，值得我們在推動（語文）閱讀與數學理解時，特別注意。

在這個前提下，作者所謂的「摘要法」和「抽象化」，都是針對商業文書而言，不過，正如前述，他的說明卻頗能呼應數學思維（**mathematical thinking**）的相關面向。根據高杉尚校的說法，摘要法是「**抽取出潛藏在事物背後的共通本質**」，因此，運用這種方法的目的，是要把「複數」（一個以上）的下位訊息整理出「一個」抽象性的上位訊息。至於其核心的步驟，就是將具體的訊息予以抽象化。譬如說吧，給定如下三則「下位訊息」：

- **X 公司的產品價格一律上升 10%**
- **相反地，Y 公司則一律調降 5%**
- **Z 公司似乎仍然在觀望中**

那麼，一個可以當作摘要法範例的解答是：「**各公司都在調整價格**」或「**各公司正在重新訂定價格**」。顯然，我們所做的，其本質是為了從複數的具體訊息中，萃取出一則共通的精華，也就是進行抽象化的作業。不過，高杉尚校也提醒我們：摘要法並不是隨意刪除 – 請記住：「去蕪」的目的是「存菁」！如果我們希望摘要出天體中的地球，那麼，這絕對不是將地球進行物理性的切割成為一顆小石子，而是要把真的地球摘要成地球儀 – 地球的模型（**model**）！換言之，摘要法是抽象化的步驟，就算失去細節，對象的本質仍要明瞭。以地球儀為例，我們可以省略細部的資訊，但即使刪除了細節，地球儀仍然明確地給人一個地球的印象。

總之，抽象化的化繁為簡功夫，是摘要法的關鍵步驟。不過，高杉尚校也強調：抽象化並非像文字接龍一般的「連鎖發想」，也不是「以偏蓋全」或「部份抽取」。事實上，「一言以蔽之」或「質言之」才是抽象化。讀者不妨參考高杉尚校在該書所舉之例子，一定可以充分理解何以抽象化在吾人的思維或推論活動是如此地不可或缺。

三、張本例的意義

在數學教育家 **Mason, John** 和 **David Pimm** 合寫的論文 **"Generic Examples: Seeing the general in the particular"** 中，曾引述偉大數學家希爾伯特的一段現身說法：

> **假使你想要解題，首先，剝除與此一問題本質 (essential) 無關的任何事物。簡化此一問題，並且盡可能地在不犧牲它的核心 (core) 的情況下將它特殊化 (specialize)。如此一來，它會變得簡單 (simple)，盡可能簡單，但卻不會喪失它的任何「精華」(punch)，然後，你就可以來解題了。至於所謂的延拓 (generalization)，不過是一種你毋需太過勞神的無聊之舉 (triviality)。**

Mason 與 **Pimm** 引述的主要目的是指出：希爾伯特的進路可以說是在於尋找一個「張本例」 -- 彰顯本質的例子（**generic example**），它儘管特殊 **(specialization)** 但卻談論了一般 **(generality)**。因此，他們才會在上述論文中的副標題中，強調從「特殊性」中看到「一般性」。換句話說，對他們來說，「**張本例固然是一個真實的例子，但是它卻以被刻意要求成為『承載一般性』的角色來呈現**」。

我們試以《孫子算經》下卷的「物不知數」題為例，來說明它的作者孫子如何期待讀者可以從特例看到一般：

> **今有物，不知其數，三、三數之賸二，五、五數之賸三，七、七數之賸二，問物幾何？**
> **答曰：二十三。**
> **術曰：三、三數之賸二，置一百四十；五、五數之賸三，置六十三；七、七數之賸二，置三十。併之，得二百二十三，以二百一十減之，即得。凡三、三數之賸一，則置七十；五、五數之賸一，則置二十一；七、七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。**

在本題中，如果我們利用任意三個兩兩互質的除數，分別替代三、五、七，而且餘數也改成任意不相等的三個整數（但分別小於前述的三個除數），那麼，在「術曰」中的「一百四十」、「六十三」、「三十」、「七十」、「二十一」、「十五」等數，也就可以跟著「改寫」成為對應的數，從而可以得證（一般）的「中國剩餘定理」了。

顯然，上述「術曰」掌握了 **70, 21** 和 **15** 三個關鍵數，才使得求解變為可行。這或許也可以解釋何以中國宋代學者周密，將此解法編成如下隱語詩，以利一般人傳頌：

> **三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇**
> **七度上元重相會，寒食清明便可知**

按：上元是指正月十五，又，冬至到清明這兩個節氣共有 **106** 日，因此，寒食是清明前一日，亦即寒食清明是指 **105** 日。像中算史這種主要以問題求解來主導的數學發展脈絡中，如何掌握支配模式（**pattern**）思維的關鍵數，甚至由南宋數學家秦九韶所完成的「求一術」之延拓，顯然最可以幫助我們理解從「特例」看到「一般」的學習趣味了。

四、結論

一般而言，在我們的學習脈絡中，前文所引的高杉尚校的例子，應該會歸入所謂的語文閱讀理解的學科中。現在，有了本文有關寫作技術 **vs.** 數學思維的對比之後，或許數學教師也可以從數學教學的脈絡切入，說明數學思維的鍛鍊誠然有其外部效果才是。如此一來，數學學習與語文閱讀可以連成一氣，而數學思維也就可以成為一般思維中的精華了。何況高杉尚校所強調的寫作技術，對於目前國內以服務業為主的就業市場而言，

更是不可或缺。換言之，這種「數學思維」正是服務業為主的現代社會之所必需，也是二十一世紀數學教師的承擔，值得我們全力以赴！

另一方面，針對抽象思考的萃取功能，高杉尚校也舉了一個簡單的例子，一則如下訊息：「**A 喜歡拍攝知床硫磺山、富士山、淺間山、阿蘇山、櫻島、普賢岳、三原山等地的照片。**」那麼，**A** 究竟喜歡拍攝什麼樣的照片呢？由於這些山都是火山，所以，高杉尚校將它摘要成：「**A 喜歡拍攝火山的照片。**」在這個例子中，他告訴我們：有關日本火山的地理分布之學科知識也非常重要。因此，在進行抽象化的摘要之前，相關學科知識（**domain knowledge**）的充實也非常重要。不過，在雲端數位科技極夯的現在，此一傳統學習重點逐漸想必將被淡化成為次要的地位。然而，高杉尚校在該書的論述中，卻不斷強調商業文書的「結構」之重要性。而這，當然巧合地呼應了數學知識的嚴密結構。由此看來，學習數學的嚴謹邏輯或知識結構，也應該對商業文書的寫作技術有所啟發了。

數學結構或邏輯思維的意義與價值歷久而彌新！高杉尚校的《麥肯錫述寫作技術與邏輯思考》為我們做了最真實的見證。

參考文獻

Mason, John and David Pimm (1984). "Generic Examples: Seeing the general in the particular", *Educational Studies in Mathematics* 15: 277-289.

洪萬生 **(2002).** 〈中算史中的「張本例」〉,《**HPM** 通訊》**5: 12**。也收入洪萬生著，《此零非比０》（台北：台灣商務印書館，**2006**），頁 **190-193**。

高杉尚校 **(2011/2012).**《麥肯錫寫作技術與邏輯思考》，台北：大是文化出版社。

楊瓊茹 **(2009/2011).**〈求一與占卜〉，洪萬生等，《當數學遇見文化》（台北：三民書局），頁 **72-83**。

Frans van Schooten 的圓錐曲線作圖器與電腦模擬

蘇惠玉
台北市立西松高中

一、 前言

雖然大家都這麼說，笛卡兒發明了座標系統與解析幾何這一數學的分支，但是，這只是在笛卡兒《幾何學》中提及的方法，所自然衍生而出的產物。他在《幾何學》中提出的方法想要達成兩方面的目的：**(1)** 通過代數的過程（步驟）將幾何從圖形的限制之中釋放出來；**(2)** 經由幾何的解釋給予代數的操作運算意義。如此，代數與幾何就可以合成一體了。

既然笛卡兒本書的主要目標在於幾何問題解的作圖，那麼，什麼樣的條件是可以「幾何作圖」的？亦即什麼樣的作圖方式是可以接受的「幾何作圖」的呢？古希臘的幾何作圖為「尺規作圖」，由歐基里得《幾何原本》第一卷的前 **3** 個設準（**postulate**）所規範：

設準 **1**：過任兩點可以畫一線段。（**It is postulated that: To draw a straight line from any point to any point.**）
設準 **2**：可以沿著此線段的方向連續地延伸。（**It is postulated that: To produce a finite straight line continuously in a straight line.**）
設準 **3**：可以任意圓心與半徑畫圓。（**It is postulated that: To describe a circle with any center and radius.**）

以我們現在的意思來說，尺規作圖限制在只能用沒有刻度的直尺與圓規作圖，並且圓規畫圓或弧只能作有限多次。在尺規作圖的規定下，許多三次以上方程式，或是二個變數的方程式是沒辦法作圖的，所以，笛卡兒在《幾何學》卷二中，加上了這麼一條「公設」，使得許多機械作圖成為可能：

> **兩條或兩條以上的直線可以以一條在另一條上面移動，並由它們的交點決定出其他曲線。**

加上這一公設之後，我們可以造出許多可行的機械作圖工具，使得圓錐曲線的作圖成為可能。笛卡兒自己曾給出機械作圖的例子，但是，有關圓錐曲線的機械作圖裝置，反而是身為笛卡兒粉絲之一的荷蘭萊頓 **(Leiden)** 的數學教授 **Frans van Schooten (1615~1660)** 所提出的裝置獲得較多的注意。他在傳播笛卡兒的解析幾何方法之餘，努力鑽研圓錐曲線的作圖器，以便補足笛卡兒不足之處，並於 **1646** 年出版他對圓錐曲線作圖器方面的獨創專著 ***De organica conicarum in plano descriptione, tractatus***。以下

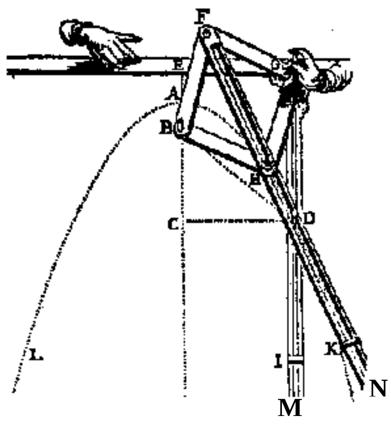
的三個圓錐曲線作圖器皆取自此書，筆者試著解釋其中的數學原理，並利用 **GeoGebra** 作電腦模擬，以利教師在課堂中使用。

另外，有關 **GeoGebra** 所設計的作圖原理，有一部份就是在尺規作圖的架構下，再輔以動態模擬。因此，我們很輕易就能將機械作圖的設計，轉換成 **GeoGebra** 的作圖與動態模擬，讓學生不用親自做出機械裝置，就能夠瞭解此裝置的運作方式，直接觀察出作圖的結果，進而理解其中蘊含的數學原理。

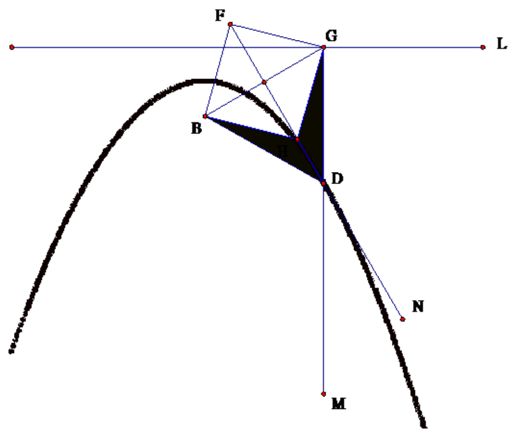
二、拋物線作圖器

I. 設計

先作一個可調整內角的菱形 BFGH；
將 B 點固定在紙上，G 點的地方釘上一條中空的直尺 M，將 M 以垂直 L 的方向將 G 點套在直軌道尺 L 上，讓 G 點可以沿著 L 移動；
再將一個中空的尺 N 固定在菱形 BFGH 的對角線 FH 上面，在直尺 N 與直尺 M 相交的點 D 上面，固定住一枝筆。
將 G 點沿著直尺 L 移動，此時菱形 BFGH 也會跟著移動，並改變形狀，而直尺 N 與直尺 M 的交點 D 所在的位置，就可畫出一條拋物線的軌跡。



II. 數學原理



在△**BHD** 與△**GHD** 中，$\overline{BH}=\overline{GH}$，$\overline{HD}$是公共邊，且 **FH** 是菱形的對角線，因此∠**FHB** ＝∠**FHG**，可得∠**BHD**＝∠**GHD**，所以 △**BHD**≅△**GHD**(**SAS** 全等)，因此 $\overline{DB}=\overline{DG}$，其中 $\overline{DB}$ 為 **D** 點到焦點的距離，$\overline{DG}$ 為 **D** 點到準線的距離，故可知 **D** 點的軌跡為拋物線。

III. **GGB** 電腦模擬設計

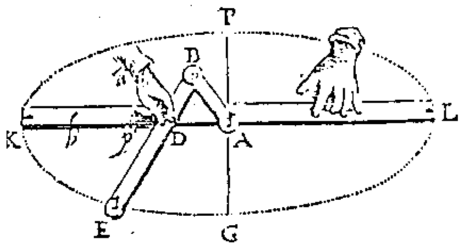
任取一點 **B**，作不過此點的一直線 **L**，在 **L** 上任取一點 **G**，以 $\overline{BG}$ 為一對角線作菱形 **FBHG**；過 **G** 作 **L** 的垂直線 **M**，與直線 **FH** 交於一點 **D**。當 **G** 沿著 **L** 移動時，**D** 點的軌跡即為拋物線。

三、 橢圓作圖器

作圖器（一）

I. 設計

AB 與 **BE** 是兩根不一樣長度的棍子，在 **B** 點連結；在 **BE** 上取一點 **D**，使得 **BD** ＝**AB**。將 **D** 點連接在一個軌道尺 **L** 上，**E** 點上放置一枝筆，當 **D** 點沿著 **L** 移動時，在 **E** 點的筆所畫出的軌跡就是一個橢圓。



II. 數學原理

建立座標系，以 **L** 為 **x** 軸，**A** 點為原點，**AB**＝**BD**＝**a**，**DE**＝**b**，**BE** 與 **x** 軸有一個角度 θ ，設 **E** 點坐標為（**x, y**）。

分別過 **B**、**E** 作 **x** 軸的垂線，可得

$\overline{AD}$ ＝**2acos** θ

$\overline{CD}$ ＝**bcos** θ

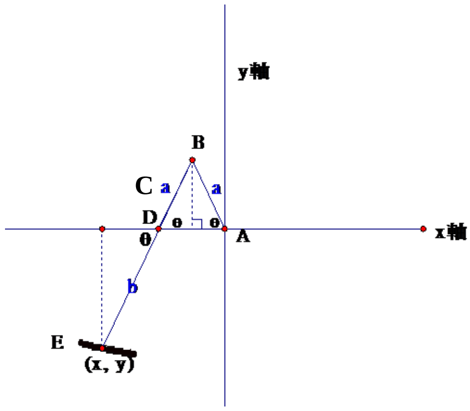
$\overline{CE}$ =**bsin** θ

所以 **x=(2a+b)cos** θ ，**y=bsin** θ

利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 可得

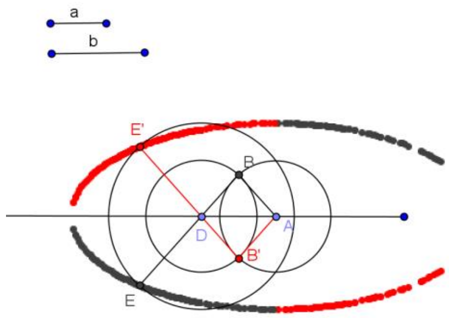
$$\frac{x^2}{(2a+b)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

因此 **E** 點的軌跡為橢圓。



III. **GGB** 電腦模擬設計

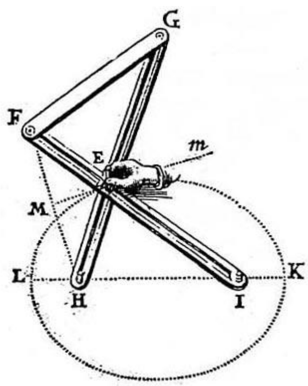
任給兩線段長 **a** 與 **b(a>b)**，作直線 **L**，在 **L** 上任取二點 **A**、**D**，分別以 **A**、**D** 為圓心，**a** 為半徑畫圓，兩圓交於 **B** 點（與 **B'** 點），以 **D** 為圓心，**b** 為半徑作圓，直線 **B**（或 **B'**）**D** 與此圓交於 **E** 點（**E'**點），**E** 點與 **E'**點的軌跡即為橢圓。



作圖器（二）

I. 設計

取兩根長度相等（**=2a**）的軌道尺 **HG** 與 **IF**，交於 **E** 點，兩端分別固定在 **H**、**I** 上（**HI**＝**2c, 2c<2a**），取一木條 **FG**，其長度等於 **HI**，**F**、**G** 分別連接在這兩根軌道尺上，當 **G** 點繞著 **H** 旋轉時，**E** 點所畫出的軌跡即為橢圓。



II. 數學原理

在△FHG 與△HFI 中，因為 $\overline{HG}=\overline{FI}$ ，$\overline{FG}=\overline{HI}$ ，$\overline{FH}=\overline{FH}$ ，所以

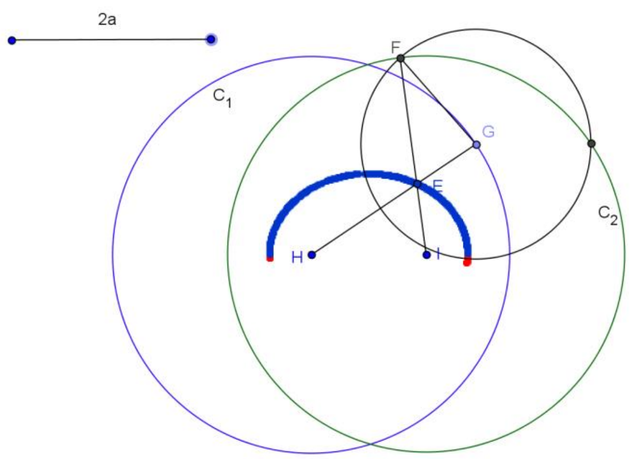
△FHG≅△HFI（SSS 全等），因此∠FGH＝∠HIF；

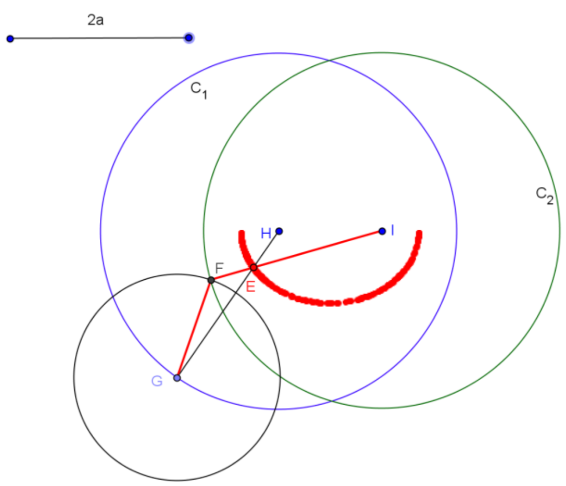
又∠FEG＝∠HEI（對頂角），故△FEG≅△HEI（AAS 全等），因此可得

$\overline{FE}=\overline{EH}$。因此 $\overline{EH}+\overline{EI}=\overline{FE}+\overline{EI}=\overline{FI}=$ 固定值 2a，故 E 點的軌跡為以 H、I 為焦點的橢圓。

III. GGB 電腦模擬設計

作 H、I 兩點，以及固定長 2a，使得 $\overline{HI}$ <2a；分別以 H、I 為圓心，2a 長為半徑作圓 C_1、C_2；在 C_1 上任取一點 G，以 G 為圓心，$\overline{HI}$ 為半徑作圓，交 C_2 於 F 點，連 HG、FI 與 FG，$\overline{FI}$ 交 $\overline{HG}$ 於 E 點，E 點的軌跡即為所求。

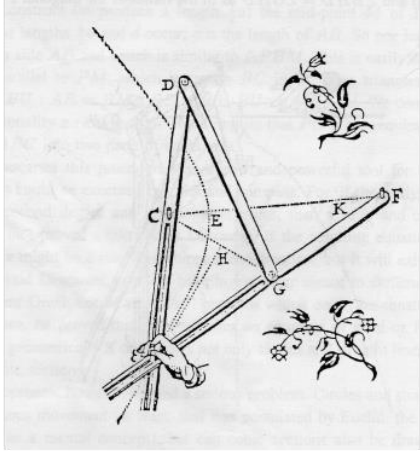




四、雙曲線作圖器

I. 設計

在兩個軌道尺的上半部作 $\overline{CD}=\overline{GF}$ （＝2a），將 C、F 固定在紙上(CF=2c)，又作一木條 $\overline{DG}=\overline{CF}$ ，CD 與 DG 在 D 點連接，GF 與 DG 在 G 點連接，將筆放在兩個軌道尺相交的 P 點上，P 點畫出的軌跡即為雙曲線。



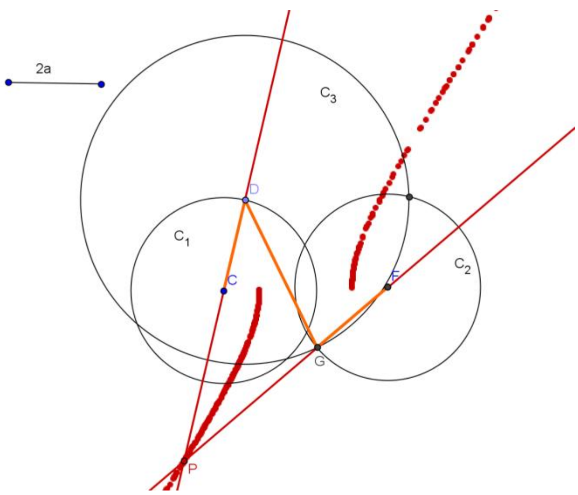
II. 數學原理

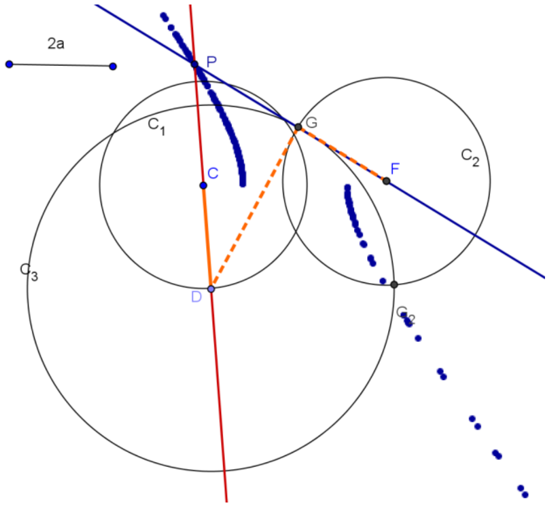
在△CDG 與△GFC 中，因為 $\overline{CD}=\overline{FG}$，$\overline{DG}=\overline{CF}$，$\overline{CG}=\overline{CG}$ ，所以△CDG≅△GFC（SSS 全等），故∠CDG＝∠CFG；

又在△PDG 與△PFC 中，因為∠CDG＝∠CFG，$\overline{DG}=\overline{CF}$，∠DPG＝∠FPC，所以△PDG≅△PFC（AAS 全等），因此 PG＝CP，故可得$\overline{PF}-\overline{PC}=\overline{PF}-\overline{PG}$ $=\overline{GF}=$固定值 2a，因此 P 點的軌跡為以 C、F 為焦點的雙曲線。

III. GGB 電腦模擬設計

如橢圓作圖器（二）的方法，只要將固定長 2a 調整成小於 2c（此處為$\overline{CF}$）即可的 P 點的軌跡為雙曲線。。





參考文獻

石川智史（2004），〈機構を題材とした授業実践に関する一考察－楕円・双曲線の作図を通して－〉，網址：**http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/schooten/document/report.pdf**

Van Maanen, Jan A (1995), “Alluvial Deposits, Conic Sections, and Improper Glasses, or History of Mathematics Applied in the Classroom”, in F. Swetz *et al* eds., *Learn From The Masters!*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

蘇惠玉（2009），〈解析幾何的誕生故事之一〉，洪萬生等，《當數學遇見文化》（台北：三民書局）頁 123-140。

「摺紙中學數學」之社團指導篇

李政憲
新北市林口國中/數學輔導團

四年前，筆者承蒙本校自然科學研究社鍾兆晉老師的邀請，希望藉由實作於社團課中指導學生數學概念。應允之後，便以數學簡報軟體 **MathPS**（交大陳明璋教授研發，現正名為 **AMA**，相關介紹詳見附錄１）為基礎工具，待學生學習半個學期後，輔以摺紙操作為應用。再加上筆者於該年度開始申請教育部的科教專案計畫，連續進行三年迄今，收穫頗多。茲簡記相關發展與心得於後。

第一年指導學生時，由於筆者本身也在摸索期，因此，當年度進行的主題也較為多元，除了一開始利用摺紙玫瑰花作品（如附件一，本文所有附件載點詳見附錄 **2**），探討其相關的數學概念外；尚還進行了摺紙方塊拼貼活動（如底下圖 **1-4**，零件摺法詳見附錄 **3**），以及摺紙拼貼、摺紙書籍介紹（如圖 **5-7**）等課程，並於期中指派學生完成翻轉紅包袋設計（如附件二），以及期末完成摺紙名片設計（如附件三－１）等活動。

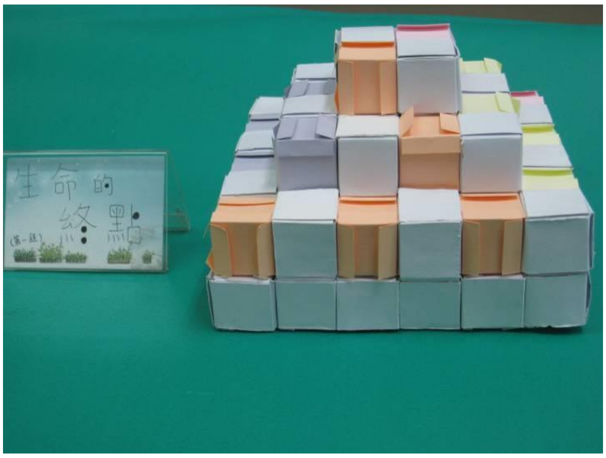


圖 **1**　學生作品「生命的終點」

圖２　學生作品「ＬＫＪＨ」

圖３　學生作品「自科王道」

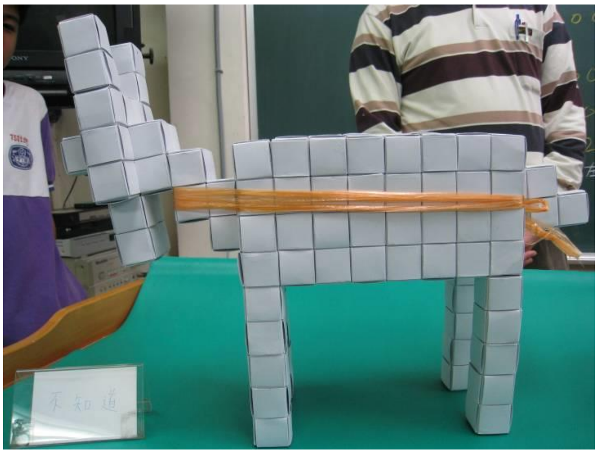


圖４　學生作品「不知道」

圖 **5**　學生摺紙書籍介紹

圖６　學生摺紙作品實作

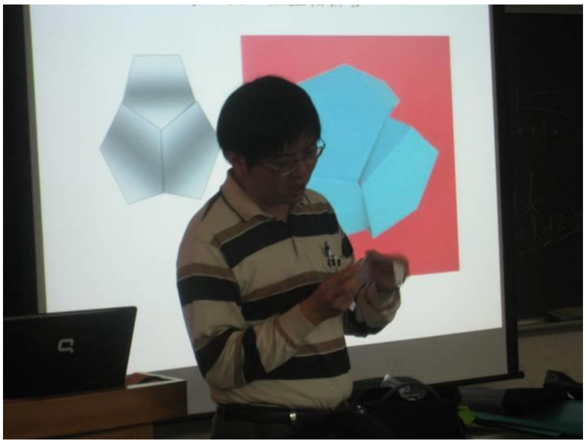


圖 **7**　摺紙拼貼課程指導

第二年承續第一年的課程，除ＡＭＡ工具操作持續指導外，仍然保留的課程有第一年的摺紙方塊拼貼（如底下圖 **8-10**）以及摺紙名片設計作業（如附件三－２），另外並探討了六角芒星摺紙以及正多面體摺紙問題探討（如附件四、五），以及摺紙基本型繪製與數學概念探討（如附件六）與十字星拼貼設計（如圖 **11-12**）。補充說明的是本校自然科學研究社組成成員為七、八年級混合，社員並有延續學習的安排，故相關課程於設計時需同時考慮延續性與區別性。

圖 8　學生作品「萬里長城」　　　　　　圖 9　學生作品「腳踏實地」

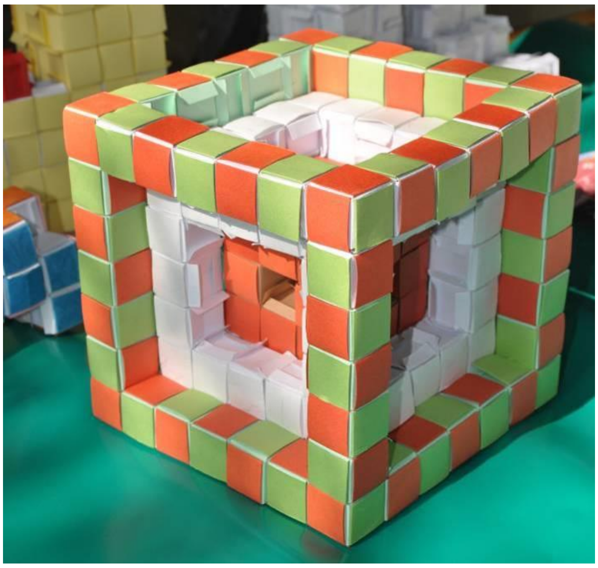


圖 10　學生作品「奇異空間」　　　　　圖 11　十字星拼貼課程教學

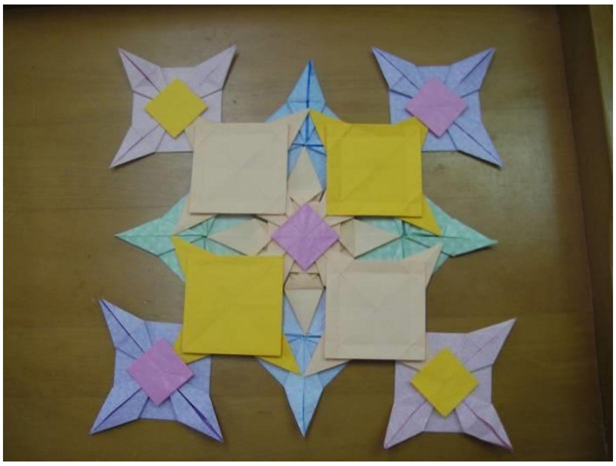


圖 12　十字星拼貼學生設計

第三年則因有了前兩年的指導經驗為基礎，除保持了同學們印象較為深刻的摺紙方塊拼貼（如底下圖 13-15），以及實用性較高的摺紙名片設計外，另外並加上了摺紙飛機展開圖造型設計（如附件七）以及十字翻轉摺紙與摺紙風車著色設計（如圖 16）等課程內容，並進行了太陽花摺紙教學的實作評量的活動。

而本學年目前進行了一個學期的課程，除了ＡＭＡ工具軟體的教學外，配合校慶展覽所進行的摺紙方塊拼貼與六面翻轉摺紙等討論（如圖 **17-20**，詳見附件八、九），以及於期末指定的一刀剪摺紙設計（附件十）作業，都是摺紙應用於數學，以及資訊融入數學教學與實作的實例。

圖 **13**　學生作品「巨石陣」

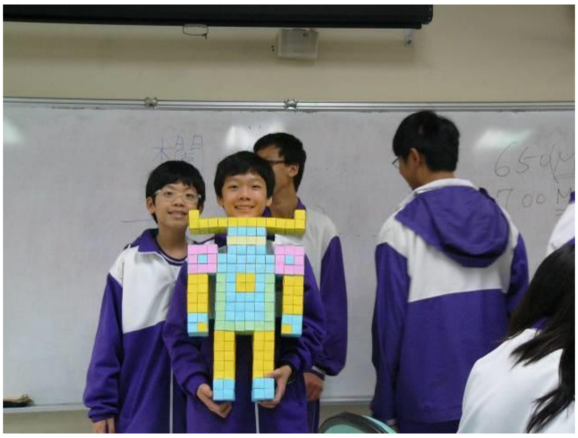


圖 **14**　學生作品「變形金鋼」

圖 **15**　學生作品「雙子星大樓」

圖 **16**　學生十字翻轉暨摺紙風車設計

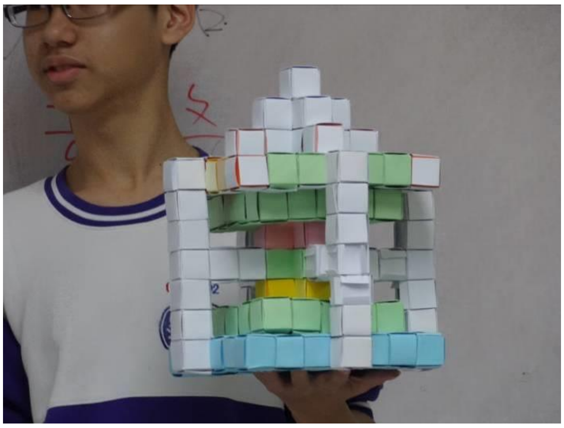


圖 **17**　學生作品「森林小屋」

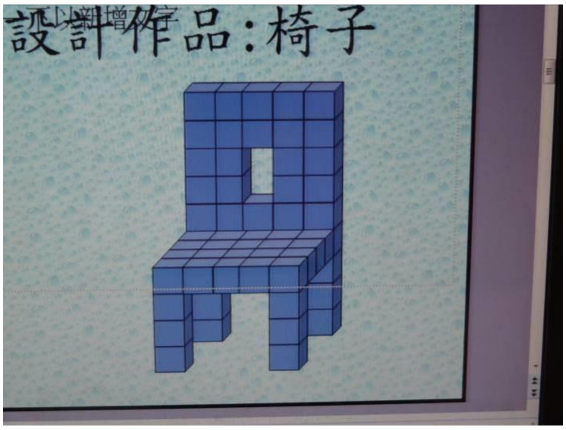


圖 **18**　學生「椅子」作品設計

圖 **19**　學生作品「桌子」

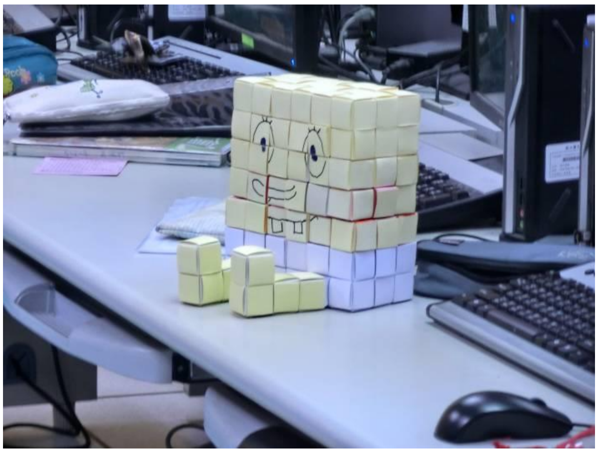


圖 **20**　學生作品「海綿寶寶」

綜觀這幾年的課程下來，筆者與學生的收穫都頗多，其中讓學生印象最為深刻，而且自己的想法也不斷改變的，是「摺紙方塊拼貼」活動。當初一開始設計這個課程，主要是材料名片紙取得容易，加上可以訓練學生的耐心與創造力。而第一年進行的時候，除了我自己一開始播放拼裝方式影片，並指導如何估算紙張與方塊數量後，其餘便交由學生自行設計，並於課後利用時間合作完成。這裡要特別說明的是，一般的名片紙長寬比近似於黃金比例 **1.618**（相關介紹詳見附件十一：「摺紙中學數學」之黃金試金石，同步刊登於科學教育月刊第 **345** 期），因原始名片紙張較大，而切割長邊一半後，長寬比又過於接近 **1**，不易作拼接的動作，故指導學生將原始的名片紙裁切為四等份（長寬各切為兩等份）後進行拼接，可同時達到減少體積與紙張增量的效果。另外值得一提，當年度學生設計的模型頗具巧思，除了圖 **1**「生命的終點」頗具數學感外，而圖 **4**「不知道」是個可收納物品的模型動物，足見學生花費時間的巧思。在學生完成作品後，也會在社團課中與學生討論所需的方塊數以及方塊上保護套的張數；設方塊數 **n** 恰巧是完成作品的體積，而保護套張數 **m** 則為其表面積，學生在完成前需透過**(6n+m)÷4** 計算所需的名片張數，部份作品並透過空心與實心不同設計方式分別進行計算，讓學生在完成作品之餘，也能了解其數學相關的知識。

相較於第一年帶著同學們作討論，第二年維持同樣的教學方式，只是這次由學生自行設計相關的數學問題。本年度學生作品「奇異空間」（如圖 **10**）利用顏色的區隔性，設計了正立方體框架的組合，在計算方塊個數與框架的差異性可透過等差數列的概念作結合；而作品「腳踏實地」（如圖 **9**）原本學生預定設計要完成一個機器人，後續因時間不足，紙張之張數也不夠則作罷。由於每年學生的組合有延續性，第三年學生設計的「變形金鋼」（如圖 **14**）則將其修正後加以變化，而「巨石陣」（如圖 **13**）則是將去年度「奇異空間」的作品加以改良後，再探討其數學問題。「雙子星大樓」（如圖 **15**）更是結合時事設計出的作品。

今年度因應連方塊教學進入第四年，想利用不同方式進行教學與呈現，遂以索碼方塊配合原始摺法作為開始（關於索碼方塊相關介紹詳見附錄 **4**），討論不同方塊所需紙張數的差異性，進一步要求學生以簡報軟體進行設計其組裝過程，加上新增六面視圖繪製

與原本要求的數學題目作討論。待各組簡報大致定稿後再進行組裝，並於完成後進行海報與作品發表（如圖 **21-24**），讓這個教學從開始的操作，到中間的討論，以至於最後的呈現，都能與數學概念環環相扣。而今年度的「桌子」和「椅子」（如圖 **18**、**19**）是首見相互搭配的組合，「海綿寶寶」（如圖 **20**）則是學生童心未泯的表現，中間還引發學生產生其內部是否為中空的討論，至於「森林小屋」（如圖 **17**）則是應用了建築結構，將幾何概念發揮到極致的呈現。

圖 **21**　學生完成索瑪方塊作品

圖 **22**　學生「坦克」作品討論

圖 **23**　學生海報相互觀摩

圖 **24**　學生作品海報展示

最後以學生今年度設計的「森林小屋」介紹與相關數學問題作為本篇文章的結束：

以不起眼的名片為素材的連方塊，一個個地拼湊，一步步地組合，巧妙呈現出數學與藝術的結合。本作品（如圖 25）製作耗時三小時，共使用一百八十七個方塊，一千七百零七張紙（含保護套）。

中心的一個方塊為出發點，先以沙漏為模型，由上下延伸出對稱立體圖形（如圖 26），即為森林小屋前期。原本以為作品已完成，但後來發現，只以中間一顆方塊支撐容易傾倒，就從前後左右加上了支撐架（如圖 27），即解決支撐不住的問題。經過仔細思考良久，認為完整度不佳，在頂端部分似乎缺少了什麼，於是就

將富含數學概念的階梯狀屋頂加裝上去，即為森林小屋（相關文字圖片內容由本校盧浚榮同學暨其組員共同完成）。

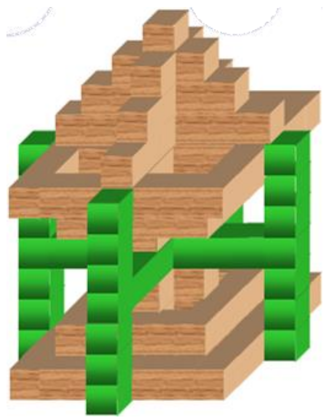


圖 25:森林小屋完成圖

圖 26：森林小屋前期

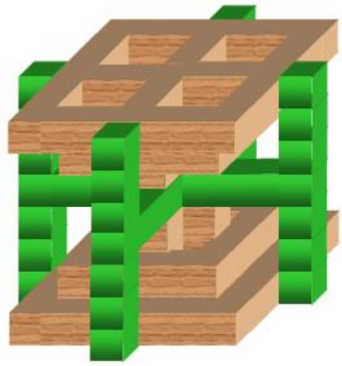


圖 27：森林小屋中期

Q1：成品共需幾個方塊？
Q2：表面積為多少平方單位？
Q3：需要幾張名片紙（包含保護套）？
Q4：如果填滿空洞，要再加幾個方塊？
Q5：接合面為多少平方單位（一接合面視為 **2** 平方單位）？

附錄 1 ：AMA 軟體介紹

交大 **AMA** 數位教材設計課程簡介

製作 **Flash** 教學動畫，太難**!** 別人設計的修改不易**!**

AMA(Activate Mind Attention)教你如何使用你熟悉的 **PowerPoint** 快速有效的設計課堂教材及製作教學的動畫，並擅用 **AMA** 的激發式動態設計功能，讓你隨心所欲的控制你所要呈現的重要訊息、吸引注意力，引導學生學習，讓你的教學投影片不再成為學生學習的負擔，讓你的教學演示不再成為會毒害學生或具催眠作用的投影片。

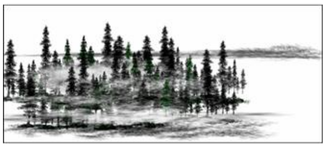
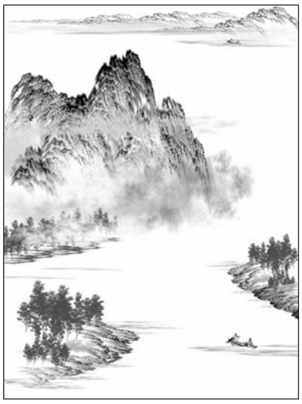
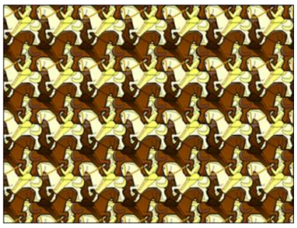
AMA 原名數學簡報系統 **(Mathematical Presentation System, MathPS)**，是為教師課堂中呈現數學教材、解決教師製作數學數位教材不易而設計的 **PowerPoint** 外掛系統，因為提供許多製作數學教材所需之功能，如呈現幾何性質、結構與測量所需之相關教材製作工具，特別適合數學教學，但其強大功能，亦適合一般的教學或展演。

AMA 的核心功能是有激發式動態呈現 **(Trigger-based Animation, TA)**，及結構式複製繪圖法 **(Structural Cloning Method, SCM)**。激發式動態呈現就是運用一個物件當激發器 **(trigger)** 控制一連串的出現、突顯、消失及動畫，同時一個訊息可以被一個以上

的觸發器控制；因此，訊息可以由展演者以預定的、或隨意的順序及速度呈現，此功能改善了傳統 **PowerPoint** 線性呈現方式的缺點，有彈性的呈現展演者的意念，並與現場的聽眾互動。激發器可以是一個物件，此物件可以是一個訊息、一個獨立的物件或是鑲蓋在一個物件上的透明圖。激發器可以適當的布置在畫面之中，使得動態呈現與教材得以適當切割與融合。本工作坊將介紹 **AMA** 目前已開發完成的激發式動態呈現之基本模式，及應用激發式動態呈現的教學設計原則，適用於一般的教學及演示。

結構式複製繪圖法利用結構和複製的概念來設計造形，讓原本複雜的數位構圖或圖形繪製變得容易、省時與節省電腦資源。在本工作坊，將介紹 **AMA** 系統所提供的特殊結構式製繪圖與造形功能，可以繪製仿自然山水畫、複雜的對稱構圖以及光點系列等，特別適合藝術與自然科教學。

只要您會使用 **PowerPoint,** 您就可使用 **AMA** 所開發的教材，學會 **AMA** 讓您可以更輕易的修改、製作自己想要的教材呈現方式，最重要的是您將學習如何有效的呈現教材，讓您的 **PowerPoint** 成為教學的助力而不是阻力。


以上為利用 **AMA** 軟體繪製的相關圖片，歡迎有興趣學習的老師自行下載研究。
※交大 **AMA** 網站（含軟體暨使用手冊下載）：**http://ama.nctu.edu.tw**

附錄 2：本文相關附件載點
《台灣數學博物館》http://museum.math.ntnu.edu.tw/
《林中生命藝數殿堂》http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math

附錄 3：摺紙方塊拼貼介紹網址
《Origami Business Card Cubes 1》http://www.youtube.com/watch?v=RxMgiqIhiz0
《How to Fold Business Card Cubes》**http://www.youtube.com/watch?v=g_PrLoZBEbM**

附錄 4：索碼方塊介紹網址
《索瑪立方塊》http://www.chiuchang.com.tw/toy/somacube.html
《大家來玩索瑪方塊》http://163.27.50.20/web/soma/

Information

《中國科學技術史．數學卷》榮獲第四屆郭沫若中國歷史學一等獎

2012 年 **12** 月 **18** 日，由中國社會科學院、中國科學院、中國文學藝術界聯合會、中國人民對外友好協會聯合主辦，郭沫若紀念館承辦的「郭沫若誕辰 **120** 周年紀念會暨第四屆中國歷史學獎頒獎儀式」，在北京人民大會堂舉行。

中國科學院自然科學史所郭書春研究員主編的《中國科學技術史·數學卷》榮獲頒第四屆中國歷史學一等獎。

數學是中國古代最發達的科技門類之一，中國古代數學在世界古代數學史上具有重要的地位和鮮明的特色，對現代數學的研究（如吳文俊院士提倡的數學機械化）也能發揮一定的啓發作用。《中國科學技術史·數學卷》以翔實的史料、嚴格而充分的分析，對清末以前中國數學主要的成就與思想、重要的數學著作、杰出的數學家等做了全面系統的論述，充分利用考古發現和新的研究方法和視角對中國古代數學發展進行了比以往的著作要明顯合理的分期，尤其著力探討了過去不大重視的數學推理和數學證明、數學發展與社會的政治、經濟和文化等外在因素的關係，以及中外數學的交流等重要領域。我們可以說，本書在中國數學史界百年來國內外幾代學人研究成果的基礎上，特別是充分汲取了 **30** 年來學術研究的最新進展，加以提煉和升華，成爲迄今爲止中國數學史領域最爲全面、系統而深入的著作。它必將作爲今後中國數學史研究的基礎和新的起點。同時，它也會大大促進我們對中國科學技術史、世界數學史和中國歷史的認識。

本書由郭書春任主編，天津師範大學李兆華教授任副主編，成員除自然科學史研究所郭金海研究員、韓琦研究員、田淼研究員、鄒大海研究員（按姓氏拼音爲序）和研究所原副所長、中國科技館前館長王渝生研究員外，還包括清華大學、內蒙古師範大學、天津師範大學、上海交通大學、東華大學、華東師範大學、科學出版社、中國大百科全書出版社等單位的 **20** 多位專家，可以說這是目前中國數學史領域最强大的專家團隊。同時，該書的編研工作也促進一批數學史領域年輕學者的成長。

郭沫若中國歷史學獎是中國社會科學院頒發的部級學術獎項，也是目前中國歷史學界的最高榮譽獎項，**1998** 年 **7** 月獲批設立，**2000** 年 **1** 月首次頒發。迄今爲止，郭沫若中國歷史學獎共頒發了四屆，每屆一等獎僅一項。前三屆已有科學史著作獲二等獎、三等獎和提名獎，如第三屆獲獎成果中有自然科學史研究所席澤宗院士主編的《中國科學技術史·科學思想卷》獲得二等獎，自然科學史研究所主持、水科院周魁一研究員撰寫的《中國科學技術史·水利卷》獲三等獎，自然科學史所田淼研究員撰寫的《中國數學的西化歷程》獲提名獎。本屆郭沫若中國歷史學獎共頒發一等獎 **1** 項、二等獎 **3** 項、三等獎 **7** 項、提名獎 **21** 項。此次兩部科技史領域著作分別獲得郭沫若中國歷史學一、二等獎，說明科技史研究重要的學術和社會價值爲人們所認識和接受的程度越來越高，也體現了科技史研究在社會發展特別是思想文化建設中所發揮的重要作用，這不僅可以闡明中華科技在世界科技史上的崇高地位，而且也可以爲我國當前科技的自主創新提供寶貴的借鑒、啓示和激勵。

附記：本資訊由郭書春教授提供。又，在今年所頒發的獎項中，張秀民著、自然科學史研究所韓琦研究員增訂的《中國印刷史（插圖珍藏增訂版）（上下）》榮獲二等獎。

頒獎現場

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！